# Relato de Experiência

## Professores de Matemática em Ação: Ideias de Modelagem Matemática a Partir do Tangram

*Danusa de Lara Bonotto*[36]
*Morgana Scheller*[37]
*Maria Salett Biembengut*[38]

**Resumo**
Este artigo tem como objetivo relatar uma experiência desenvolvida com um grupo de professores de matemática, participantes de ação de formação continuada promovida por uma universidade pública do sul do Brasil. Os encontros do grupo acontecem mensalmente, com temáticas delineadas pelos participantes e mediadas, teoricamente, em sessões de estudo. O episódio que se pretende relatar refere-se às ideias de Modelagem Matemática que emergiram no grupo, por meio dos questionamentos dos professores, no decorrer da realização de uma atividade envolvendo a construção de triângulos com as peças do Tangram. Percebeu-se que o desenvolvimento da atividade e os problemas apontados pelos professores possibilitaram reflexões sobre e para a prática docente, para a (re)elaboração de saberes e, paralelamente, para a vivência de uma experiência com Modelagem Matemática.

**Palavras-chave**: Modelagem Matemática. Formação Continuada. Reflexão.

### Introdução

Em 2010, foi instituído um projeto de extensão em uma universidade pública, no interior do Rio Grande do Sul, envolvendo professores de Matemática da Educação Básica da região de abrangência da universidade. Diante da consolidação da proposta de formação, os encontros do grupo continuam ocorrendo mensalmente. Tais encontros são conduzidos por meio de estudo e análise das tendências temáticas em Educação Matemática, além de temas específicos, emergentes das demandas dos professores, do planejamento de estratégias pedagógicas e da análise das potencialidades e limitações da utilização de recursos pedagógicos. Os encontros do grupo foram constituindo *processos de reflexão* (GÜILLICH, 2013) que acontecem pela via da mediação teórica e das perguntas e incursões dos

[36]Doutoranda do PPG EDUCEM/PUCRS, Mestre em Matemática (UFRGS). Docente da UFFS, Cerro Largo, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: danusabonotto@hotmail.com.
[37]Doutoranda do PPG EDUCEM/PUCRS, Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Docente do Instituto Federal Catarinense, Rio do Sul, Santa Catarina, Brasil. E-mail: morganascheller@yahoo.com.br.
[38]Pós-doutora em Educação (USP e University of New Mexico, USA). Docente da FAMAT/PUCRS, Porto Alegre, Brasil. E-mail: maria.salett@pucrs.br.

professores formadores, bem como no diálogo entre os participantes, que gera a reflexão sobre a ação.

No ano de 2014, o grupo de professores optou por estudar as potencialidades e limitações de materiais manipuláveis[39]: a Escala de Cuisenaire e o Tangram. A escolha deve-se ao fato da disponibilidade destes materiais na maioria das escolas de atuação dos professores. Utilizaram-se tais materiais para o estudo dos números racionais e seus diferentes significados, bem como para trabalhar a construção de figuras geométricas planas e o estudo de área e perímetro. Segundo Onuchic e Alevatto (2008), os números racionais apresentam diferentes "personalidades": ponto racional, quociente, fração, operador e razão. Destaca-se que durante as atividades com a Escala de Cuisenaire, exploraram-se estas diferentes "personalidades". No caso do Tangram, explorou-se uma das "personalidades", a fração.

Neste trabalho, relata-se o episódio do estudo referente ao Tangram, jogo chinês constituído de sete peças, o qual potencializou a emergência de ideias de Modelagem Matemática durante a realização da atividade pelos professores. Destaca-se que o estudo, realizado com os professores, não foi precedido de discussão teórica sobre Modelagem Matemática.

## 1. Do Tangram às ideias de Modelagem Matemática

Neste artigo, entende-se a Modelagem como um método de ensino com pesquisa, cujos procedimentos são agrupados em três fases: 1) *percepção e apreensão,* que envolve a percepção no reconhecimento da situação-problema e apreensão na familiarização com o assunto a ser modelado; 2) *compreensão e explicitação,* que envolve a compreensão na formulação do problema, explicitação na formulação do modelo matemático e explicitação na resolução do problema a partir do modelo e 3) *significação e expressão* em que ocorre a significação na interpretação da solução e validação do modelo e a expressão do processo e do resultado (BIEMBENGUT, 2014).

Para o estudo do Tangram, foram necessários três encontros, com duração de aproximadamente três horas. Inicialmente, os professores foram convidados a socializar o

[39]Para Reys, (1982, citado por Vale (1999) materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar.

que conheciam sobre o Tangram e o modo como utilizavam o material na sala de aula. A manifestação dos professores indica que o uso do material, nas escolas em que atuam, incide mais nos anos inicias do Ensino Fundamental. Já nos anos finais, seu uso se restringe a exploração de conceitos de geometria. As falas a seguir ilustram o exposto:

> *Professor(a) A: Desde a formação de figuras diferentes, trabalha na questão do traçado. Tudo! Trabalha com os triângulos..., a geometria enquanto faz as montagens das figuras, com essas poucas peças se consegue fazer várias outras figuras.*
>
> *Professor(a) B: A construção de outros polígonos utilizando as peças do Tangram.: quadriláteros, pentágonos, hexágonos e daí eu digo quantas peças eles podem usar para a construção de um determinado polígono.*

A proposta elaborada pelas formadoras fez uso de dobraduras para a construção do Tangram e objetivou explorar uma das "personalidades" do número racional – *a fração*. Complementando, exploraram-se conceitos de área e o perímetro das figuras construídas.

O *diário do professor*[40] C, ilustrado a seguir, evoca a memória do encontro.

> *Encontro do dia vinte e quatro de setembro de 2014. Assunto Tangram. A profe formadora A começou o encontro conversando sobre como cada um faz uso do Tangram em suas aulas, e como fazemos a construção do mesmo com os alunos. Logo assistimos a um vídeo, criado por alguns alunos que foi encontrado na internet, e discutiu-se sobre a lenda do Tangram. Após, foi proposto pelas professoras um problema com o Tangram envolvendo área e frações. A atividade envolvia a construção de quadrados e triângulos e limitando-se o uso de peças , para que possamos fazer a discussão sobre as áreas e perímetros nas figuras formadas, e assim as possibilidades que obtínhamos, os resultados encontrados nos grupos íamos discutindo. (Diário do(a) professor(a) C, 2014).*

Uma das atividades, propostas aos professores, consistiu na construção de triângulos utilizando, necessariamente, quatro das sete peças do Tangram e na determinação de sua área e perímetro. As construções realizadas pelos professores estão expressas na figura a seguir:

[40]Concebe-se diário do professor como instrumento de reflexão sobre a prática (PORLÁN; MARTÍN, 1997).

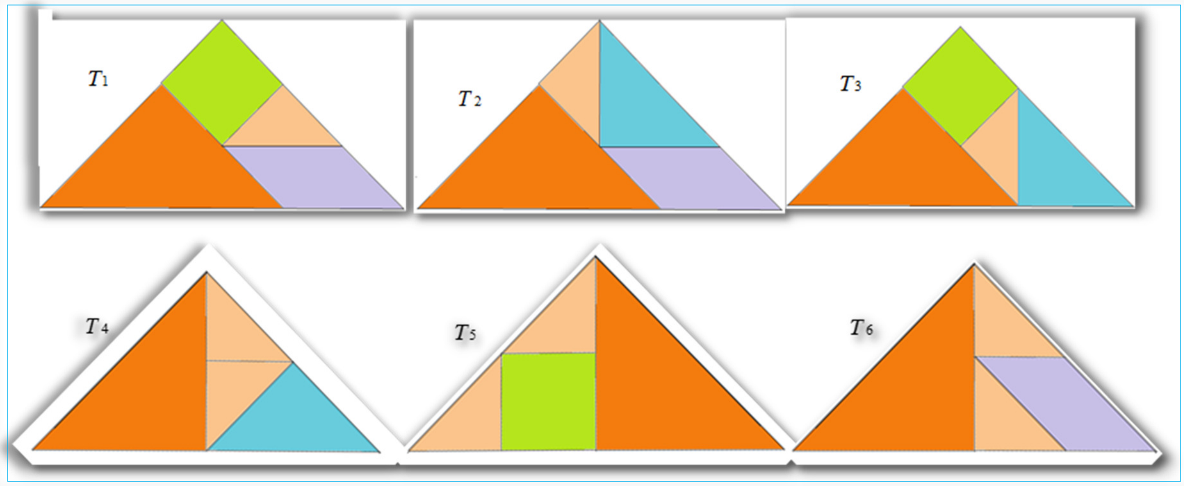


Figura 1 – As seis possibilidades diferentes de construção de triângulos obtidas pelos professores ao fazer uso de quatro peças do Tangram em cada construção.
Fonte: As autoras (2015).

Na sequência, questionados sobre a possibilidade de mesma área e mesmo perímetro nos triângulos, os professores investigaram e utilizaram duas diferentes estratégias para responder a questão: 1) comparação das figuras para a determinação da área e dos lados das mesmas para o cálculo do perímetro, não apresentando valor numérico para a validação; 2) atribuição do valor "*l*" para o lado do quadrado do Tangram e soma das frações para representar a área de cada uma das figuras. Para a determinação do perímetro, a estratégia foi a utilização das medidas dos lados obtidos por meio das dobraduras. Dessa forma, ao considerar o lado do Tangram com medida 'l', a área do Tangram ($A_r$) é expressa por $A_r = l^2$. Eles perceberam, a partir da construção do Tangram por meio das dobraduras, conforme exposto na Figura 2, que a área de cada uma das figuras que o compõem é dada em função da medida do lado.

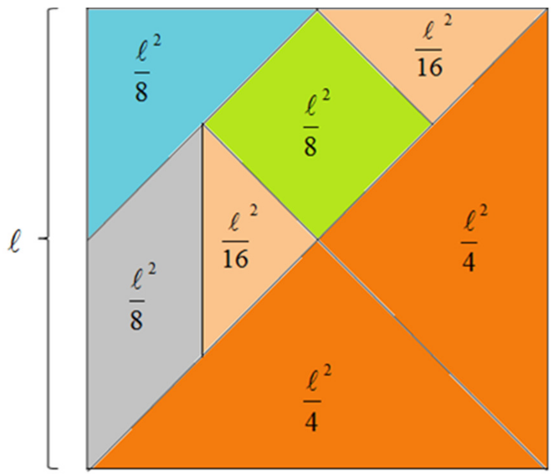


**Figura 2 - Frações da área total correspondentes a cada peça do Tangram.**
**Fonte: As autoras (2015).**

Assim, na Figura 1, tem-se que: $A_1 = A_{T_1,T_2,T_5} = \frac{9}{16}\ell^2$ ($A_1$ é área de cada um dos triângulos $T_1$, $T_2$ e $T_5$) e $A_2 = A_{T_3,T_4,T_6} = \frac{8}{16}\ell^2$ ($A_2$ é área de cada um triângulos $T_1$, $T_2$ e $T_5$), o que corresponde a um aumento na área de $\frac{1}{16}$ unidade, quando variar o lado do Tangram em uma unidade de medida de comprimento. Em relação ao perímetro, obteve-se $P_1 = P_{T_1,T_2,T5} = \frac{3\ell(\sqrt{2}+1)}{2} \cong 3{,}6\ell$ ($P_1$ é o perímetro de cada um dos triângulos $T_1$, $T_2$ e $T_5$) e $P_2 = P_{T_3,T_4,T_6} = \ell(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4\ell$ ($P_2$ é o perímetro de cada um dos triângulos $T_3$, $T_4$ e $T_6$).

Destaca-se que foi opção dos professores, participantes do grupo, a representação decimal aproximada para o perímetro e a área dos triângulos construídos, o que acarretou erros de aproximação que foram percebidos por eles no decorrer do desenvolvimento da atividade. O Quadro 1 foi organizada pelas professoras formadoras e expressa a síntese dos modelos obtidos para a área e o perímetro das seis construções.

| Lado $\ell$ | $P_1$ | $P_2$ | $\Delta P_1 P_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $\Delta A_1 A_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2} \cong 3{,}6$ | $(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4$ | $\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2} - (\sqrt{2}+2) \cong 0{,}2$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | $\frac{2*3(\sqrt{2}+1)}{2} \cong 7{,}2$ | $2(\sqrt{2}+2) \cong 6{,}8$ | $3(\sqrt{2}+1) - 2(\sqrt{2}+2) \cong 0{,}4$ | $\frac{9}{4}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ |
| ... | | ... | | ... | ... | |
| $\ell$ | $\frac{3\ell(\sqrt{2}+1)}{2} \cong 3{,}6\ell$ | $\ell(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4\ell$ | $\frac{\ell(\sqrt{2}-1)}{2} \cong 0{,}2\ell^2$ | $\frac{9\ell^2}{16}$ | $\frac{\ell^2}{2}$ | $\frac{\ell^2}{16}$ |

**Quadro 1- Síntese dos valores/expressões para área e o perímetro das seis construções.**
Fonte: As autoras (2015).

Em seguida, um novo problema foi proposto por um dos professores do grupo:

*Professor(a) D: -O que nós temos nesta tabela é o perímetro e a área em função da medida do lado do Tangram, mas e se o perímetro for aqui 7,2, como eu faço para descobrir a área desse triângulo?*

Dessa forma, novamente, o grupo de professores foi mobilizado para pensar sobre o problema proposto pelo colega e surgiram diferentes estratégias para determinar o modelo que expressa a relação entre a área e o perímetro de cada combinação de triângulos:

*Estratégia 1)* Se $P_2 = \ell(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4\ell$, então $\ell = \frac{P_2}{\sqrt{2}+2} = \frac{P_2(2-\sqrt{2})}{2} \cong 0{,}3P_2$. Como $A_2 = \frac{\ell^2}{2}$, tem-se que $A_2 = \frac{(3-2\sqrt{2})(P_2)^2}{4} \cong 0{,}043\,(P_2)^2$;

*Estratégia 2)* Utilizando os dados da Tabela 1, considerando a segunda combinação de triângulos, a relação entre o perímetro e a área está expresso no Quadro 2.

| Lado $\ell$ do quadrado | $P_2$ | $A_2$ |
|---|---|---|
| 1 | $(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4$ | ½ |
| 2 | $2(\sqrt{2}+2) \cong 6{,}8$ | 2 |
| 3 | $3(\sqrt{2}+2) \cong 10{,}2$ | $\frac{9}{2}$ |
| ... | ... | ... |
| $\ell$ | $\ell(\sqrt{2}+2) \cong 3{,}4\ell$ | $\frac{\ell^2}{2}$ |

**Quadro 2 - Perímetro e área referente à segunda combinação de triângulos.**
Fonte: As autoras (2015).

O diálogo apresentado, a seguir, ilustra a discussão dos professores em relação ao aumento da área e do perímetro dos triângulos.

*Professor(a) F: -O perímetro foi aumentando e a área foi aumentando.*
*Formadora A: -Como é que aumenta esse perímetro?*
*Professor (a)F: -Constantemente, 3,4 e a área também está aumentando.*
*Formadora A: -A área também aumenta de forma constante? O perímetro aumenta 3,4, mas a área não aumenta igualmente. Primeiro aumenta 1,5, depois aumenta 2,5, depois aumenta 3,5. O que isso significa?*
*Professor(a) F: -É aí tem uma curva.*
*Formadora A: -Que curva seria esta?*

Sugeriu-se aos professores a realização da representação gráfica dos dados do Quadro 2, visto que até aquele momento, essa possibilidade não havia sido manifestada pelo grupo. Isso denota que os professores priorizaram a utilização da representação algébrica e do numérico-tabular durante a investigação do problema.

Com base na representação gráfica, os professores apresentaram algumas hipóteses em relação ao possível modelo, conforme diálogo, a seguir e ilustração da Figura 3:

*Professor(a) E: - É uma exponencial?*
*Formadora A: - Mas passando na origem?*
*Professoar(a) R: -Acho que é uma função do segundo grau.*
*Formadora A: - Vamos investigar se essa é uma função do segundo grau.*

Assim, de acordo com segunda estratégia tem-se ilustrado na Figura 3, a área expressa por $A_2 \cong 0{,}043(P_2)^2 + 0{,}000008P_2$ .

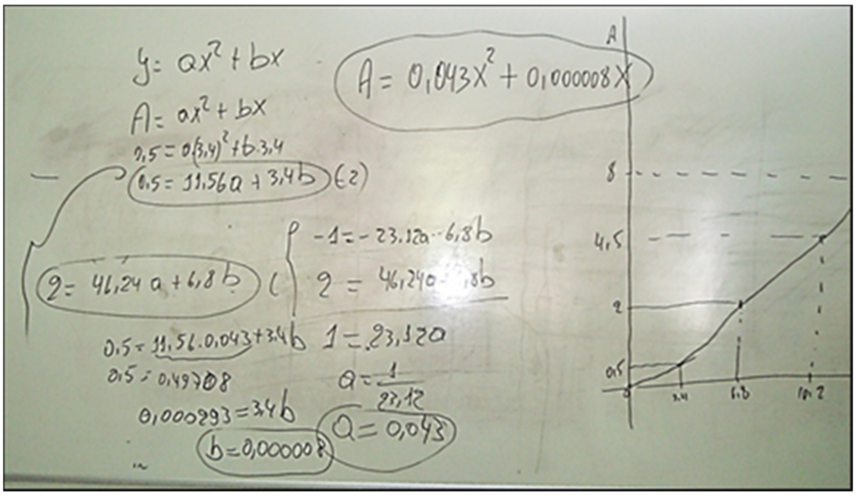


Figura 3 – Estratégia 2 apresentada pelo professor F para a resolução da questão[41].
Fonte: Fotografia registrada pela bolsista do projeto no encontro do dia 24/09/2014.

O professor S, ao observar a estratégia 1, expressa:

> *Professor(a) S: - Aquele 0,000008 é tão minúsculo que qualquer valor vai ficar tão pequeninho que dá pra desconsiderar.*
> *Professor(a) D: - É por causa dos arredondamentos que utilizamos.*

Portanto, em qualquer uma das estratégias, os professores perceberam que, a menos de erros de aproximação, o modelo que representa a área em função do perímetro é dado por uma função quadrática expressa na forma $A_2 = \dfrac{(3-2\sqrt{2})(P_2)^2}{4} \cong 0{,}043\,(P_2)^2$ . Questionados quanto à função inversa, expressam:

> *Formadora A: - E se agora eu quisesse encontrar o perímetro em função da área?*
> *Professor(a) S: - Isola, raiz quadrada, da área dividida por 0,043.*
> *Formadora B: - Vocês estão percebendo que vocês têm a função inversa? Não?*

Percebendo que os professores não haviam compreendido a ideia da função inversa, presente na situação, a formadora A utilizou o *software Graphmática* para marcar os pontos e construir o gráfico da mesma. Dessa forma, foi possível discutir a simetria da função e da sua inversa em relação à reta y = x. A construção do gráfico foi utilizada para a validação do modelo obtido, conforme Figura 4. Destaca-se que não emergiram no grupo

[41] Após a construção da representação gráfica, o professor F observa que a escala utilizada poderia ter sido mais bem construída.

de professores, discussões explícitas referentes às condições de existência da função inversa, apenas que o valor do 'x' deveria ser positivo, visto que ele representa a medida do lado *"l"* do quadrado do Tangram.

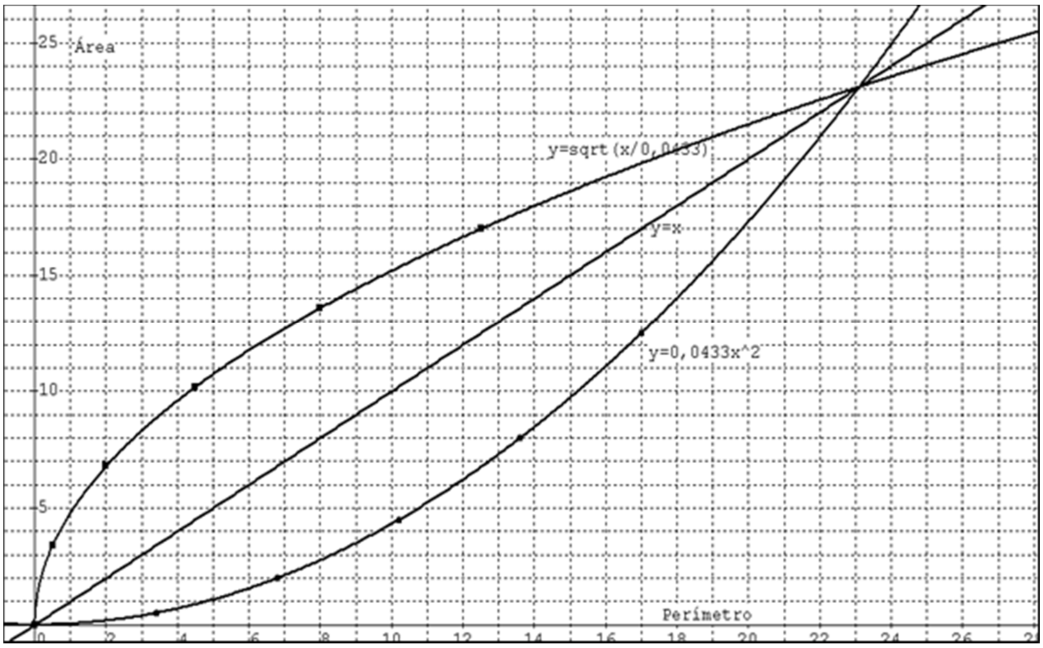


**Figura 4 - Construção no *software Graphmática* da área em função do perímetro e da inversa desta função.**
**Fonte: As autoras (2015).**

A fala da professora R, após a realização da atividade, sinaliza a importância da representação gráfica para possibilitar uma compreensão mais ampla do problema.

> *Professora R: Assim, nós na verdade só queríamos relacionar as fórmulas, e com o gráfico tem uma visão completa do que realmente nós estamos trabalhando, relacionando as frações, e essa parte que com o gráfico completou, ficou melhor de entender.*

Acredita-se que a atividade desenvolvida no grupo e os problemas propostos pelos participantes desencadearam reflexões sobre a prática docente, evidenciada por meio da troca de experiências e do diálogo entre os pares, da (re) elaboração e produção de saberes (SCHÖN, 2000; ALARCÃO, 2010; IMBERNÓN, 2010), conforme as falas a seguir.

> *Professor(a) M: Esses encontros estão trazendo novos horizontes pra gente trabalhar em sala de aula, a gente tá muito habituado ao tradicional e aqui a gente tá tendo novas visões (...)*
> *Professor(a) E: E tem coisas que a gente se dá conta aqui, que a gente não se deu conta lá trabalhando.*

Para Biembengut (2008, p. 19) “as *experiências vividas* são substratos para as cenas de que dispomos, movendo-se delas para outras em uma relação espacial invariante sob *mudanças de ponto de vista* (grifo nosso)”. Nesse sentido, acreditamos que o processo desencadeado no grupo, por meio do estudo do Tangram, permitiu aos professores vivenciarem uma atividade de Modelagem Matemática, mesmo sem ter-se explicitado, inicialmente, o método utilizado.

## 2. Reflexão sobre a experiência

As ideias de Modelagem Matemática que emergiram no grupo, baseadas na manipulação do Tangram, ilustram as diferentes estratégias que um grupo de professores de matemática da Educação Básica utiliza durante a atividade investigativa.

A postura investigativa e reflexiva dos professores, ao envolver-se na atividade, possibilita a ampliação de significados no tratamento de materiais manipuláveis e os fazem vislumbrar novas maneiras de sua exploração em sala de aula. Como, por exemplo, no episódio relatado, a possibilidade de explorar o conceito de função por meio da utilização do Tangram.

Vivenciar o processo de Modelagem Matemática potencializou a reflexão sobre prática docente, conforme pode ser verificado nos excertos apresentados no texto, de modo a favorecer a projeção dessa prática de exploração e investigação para a sala de aula, fazendo com que as discussões não fiquem apenas no âmbito da formação. Desse modo, o professor reflete *sobre* e *para* a prática pedagógica e amplia e (re)significa conceitos. Assim, aprende-se quando se investiga/reflete e investiga/reflete o aprender e o ensinar.

## Referências

ALARCÃO, I. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva.** 7. ed. São Paulo: Cortez, 2010.

BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem Matemática no Ensino Fundamental**. Blumenau: EdiFurb, 2014.

BIEMBENGUT, M.S. **Mapeamento na Pesquisa Educacional**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

GÜILLICH, R. I. C. **Investigação–Formação Ação em Ciências**: um caminho pra reconstruir a relação entre o livro didático, o professor e o ensino. Curitiba: Prismas, 2013.

IMBERNÓN, F. **Formação continuada de professores.** Porto Alegre: Artmed, 2010.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. S. G**.** As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

PORLÁN, R.; MARTÍN, J. **El diario del profesor: um recurso para investigación en el aula**. Díada: Sevilla, 1997.

SCHÖN, D. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e aprendizagem.** Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2000.

VALE, I. Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In: APM (Eds.), **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, 1999. p. 111-120.