

# Pesquisa com Implicação em Sala de Aula



## Aproximando e Calculando Áreas com Recursos Diversos: Uma Proposição para a Licenciatura em Matemática

*Márcio de Albuquerque Vianna<sup>11</sup>  
Marcelo Almeida Bairral<sup>12</sup>  
Leonardo Kirmse de Oliveira<sup>13</sup>*

### Resumo

O cálculo de área de figuras planas com a utilização de integrais definidas em um intervalo numérico é um dos tópicos estudados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. A abordagem desse conteúdo é procedimental e mediante uma escassez de recursos didáticos, porém, com a valorização de resolução de listas de exercícios. Sinalizamos uma possibilidade de ruptura dessa prática convencional em função do uso de recursos didáticos variados. Acreditamos que uma proposição, como a ilustrada neste artigo, favorece a participação, a investigação e o desenvolvimento do senso crítico de futuros professores de matemática para construírem atividades mais desafiadoras em suas aulas.

**Palavras-chave:** Licenciatura em Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Cálculo de Área de Figuras Planas. Recursos Diversos.

### Introdução

Um dos conteúdos estudados em Cálculo Diferencial e Integral em cursos do Ensino Médio e do Ensino Superior é o cálculo de área de figuras planas com a utilização de integrais definidas em um intervalo numérico. Geralmente, os exemplos abordados nas aulas partem da exemplificação com o uso de uma curva qualquer, definida por uma função algébrica, na qual é proposto o cálculo da área delimitada pela mesma, num dado intervalo. Posteriormente, os procedimentos aprendidos são “treinados” pelos alunos em imensas listas de exercícios. O problema que aqui se apresenta é a iniciativa de discutir a legitimidade dessas atividades enquanto reprodução de uma prática na qual as funções matemáticas são propostas pelos professores para que os estudantes calculem a sua área, sem qualquer significação e contextualização que se aproxime, quando possível, da realidade das formas que percebemos no mundo.

Sendo assim, este artigo apresenta uma proposta para a utilização de vários recursos

<sup>11</sup>Doutorando em Ciência, Tecnologia e Inovação, Mestre em Educação Matemática. Professor da área de Educação Matemática da UFRRJ/IE/DTPE. Campus Seropédica, RJ. E-mail: [marcioviannamat@ufrj.br](mailto:marcioviannamat@ufrj.br)

<sup>12</sup>Pós-doutor em Educação Matemática. Professor da área de Educação Matemática da UFRRJ/IE/DTPE/PPGEduc. Campus Seropédica, RJ. E-mail: [mabairral@hotmail.com](mailto:mabairral@hotmail.com)

<sup>13</sup>Graduando, aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ. Campus Seropédica, RJ. E-mail: [leonardok\\_8@hotmail.com](mailto:leonardok_8@hotmail.com)

didáticos, sobretudo os informáticos, em um processo de construção de caminhos em que os alunos possam experimentar alternativas ao “paradigma do exercício” (SKOVSMOSE, 2000), rascunhar, aproximar e escolher recursos e modos de calcular a superfície de um objeto, de uma imagem, de uma gravura etc.

Várias propostas estão sendo desenvolvidas nesse sentido nas atividades de Tutoria de Prática de Ensino, no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Um dos propósitos dessa tutoria é que o licenciando elabore e execute, individualmente ou em grupo, alguma atividade que inspire a implantação futura de projetos de trabalho. O papel do professor é orientá-lo acerca dos caminhos e das possibilidades ao longo dessa execução. No exemplo apresentado neste artigo, o futuro professor, terceiro autor, realizou a sua atividade individualmente.

### **Uma reflexão sobre a reprodução da cultura escolar e o paradigma do exercício**

As práticas educacionais comportamentalistas no Ensino Superior, na área de Ciências Exatas, evidenciam o uso da demonstração, da memorização e da repetição (MIZUKAMI, 1986) de estruturas e cálculos algébricos em exercícios propostos pelo professor. Percebe-se essa prática nos cursos de Licenciatura em Matemática, principalmente nos anos iniciais, em que os licenciandos são apresentados à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que dificilmente contempla atividades que levem o estudante a refletir, na prática, sobre o conhecimento abordado, sobre o método e sobre os recursos didáticos, tendo em vista que futuramente serão profissionais que atuarão na atividade educativa do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e, quem sabe, do Ensino Superior.

A proposta ilustrada neste artigo justifica-se pela necessidade de romper com essas estruturas reprodutivistas ainda observadas nas aulas de matemática. Nossa proposição estimula a experimentação *in loco* a partir de saberes docentes (TARDIF, 2000) capazes de promover nos licenciandos reflexões sobre a sua própria formação e sobre a repercussão dessa formação em sua futura experiência profissional.

Particularmente, esta proposta contribui para o desenvolvimento de saberes matemáticos e de saberes curriculares. Apontamos como sugestão para as aulas de cálculo, nas séries iniciais da Licenciatura em Matemática, uma abordagem de ensino sob a perspectiva dos cenários de investigação (SKOVSMOSE, 2000) e de práticas democráticas em sala de aula. Acreditamos que essas práticas devem buscar aproximar o conhecimento

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

específico de conteúdo às práticas investigativas, de modo que os “futuros educadores” sejam os protagonistas nas ações e escolhas dos procedimentos na resolução do problema, em uma relação mais horizontalizada com o professor, no sentido de valorizar aquilo que o aluno já sabe (VIANNA, 2009).

A distinção entre os três tipos de referências com os dois tipos de paradigmas que podem ser construídos em sala de aula é apresentada por essas combinações no Quadro 1.

	<b>Exercício</b>	<b>Cenário para a investigação</b>
Referência à matemática pura	(1)	(2)
Referência à semi-realidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

Quadro 1 - Ambientes de Aprendizagem  
Fonte: SKOVSMOSE, 2000.

O primeiro ambiente (1) é conceituado como a aplicação da matemática pura, carregado de exercícios permeados por formalismos algébricos. O segundo (2) é composto por atividades com figuras geométricas, números e o tratamento da informação. No terceiro ambiente (3), cria-se uma situação fictícia de modo que faça referência à semi-realidade, descrita no exercício, sendo irrelevante qualquer outra informação. Discutida por Skovsmose (2000, p.9), “[...] uma semi-realidade é um mundo sem impressões dos sentidos”. Assim como no tipo (3), o ambiente criado do tipo (4) faz menção à semi-realidade, contudo nesta categoria os exercícios propostos visam levar os alunos a explorarem, pesquisarem, a fim de encontrarem explicações. Os exercícios voltados para a realidade criam um ambiente do tipo (5), embora ainda carregado por formalismos. Por fim, encontra-se o tipo (6) cujo cenário de investigação é voltado para uma realidade em maior nível, na qual o professor tem como papel principal orientar os alunos, de modo que eles sejam levados a explorarem novos instrumentos e métodos de investigação, através do desenvolvimento de outras atividades que, por sua vez, não estão restritas aos exercícios. Assim, a maneira de enxergar e desenvolver a matemática ganha um novo significado.

### **A atividade desenvolvida**

Fazendo alusão ao ambiente (6) do Quadro 1, apresentamos a sequência de procedimentos escolhidos e executados pelo aluno para a tarefa investigativa proposta:

**TAREFA PROPOSTA PELO PROFESSOR:** procure uma figura ou a face de um objeto qualquer que possa ser delimitado por uma função algébrica e, posteriormente, integrado para a obtenção da medida da área da sua superfície.

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

A tarefa de livre escolha, tanto do objeto a ser medido quanto do modelo ou método a ser usado para o procedimento, é vista como uma prática democrática, no sentido de oferecer ao estudante a possibilidade de intervir no processo educacional, conforme sinaliza Skovsmose (2001, p.51-52) que

uma implicação do argumento pedagógico de democratização é que temos de desenvolver situações abertas no processo educacional, isto é, situações que possam tomar direções diferentes dependendo dos resultados da discussão entre estudantes e estudantes, e entre estudantes e professor. Abrir a situação significa criar possibilidades para decisões educacionais a serem tomadas em sala de aula. Os estudantes devem ter a possibilidade de moldar o processo educacional para que não se tornem adaptados a rituais inquestionáveis da educação matemática.

A intenção, com o presente exemplo, é mostrar como o método utilizado pelo aluno para o cálculo de área buscou, através de softwares e recursos como o papel milimetrado, a construção de uma sequência de procedimentos, na tentativa de obtenção do resultado proposto pela tarefa, na qual o estudante participou junto com o professor das escolhas e da modelagem da atividade e, sobretudo, da crítica a este processo de aprendizagem.

Para a execução da tarefa, o licenciando escolheu a imagem do mapa do perímetro do Bosque da Barra<sup>14</sup> como o local para calcular a sua área, conforme mostra a Figura 1. Primeiro, com a plataforma de mapas do Google (Google Maps), foi encontrado o local exato da área em questão no qual foi impresso o mapa, com sua devida escala.

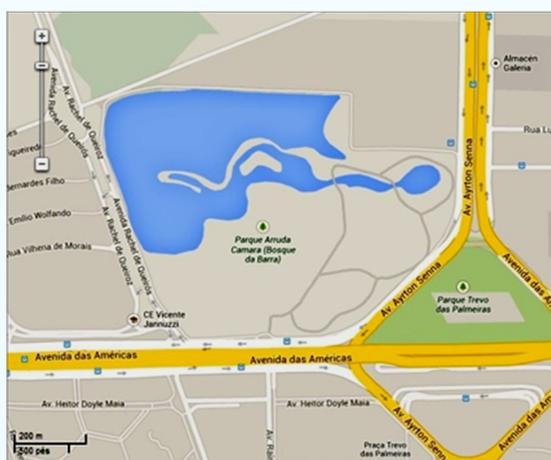


Figura 1 - Mapa do Bosque da Barra  
Fonte: Google Maps.

A partir daí, ao visualizar as limitações do local, a próxima etapa consistiu em transformar as fronteiras da localidade em funções “plotáveis” no Excel. Como seria possível fazer isso?

Em primeiro lugar, foi traçado em um papel A4 a fronteira da localidade, no caso o Bosque da Barra, com a mesma escala do mapa impresso. Como se percebeu que o formato

<sup>14</sup>O Bosque da Barra é um parque natural de entretenimento localizado no bairro da Barra da Tijuca, na Cidade do Rio de Janeiro.

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

da fronteira completa não poderia ser representado como uma única função  $f(x)$ , o desenho foi composto por duas áreas, A1 e A2, sendo o A2 dividido em 2 partes: (1) uma figura geométrica que se aproxima muito de um retângulo e (2) a área de A2 que não se percebe como um polígono, pois um de seus lados é curvilíneo. Esse procedimento de “escolha” e percepção do que poderia ser escrito na forma de função, no sentido de seccionar a figura, foi realizado pelo aluno.

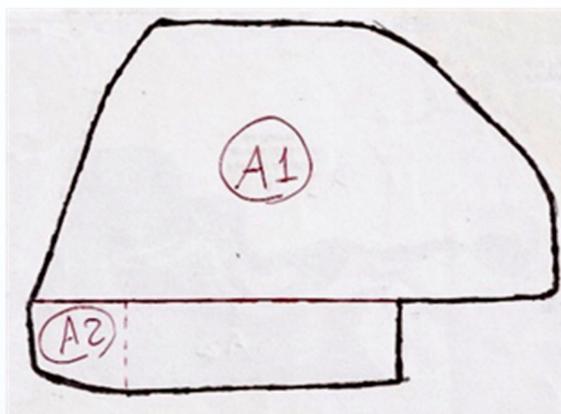


Figura 2 - Fronteira da localidade  
Fonte: imagem produzida pelos autores.

Pelo Excel, quando são marcados pontos cartesianos de uma curva, pode-se “plotar” gráficos de funções  $f(x)$  de acordo com os pontos descritos (VIANNA, 2012). Sendo assim, o aluno marcou a cada “meio centímetro” em papel milimetrado os pares ordenados da fronteira da localidade, começando pela área A1 (Figura 3). O Excel, além de se mostrar como uma importante ferramenta no processo ensino-aprendizagem, pode levar o aluno a uma análise e reflexão crítica (VIANNA, 2012).

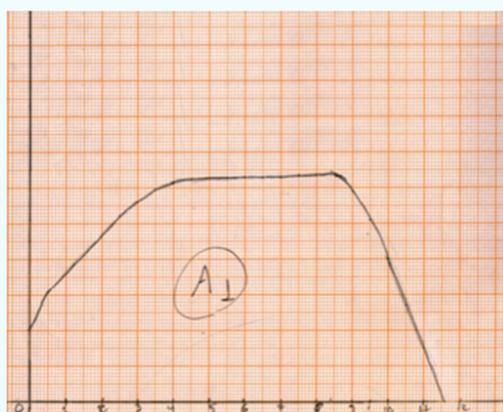


Figura 3 - Área A1 no papel milimetrado.  
Fonte: imagem produzida pelos autores.

Em seguida, os pares ordenados marcados no papel a cada 0,5 cm foram inseridos no EXCEL 2013 e criado um gráfico de Linhas Retas e Marcadores (Figura 4):

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

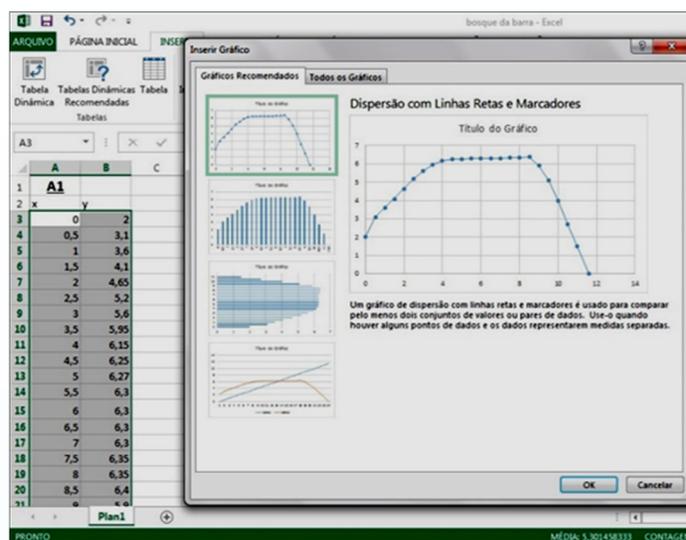


Figura 4 - Função A1 no Excel 2013.  
Fonte: imagem produzida pelos autores.

É importante salientar que essa técnica de inserção dos pares ordenados foi apresentada pelo professor quando ele questionou o graduando sobre como poderia ser “desenhada” a função. Depois, ao criar o gráfico, foi utilizado o recurso do Excel chamado “Linha de Tendência”. Nesse caso em particular, após várias tentativas com funções polinomiais de graus 2 até 5, o discente optou por uma função polinomial de grau 6, pois ficou bem ajustada à curva delineada pelos pontos marcados (Figura 5). O futuro professor constatou que quanto maior fosse o grau da função polinomial, mais a curva se ajustava aos pontos.

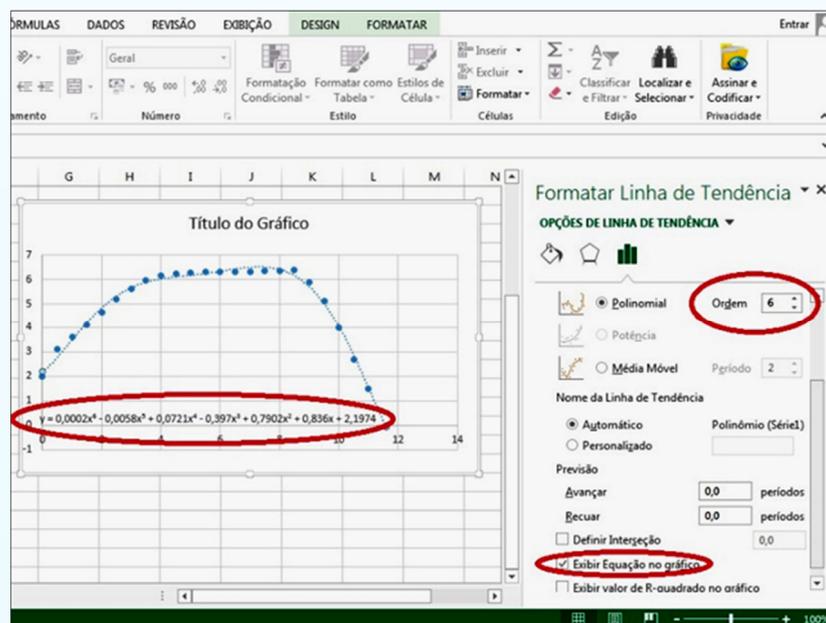


Figura 5 - Linha de Tendência no Excel 2013.  
Fonte: imagem produzida pelos autores.

Depois de escolher o tipo e o grau da função, é importante que seja marcada a opção de “Exibir equação no gráfico”, como mostra a Figura 5, para que a função seja expressa na imagem do gráfico.

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Os mesmos passos realizados para a superfície A1 foram feitos com a A2 e, assim, foram obtidas duas funções integráveis. Foi utilizado o *software Maple* para o cálculo das duas integrais definidas (Figura 6). A iniciativa do uso do *Maple* foi do licenciando, que considerou mais rápido e eficiente usar esse recurso do que fazer os cálculos manualmente ou mesmo com o auxílio da calculadora.

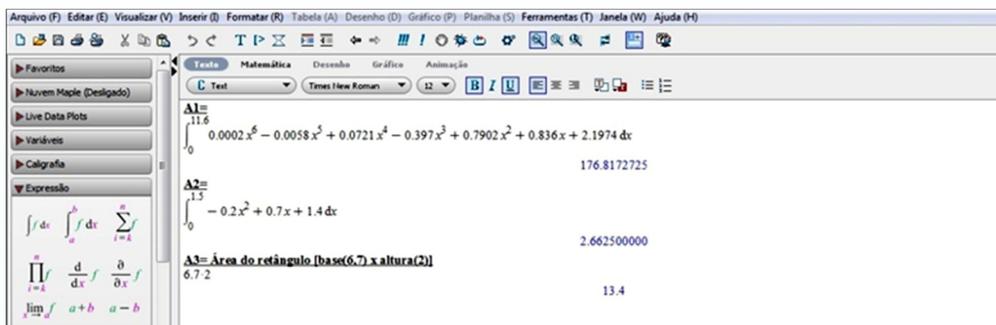


Figura 6 - Calculando as integrais no *Maple*.  
Fonte: imagem produzida pelos autores.

Com o resultado das integrais de todas as equações temos as áreas correspondentes. Basta, então, somá-las para a obtenção da área completa. É importante salientar a preservação da escala, visto que as medidas foram retiradas de um mapa digital.

### Refletindo sobre a proposição

Em todas as atividades, a livre escolha do “objeto” a ser medido partiu do aluno, assim como as estratégias (Tabela 2) que cada um utilizou para chegar ao resultado, embora alguns recursos ou métodos tenham sido apresentados pelo professor. Mesmo assim, a postura investigativa de ambos se estabeleceu como uma parceria na busca pela melhor maneira de resolver o problema, na medida em que as opções de resolução do problema e as variáveis eram observadas, discutidas e analisadas.

Outro aspecto observado foi o envolvimento do graduando, ao realizar e aplicar um conhecimento já estudado em uma atividade investigativa contextualizada com a realidade, o que deu mais significado ao que se aprendeu. Por outro lado, questiona-se: não seria interessante que uma atividade investigativa como essa fosse o ponto de partida para os estudos em integrais nas aulas de cálculo?

Percebe-se que abordagens comportamentalistas adotadas em aulas de cálculo, durante a licenciatura, privilegiam a teorização anterior à experiência prática, ou seja, à aplicação dos conceitos no mundo real. O que se propõe aqui é que seria mais interessante

**APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

e significativo aos estudantes, sobretudo aos licenciandos em matemática, poderem usufruir de práticas estudantis que promovam a investigação com uso de novas tecnologias, ou não, nas quais a experiência prática anteceda à exposição dos conceitos por parte do professor da disciplina de cálculo. Ao experimentar essa abordagem, o aluno da licenciatura poderá incluir e reproduzir essa forma de abordar o conteúdo, a partir da perspectiva de exploração e de investigação, em suas práticas docentes quando se tornar professor.

Cada recurso pode contribuir, diferentemente, nas descobertas e aprendizados dos estudantes. No Quadro 2 exemplificamos diferentes contribuições de cada recurso utilizado em nossa proposição.

Recurso	Contribuição no aprendizado
Google Maps ou Google Earth	Localização, visualização e medição da área de uma localidade (praça, parque, quarteirão, etc.) a ser medida, a partir das suas escalas
Papel comum	Construção de um esboço inicial para a visualização da forma da superfície a ser
Papel milimetrado	Posicionamento da figura em um plano cartesiano onde são marcados os pares ordenados
Software Excel	Construção das tabelas e gráficos a partir dos pares ordenados obtidos e modelagem das funções que melhor se ajustarem aos pontos do gráfico
Software Maple	Cálculo das integrais das áreas delimitadas pelas funções obtidas no Excel

Quadro 2 - Contribuições de cada recurso para o desenvolvimento da tabela proposta  
Fonte: elaborado pelos autores

Não se trata de negar a utilização de demonstrações e exposição de teoremas e conceitos matemáticos pelo professor universitário, mas, sim, propor introduzir os conceitos partindo de experimentações práticas nas quais o aluno participe, escolha e crie argumentos e estratégias, como no exemplo abordado neste artigo.

As tomadas de decisão acerca das escolhas feitas pelo aluno, durante a execução da atividade – recursos, métodos, aproximações, refletem a maturidade esperada não só em sua postura enquanto estudante participativo, mas, sobretudo, pela construção de atitudes cidadãos que se perpetuarão em sua vida profissional e extraprofissional enquanto sujeito crítico e transformador da sociedade.

Na era da informação não basta se informar. É necessário que os recursos oriundos das novas tecnologias fortaleçam e realcem a necessidade da participação e do envolvimento de todos (VIANNA, 2013) em um processo de (re)democratização do saber, seja escolar, seja oriundo da vida cotidiana. Para isso, as tecnologias digitais vêm contribuindo muito para outras possibilidades de ensinar e aprender (BAIRRAL, 2012).

É nesse sentido que a Educação Matemática vem contribuindo, tanto na formação do profissional, como no aprendizado e nas reflexões acerca da prática educativa. Para que

APROXIMANDO E CALCULANDO ÁREAS COM RECURSOS DIVERSOS:  
UMA PROPOSIÇÃO PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

---

essas contribuições promovam transformação, é necessário que os cursos de licenciatura em matemática comecem a repensar as suas práticas e atividades em todas as disciplinas, a fim de que a participação, a investigação e o senso crítico dos futuros professores sejam elementos, cada vez mais, efetivos nessa *práxis*.

### Referências

BAIRRAL, M. A. (Org.) **Pesquisa, ensino e inovação com tecnologias em educação matemática**: de calculadoras a ambientes virtuais. Seropédica: Edur, 2012.

MIZUKAMI, M. da G. **Ensino**: As Abordagens do Processo. E.P.U. São Paulo, 1986.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, nº 14, p. 66 a 91, 2000.

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

TARDIF, M. Os professores enquanto sujeitos do conhecimento: subjetividade, prática e saberes no magistério. In CANDAU, Vera Maria (org.). **Didática, currículo e saberes escolares**, Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

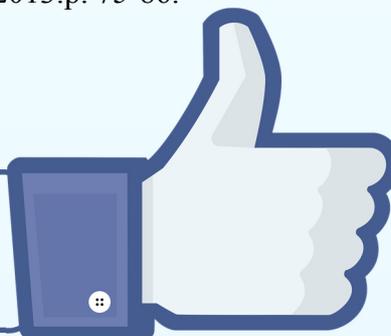
VIANNA, M. A. Salas de aulas híbridas: o movimento dialético no uso da matemática e da informática no cotidiano do ISTCC-RJ. In MOTA, F., CAMPOS, M. e GOLDSCHMIDT, R. (Orgs.) **A escola mandala: uma nova concepção para o ensino tecnológico na rede FAETEC**. Rio de Janeiro: Ed. Imprinta, 2006. p.95-101.

\_\_\_\_\_. A etnociência e as salas de aulas híbridas: a valorização do saber do aluno no encontro com as tecnologias da informação. In CAMPOS, M.; GOLDSCHMIDT, R. (Orgs.) **A Escola Mandala em Ação**. Rio de Janeiro: Ed. Imprinta, 2009. p.117-128.

\_\_\_\_\_. Modelando funções no EXCEL: a busca por padrões em situações cotidianas com licenciandos em matemática. In BAIRRAL, M. A. (Org.) **Pesquisa, ensino e inovação com tecnologias em educação matemática**: de calculadoras à ambientes virtuais. Seropédica: Edur, 2012, p.65-80.

\_\_\_\_\_. Educação Matemática das Massas: As Novas Tecnologias Como Instrumentos de Adequação? In. MORAES, M. A. e SILVA, W. **Formação de professores**: entre as novas tecnologias e a escola de massa. Seropédica: Edur, 2013.p. 75-86.

**Curta nossa página no  
Facebook!**



**Veja mais em [www.sbemrasil.org.br](http://www.sbemrasil.org.br)**