LOS LENGUAJES NATURAL Y SIMBÓLICO EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA SUPERIOR

THE NATURAL AND SYMBOLIC LANGUAGES IN THE TEACHING OF HIGHER MATHEMATICS

CRISTINA MERCEDES CAMOS [1]
MABEL ALICIA RODRÍGUE [2]

Resumen

Nos interesa estudiar el lenguaje natural y el simbólico utilizado en el contexto de la enseñanza de Matemática superior. En particular desarrollamos una conceptualización del lenguaje simbólico que nos permite presentar explicaciones a dificultades que manifiestan docentes de nivel superior y que describimos en este trabajo. Las mismas se originan ante dos tipos de tareas: explicar en lenguaje natural el significado de una propiedad o definición que se presenta escrita en símbolos, o expresar en símbolos un texto escrito en lenguaje natural. El trabajo se desarrolló con docentes asistentes a un Curso de Capacitación que coordinamos en la Universidad Nacional de Salta, sede Orán en 2013. Algunas de las dificultades y explicaciones nos permiten proponer claves para la formación docente, tanto inicial como continua.
Palabras clave*: lenguaje simbólico; Matemática superior; formación de profesores.*

Abstract

We are interested in studying the natural and symbolic language used in the context of teaching higher mathematics. In particular we develop a conceptualization of symbolic language that allows us to present explanations to difficulties that are present in higher-level teachers and we describe in this work. They originate at two types of tasks: explain, using natural language, the meaning of a definition or a property that is presented in symbols or express in symbols a written text presented in natural language. The work was developed with teachers attending a training course that we coordinate at the National University of Salta, Oran, in 2013. Some of the difficulties identified, allow us to propose explanations and establish certain keys for initial and continuing teacher education.
Keywords: *symbolic, natural and mathematical language; higher Mathematics; teacher training.*

1. Introduccion

Hace tiempo nos venimos preocupando por entender el modo en el que docentes de nivel superior utilizan el lenguaje simbólico y el natural cuando enseñan conceptos matemáticos. Ubicarnos en el nivel superior nos enfrenta a la enseñanza de propiedades

[1] Universidad Abierta Interamericana – Argentina - cristina.camos@uai.edu.ar
[2] Universidad Nacional de General Sarmiento – Argentina - mrodri@ungs.edu.ar

o conceptos complejos, muchos de los cuales no pueden vincularse con la cotidianidad, o con problemas de la vida real para cuya solución sea conveniente manejarlos. Esto hace que los lenguajes cobren un rol relevante, y pasen a ser casi exclusivamente las herramientas con las que los docentes deben manejarse para lograr que los estudiantes comprendan los conceptos y propiedades considerados.

Hemos estado observando docentes al enseñar conceptos como límite funcional, continuidad, tangencia, derivadas, etc. y nos encontramos con que suelen poner énfasis en ofrecer explicaciones orales y que en el pizarrón predominan los símbolos no siendo claro ni inmediato por qué dichos símbolos están representando lo expresado en lenguaje natural. También advertimos que muchas veces las explicaciones orales no focalizan en los conceptos, sino que se detienen en alguna parte de la definición o propiedad sin abordar *el todo.* Hemos visto frecuentemente errores en el uso de ambos lenguajes y en ningún caso registramos intencionalidad didáctica para enseñar el uso adecuado de los símbolos sino más bien se naturaliza una ilusión de transparencia, como si fuera inmediata la forma de simbolizar a partir de la explicación oral o viceversa: tomando una definición de un texto –por ejemplo– comprender su significado.

Nuestra llegada a docentes de nivel superior es a través de cursos de perfeccionamiento, en los cuales compartimos tiempo de trabajo conjunto, con posibilidades de producción de ellos e interacción. Es en ese ámbito en el que nos propusimos describir dificultades de los docentes en los usos de ambos lenguajes y proponer posibles explicaciones a las mismas. En particular, en este trabajo nos focalizamos en un Curso de Capacitación que hemos coordinado en la Universidad Nacional de Salta, sede Orán, en 2013.

Hemos hecho una revisión bibliográfica referida al lenguaje simbólico desde el campo de la Educación Matemática que incluimos en el marco teórico y a partir de lo hallado proponemos una conceptualización de *lenguaje simbólico* diferente a las existentes que nos permite entender los comportamientos observados en docentes y dar una nueva interpretación de los mismos.

El artículo se organiza del siguiente modo: presentamos el marco teórico y en él incluimos la conceptualización que proponemos sobre lenguaje simbólico luego de exponer una síntesis de la revisión bibliográfica referida al mismo; incluimos aspectos metodológicos y del trabajo de campo para finalmente describir los resultados obtenidos y ofrecer explicaciones a las dificultades de los docentes, a la luz de la teoría desarrollada. A modo de cierre del trabajo presentamos, en las conclusiones, una reflexión en torno a la formación de profesores, tanto inicial como continua.

2. Estado del arte y marco teórico

Comenzamos esta sección con una presentación breve del Estado del Arte, para luego delimitar el marco teórico que hemos utilizado en este trabajo.

2.1. Estado del Arte

Desde los campos de la Psicología y la Lingüística se ha contribuido al estudio del *lenguaje* en términos generales más allá de las particularidades relativas a la Matemática. En la síntesis que aquí realizamos iremos aproximándonos rápidamente a su uso en Educación Matemática. Cabe aclarar que intentamos mostrar algunos elementos e implicancias que hoy en día pueden entenderse cuando nos referimos a lenguajes en Matemática, sin pretensión de exhaustividad.

La Semiótica ha demostrado ser una teoría apropiada para estudiar las relaciones entre lenguaje y Matemática. Existen diferentes tradiciones teóricas en este campo dentro de las cuales podemos mencionar la de SAUSSURE (1995), PEIRCE (1978) y VIGOTSKY (1988). Los dos primeros autores se han dedicado a la Lingüística, y no específicamente a su vínculo con la Matemática, como sí lo ha hecho VIGOTSKY. Para este último autor, las interacciones sociales y los mecanismos de mediación cobran especial relevancia, constituyendo el lenguaje el medio de interacción por excelencia. Estudia dichas interacciones y analiza las funciones del lenguaje las que cumplen un papel relevante en el desarrollo de los procesos psicológicos superiores que incluyen la comprensión y la producción de símbolos.

VIGOTSKY (1988) expresa:

> (…) El niño comienza a percibir el mundo no sólo a través de sus ojos, sino también a través del lenguaje. En consecuencia, la inmediatez de la percepción "natural" queda substituida por un proceso mediato y complejo; como tal, el lenguaje se convierte en una parte esencial del desarrollo cognoscitivo del niño. (p. 59)

También en su obra diferencia el habla social del habla interior, citando que estas diferencias son sintácticas, fonéticas y semánticas. Este cambio funcional del habla es un ejemplo de cómo el sujeto se apropia de las herramientas sociales y las transforma en herramientas para pensar. Se pasa de un plano interpsicológico a un plano intrapsicológico. El habla interior aparece fuerte y contextualizada en el interior del pensamiento del sujeto, y se rige por el predominio del sentido (que se refiere al modo como se apropia de la palabra el sujeto) sobre el significado (que es lo compartido socialmente alcanzado por consenso). El sentido es un concepto complejo que se ordena alrededor de una palabra donde intervienen por ejemplo imágenes y evocaciones. Es además contextual y fluctuante. A su vez el significado es estable y ordena parte de los sentidos.

PIAGET (1967) afirma que el lenguaje puede constituirse en una condición necesaria pero no suficiente para perfeccionar las operaciones lógico–matemáticas. En su Teoría Psicogenética, los términos acomodación, equilibrio, desequilibrio, asimilación y aprendizaje entre otros tantos, cobran relevancia para explicar cómo en un proceso constructivo y por etapas evolutivas, el niño va internalizando el lenguaje y también razonamientos más sofisticados en particular en el terreno de la Matemática.

En 1969 este mismo autor introduce el término *función semiótica o simbólica* permitiendo representar un "significado" cualquiera (objeto, esquema conceptual, etc.) mediante un "significante" específico: lenguaje, imagen mental, etc. Mientras un lenguaje es aprendido por un sujeto, estas funciones semióticas se van acompañando por distintas conductas: la *imitación* en una primera instancia y la *evocación verbal* en último lugar, mediante la cual el sujeto utiliza verbalmente significantes para lo que él evoca del significado del objeto. Si bien PIAGET focalizó su estudio en niños pequeños nos preguntamos si el aprendizaje del lenguaje simbólico en sujetos de más edad no se dará de algún modo similar. Es decir, tal vez haya algún tipo de imitación en una primera instancia y de evocación verbal como conductas que acompañan al nacimiento del lenguaje simbólico. Dilucidar esto no fue objeto de la investigación que reportamos aquí, sin embargo es una cuestión que sería de interés abordar.

RADFORD (2006a) le suma a las tres tradiciones existentes respecto de la Semiótica su propia posición teórica en la que ubica al lenguaje en un lugar preciso, como indicamos a continuación. RADFORD (2006b) contrapone su teoría a las corrientes racionalistas e idealistas que conceptualizan el pensamiento. En su enfoque define al pensamiento como "una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (p. 107). El concepto de lenguaje para este autor es relevante como mediador del pensamiento. Esta mediación está constituida por *artefactos* término que incluye objetos, instrumentos, sistemas de signos y el lenguaje. De este modo, el lenguaje y estos otros mediadores son considerados por RADFORD (2000) como partes constitutivas del pensamiento. Así, él expresa:

> Al venirse a colocar entre el sujeto y el objeto, el lenguaje y otros medios culturales de significación hacen que el objeto sea percibido por el sujeto ya no como el objeto 'puro' sino como objeto transformado por la acción que ejercen inevitablemente los lentes que ofrece la cultura. (p. 8)

Su teoría de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática se inspira en las escuelas histórico-culturales y antropológicas del conocimiento donde el pensamiento no está solo semióticamente mediatizado sino que la praxis reflexiva cobra un sentido relevante. Es decir, para este autor si bien el concepto de lenguaje es importante como dijimos anteriormente, la *actividad* del sujeto también. RADFORD (2004), afirma que toda actividad está orientada por un motivo y que el motivo no se le presenta al individuo directamente. Por ejemplo, en el aprendizaje de conceptos matemáticos éstos están cargados de una significación cultural la que mediatiza la actividad en un *primer estrato* de la mediación semiótica. A su vez los objetos, signos, lenguaje, etc. son los medios para alcanzar el objetivo de aprender una noción, su valor no reside en volver la actividad más sencilla sino que estos elementos se conciben como partes de la misma y configuran un *segundo estrato* de la mediación semiótica. De esta forma, su posición teórica tiene rasgos diferenciados del constructivismo y de la psicología cognitiva en las cuales estos elementos se conciben como instrumentos externos que ayudan a ampliar las estructuras cognitivas del sujeto.

El término "función semiótica" introducido por PIAGET en 1969 es tomado ya en el campo de la Educación Matemática por GODINO Y BATANERO (1998) explicitando que esta noción pone en juego tres componentes: un *plano de expresión* (objeto inicial, el signo); un *plano de contenido* (objeto final, significado del signo) y un *criterio o regla de correspondencia*. En GODINO (2002) se desarrolla la Teoría de las Funciones Semióticas en la cual las entidades matemáticas que intervienen son consideradas desde facetas o dimensiones duales según el juego de lenguaje en el cual participan. Esta teoría es parte de otra más general de Educación Matemática, desarrollada por GODINO Y BATANERO (1994), denominada Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemática. Dentro de ella se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas y se desarrolla una ontología basada en entidades primarias y facetas duales de la cognición matemática. Al respecto, GODINO (2002) menciona:

> En la descripción de la actividad matemática nos referimos a muchos y diversos “objetos”, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos. No parece posible encontrar una relación exhaustiva de tales objetos, ni proponer una clasificación única válida para cualquier propósito (…). En nuestro caso proponemos las siguientes categorías o tipos de entidades matemáticas, basándonos en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones. (pp.5-6)

Considerar una entidad como primaria es una cuestión relativa, ya que son entidades funcionales que tienen un carácter recursivo y como ya mencionamos anteriormente son relativas a los juegos de lenguaje en los que pueden participar. En el trabajo recién mencionado GODINO (2002) indica para la categoría de lenguaje tanto los objetos que incluye como sus funciones específicas:

> (1) *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos. (p. 6)

Cabe resaltar que en 2009 GODINO, BATANERO Y FONT denominan *elementos lingüísticos* a lo que en 2002 GODINO denominó *lenguaje*.
D’AMORE (2004) al referirse a la lectura que realizan los alumnos y a la ausencia de claves para realizar la misma, afirma que los estudiantes dan “sentido” al mensaje creando diferentes tipos de informaciones que en algunos casos el autor denomina *informaciones parásitas* cuando están lejanas de la intención comunicativa que tenía el autor. Entonces afirma que una representación semiótica constituye un significante diferente según sea el significado del que es significante y que en sí misma la representación semiótica no es un mensaje.

Este mismo autor en el 2006 expresa que existen distintos modos de entender la palabra lenguaje los que abarcan desde entenderlo como un idioma, como formas distintas de producir discursos en una lengua (narración, conversación, explicación, etc.), y también como una función comunicacional entre individuos de la misma especie, por ejemplo.

DUVAL (1993) ha estudiado las representaciones semióticas de objetos matemáticos y los registros de representación. En este trabajo consideramos la noción de *conversión de representaciones entre registros*, en particular entre el simbólico y el verbal, para trabajar con lenguajes. Asimismo, el concepto de *decodificación* que desarrolla será utilizado en la siguiente sección. DUVAL (2006) estudia los vínculos entre el pensamiento matemático, el lenguaje y los sistemas de representación semióticos y también le interesa indagar si el pensamiento en Matemática funciona de la misma manera que en otros dominios del conocimiento. Él considera importante estudiar los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático en los cuales la actividad matemática desarrollada necesariamente se da en un contexto de representación que es semiótica.

Incorporar el uso, convertir y articular representaciones de objetos matemáticos en distintos registros de representación, provoca dificultades y compartimos con D´AMORE (2006) que la elección por parte del docente de los registros de representación que utilizará en la clase "no es neutra". Los objetos matemáticos aparecen en diversos "contextos de representación" y según DUVAL (2006) los estudiantes deberían ser capaces de reconocer un mismo objeto matemático que pertenece a un determinado contexto de representación en otros contextos y además poder utilizarlos. Estos contextos de representación son necesariamente semióticos.

Como hemos mencionado, GODINO (2002) comenzó considerando que el *lenguaje* está dado por términos, expresiones, notaciones, etc. y podría ser específico matemático u ordinario. Él mismo, junto con BATANERO Y FONT, siete años más tarde debilitaron esa noción y en lugar de sostener que lo recién descripto es el *lenguaje* lo denominaron *elementos lingüísticos*. Desde nuestra perspectiva, y ya aproximándonos a nuestra conceptualización, esta última nomenclatura es más apropiada dado que concebimos al lenguaje más allá de los símbolos. En este sentido compartimos con D'AMORE (2006) en resaltar la función comunicacional del lenguaje y con RADFORD (2000) coincidimos en el lugar que le otorga al lenguaje no como un instrumento externo que se toma y utiliza sino inmerso en la actividad que el sujeto desarrolla a propósito de un motivo, el aprendizaje de alguna idea matemática en la cultura en la que se esté. Tomando estos elementos, entendemos que podemos proponer una conceptualización de lenguaje simbólico que resulte operativa para entender y explicar dificultades para lograr la comprensión de enunciados matemáticos presentados en símbolos.

2.2. Marco Teórico

A partir de aquí presentamos el marco teórico de este trabajo. El mismo está compuesto por los elementos mencionados de DUVAL (2006) y una conceptualización propia de *lenguaje simbólico* o *lenguaje matemático* que se diferencia de las mencionadas en el Estado del Arte y que entendemos pone de manifiesto rasgos que consideramos clave para realizar el estudio.

2.2.1. Nuestra conceptualización de *lenguaje simbólico*

Comenzamos resaltando que, como todo lenguaje, éste se crea y utiliza en algún *contexto comunicacional* en el cual hay partes que tienen la intención de comunicar algún mensaje o de apropiarse del mismo para comprender su significado. Es decir, el contexto comunicacional está constituido por *partes* y por un *mensaje matemático* a ser compartido. Esas partes pueden ser sujetos (docente-alumno, docente-grupo de alumnos, alumno-alumno, etc.) o un sujeto y un texto, por ejemplo. El mensaje matemático puede ser una definición, una propiedad, un procedimiento, una idea, etc. y alguna de las partes puede querer transmitirlo y la otra apropiárselo, o bien puede ser que se discuta sobre ese mensaje para comprenderlo, cuestionarlo, etc.

A su vez, con la intención de comunicar ideas, la comunidad matemática crea sus propios símbolos matemáticos, denominados *significantes*, a los cuales les asocia, en dicha creación, *significados* compartidos y consensuados por dicha comunidad relativos al mensaje a transmitir. Dichos significados pueden ser expresados utilizando simbología previamente definida o bien utilizando la *lengua materna* (el español en nuestro caso). El diccionario de la Real Academia Española define la *lengua* como el sistema de comunicación verbal propia de una comunidad humana y la *lengua materna*, en particular, como aquella que se habla en un país, respecto de los sujetos nativos de él. Para nuestro trabajo la llamamos el *lenguaje natural*. De este modo, concebimos el *lenguaje simbólico o matemático como una colección de significantes con sus significados aceptados por la comunidad académica para cada contexto comunicacional en el que sean considerados.* De este modo, *utilizar el lenguaje simbólico* implica conocer y utilizar adecuadamente los significantes matemáticos con el significado matemáticamente aceptado en el contexto comunicacional correspondiente. Este significado puede expresarse en lenguaje natural. Es decir que el uso del lenguaje simbólico conlleva el uso del lenguaje natural.

Presentamos un primer ejemplo en el que se pone de manifiesto la necesidad de incluir en la definición el contexto comunicacional.

Ejemplo 1: el significante f^{-1} podría tener distintos significados asociados.

- Un significado es *función inversa* si estuviéramos en un contexto comunicacional que conlleva un mensaje en el que se sabe que f biyectiva
- *imagen inversa*, si estuviéramos en un contexto en el que estamos describiendo valores del dominio cuyas imágenes pertenecen a un cierto conjunto A y el símbolo fuera $f^{-1}(A)$
- si el contexto comunicacional incluye el dato que f es biyectiva f^{-1} podría estar representando la *imagen inversa de esa función biyectiva*, y solo se podría saber a qué significado se refiere comprendiendo el tipo de mensaje que está inmerso en el contexto en el que este significante es utilizado.
- el *inverso multiplicativo* de f, etc.

Del mismo modo, con el significante (1,2) podría hacer referencia, según el contexto, a:

- *un intervalo real*, si el contexto comunicacional fuera por ejemplo de resolución de inecuaciones reales
- *un par ordenado del plano*, si el contexto fuera por ejemplo de intersección de curvas
- *un vector*, si se trabajara con un contexto sobre direcciones de móviles, por ejemplo
- *un número complejo*, etc.

Esto pone de manifiesto que no tiene sentido pensar en la asignación de significados a los significantes sin considerar siempre el contexto comunicacional en el que ha sido utilizado y, en particular el mensaje que se desea comunicar, para lo cual ha sido utilizado dicho símbolo.

Los siguientes ejemplos muestran distintas posibilidades de uso incorrecto del lenguaje.

Ejemplo 1: Un sujeto asigna un significado incorrecto a los significantes en un contexto apropiado

Podría verse en contextos de trabajo algebraico básico, con los clásicos errores que encontramos cuando se opera $x.x$ poniendo como resultado $2x$, en vez de x^2.

Ejemplo 2: un sujeto asigna el significado correcto pero si estuviera trabajando en otro contexto.

Supongamos que un sujeto debe graficar la función lineal que contiene a los puntos (1,3) y (5,3), realiza las cuentas correctamente, llega a que la ecuación es y = 3 y al momento de graficar, grafica un punto de la recta real, en lugar de una recta horizontal de ordenada al origen 3. Si pensamos en “y = 3” como un significante y planteamos posibles significados asociados a él para distintos contextos, advertiríamos que esa asignación de significados sería correcta si el contexto fuera R, mientras que siendo R^2 no lo es.

El hecho de incluir en la definición el contexto comunicacional nos hace enfatizar el interés, desde nuestra perspectiva inherente al uso de los lenguajes, que es: la intención de querer comunicarle a otro el mensaje matemático: alguna idea, concepto, resultado, etc. Es decir el uso adecuado del lenguaje simbólico nos obliga a entender que hay un *mensaje* que una de las partes está tratando de transmitirle a la otra parte o que está tratando de compartir. Esto es un detalle relevante para nuestro trabajo pues nos aleja de una *lectura ingenua* de los símbolos. Esta lectura ingenua podría darse cuando el receptor no comprende que su interlocutor le está tratando de transmitir un mensaje, para lo cual decidió utilizar significantes con sus significados en el contexto dado. De darse esta situación, podría ocurrir que el receptor considere que “ser capaz de leer los símbolos, utilizando los nombres apropiados, es suficiente y muestra dominio del lenguaje simbólico”.

<u>Ejemplo 3:</u> Si se plantea la siguiente propiedad “$\forall c \in R, \exists n \in N / n > c$” el emisor debería querer que quien utilice el lenguaje simbólico advierta que el *mensaje* que ésta conlleva es que “los números naturales no son acotados”. No podría conformarse con un receptor que exprese que dicha propiedad dice “*para todo ce que pertenece a los números reales, existe ene que pertenece a los números naturales tal que ene es mayor que ce*”. Afirmamos que no deberíamos conformarnos con esto pues esta “lectura” sólo pone de manifiesto que el lector conoce el *nombre de los significantes*, pero aún no ha podido expresar o percibir el mensaje que esa expresión está queriendo transmitir. Retomaremos en particular esta proposición en el trabajo de campo.

En DUVAL (2007) queda explícito que la palabra *conversión* es un proceso no reversible, sin normas para realizarlo y que respeta la complejidad cognitiva en función de la naturaleza de los dos registros de representación involucrados. Aclara además que la palabra *codificación* y *traducción* o *decodificación* son inapropiadas para mencionar la conversión. Menciona que existen casos en los cuales una regla de codificación permite decodificar. Las reglas de codificación se limitan a una comprensión local. Es adoptando esta posición que nosotros concebimos la *decodificación* como la mención del nombre de cada símbolo, uno a uno, sin poner en juego ni el significado ni tampoco la intención de recuperar el mensaje en su contexto.

Desde nuestra perspectiva hay dos planos extremos: el de la decodificación que se da a un nivel absolutamente *local*, y el plano *global* en el cual debería recuperarse el mensaje que ha sido expresado a través de los significantes en su contexto.

Para cerrar esta sección queremos también considerar los conceptos de *asignar y extraer significado* presentados por FUSARO PINTO Y TALL (1999) al estudiar la manera en que los alumnos construyen teoría matemática. Su conceptualización enfatiza cómo opera un sujeto, en función de lo que tiene en mente, cuando trabaja con un concepto. Si apela a la imagen conceptual (para detalles de este concepto y del de definición conceptual ver el trabajo de los mismos autores recién mencionados) que tenga construida de una noción (correcta o no, completa o no), y a partir de ella construye una definición, está *asignando significados*. Distinto es el caso en el que el sujeto parte de la definición conceptual de la noción. En este caso, *extrae significado* cuando intenta comprender cuestiones relativas a ella partiendo de una definición matemáticamente correcta. Entendemos que en es clave conocer las imágenes conceptuales de los sujetos para entender la extracción se significado. En este trabajo, en la sección de conclusiones, hacemos una interpretación del uso de los lenguajes, con nuestra conceptualización, estableciendo un vínculo con las posibles imágenes conceptuales que particularmente los sujetos de este estudio, por ser docentes, pueden haber construido.

3. Metodología

La investigación es de corte cualitativa y el modo en el que recabamos datos fue a través de producciones escritas, como detallamos en breve. La recogida de datos la realizamos con docentes asistentes a un Curso de Capacitación que se dictó en la Universidad Nacional de Salta, sede Orán en 2013. El mismo se enmarcó en un curso de posgrado, de 40 horas de duración, de las cuales 20 fueron presenciales y 20 no presenciales. Hubo 20asistentes, mayoritariamente docentes de nivel superior.

El tipo de producción solicitada a los docentes fue de dos tipos:

- Tipo A: presentamos un mensaje matemático en símbolos y solicitamos a los docentes que expresaran por escrito, en lenguaje natural, el significado del mismo

- Tipo B: presentamos un mensaje matemático en lengua natural y solicitamos a los docentes que lo expresen en símbolos.

Esto se concretó en tareas presentadas a los asistentes que debían resolverse durante el Curso y en las cuales promovimos el trabajo en grupo. Esta decisión se fundamenta en que, al interactuar con pares, esperábamos una producción más pulida. Asimismo luego de cada tarea incentivamos la reflexión sobre la misma siendo nuestras intervenciones guiadas por el interés en que los asistentes adviertan por su cuenta las dificultades o fortalezas surgidas del trabajo realizado.

Las tareas que presentamos fueron:

Tarea 1, tipo A (T1-A):

Explicar qué significa el enunciado de la siguiente propiedad. Expresarlo por escrito, en palabras.

Propiedad: $a, b \in \mathrm{R}$, $a = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \lvert a - b \rvert < \varepsilon$

Tarea 2, tipo B (T2-B):

Recordar el concepto de límite funcional (considerar sólo el caso en el que el límite es finito y la variable tiende a un valor real)

- expresar el concepto en lengua natural, por escrito

- escribir en símbolos la definición

- explicar cómo los símbolos expresan el concepto enunciado en lengua natural

La siguiente tarea la presentamos luego de haber trabajado con un problema, en un contexto extra-matemático al que le subyace la siguiente situación matemática: entre los rectángulos de perímetro 40 m, identificar el de mayor área. Los asistentes plantearon una función cuadrática y conociendo sus características, saben que el área máxima de 100 m^2 se alcanza en el cuadrado de lado 10 m. En ese momento planteamos la siguiente tarea.

Tarea 3, tipo B (T3-B)

Expresar simbólicamente que 100 es el valor máximo que las áreas de los rectángulos considerados pueden alcanzar. tipo B (T4-B)

Tarea 4,

Recordar el concepto de recta tangente a una gráfica de una función en un punto

- expresar el concepto en lengua natural. Nos interesa que expresen qué significa el concepto y no que únicamente plasmen una definición simbólica

- escribir en símbolos el concepto mencionado

Tarea 5, tipo B (T5-B)

Expresar simbólicamente la siguiente propiedad

Propiedad: El conjunto de los números naturales es no acotado

Tarea 6, tipo A (T6-A)

- *Explicar en lenguaje natural qué expresa la siguiente propiedad.*
- *Explicar la demostración para lo que les pedimos que: identifiquen "el plan" del autor, cómo decide demostrar y luego explicar cada paso.*

> **Propiedad:** $\sqrt{2} \in \mathrm{I}$
>
> Dem. Supongamos que $\sqrt{2} = p/q$ para p, q naturales co-primos
>
> Entonces $2 = p^2/q^2$. Luego
>
> $2.q^2 = p^2$ de donde p^2 es par por lo que p es par. Así, $p = 2.n$ ($n \in \mathrm{N}$), por lo que $2.q^2 = (2n)^2 \Rightarrow 2.q^2 = 4n^2$
>
> $q^2 = 2n^2$ de donde q es par. Absurdo.◊

Durante el Curso, los asistentes se mostraron muy proclives a realizar las tareas, discutir sobre las respuestas y reflexionar sobre las dificultades observadas. En todo momento trabajaron en grupos, de modo que nosotros contamos en todos los casos con producciones grupales, no individuales.

En la siguiente sección mencionamos algunas de las respuestas a las tareas que consideramos más relevantes, analizadas a la luz de la conceptualización de lenguaje que presentamos.

4. Resultados

En la tarea T1-A los equipos respondieron lo siguiente:

1. El módulo de cero es menor que un número mayor que cero
2. Si dos números son iguales, su distancia es menor que cualquier número positivo por más pequeño que sea
3. Si la distancia entre dos números es menor que cualquier número positivo es porque los dos números son iguales
4. Dos números son iguales si y sólo si el módulo de su diferencia es menor que todo número positivo

5. Si existe un número muy pero muy pequeño y la distancia entre dos números es menor que ese número pequeño es porque son iguales
6. Se quiere explicar la existencia de inverso aditivo
7. Dos números son iguales es lo mismo que decir que su distancia es menor que un número muy pequeño (positivo)

Lo que encontramos en estas respuestas es que hubo un intento de comprender el mensaje matemático de la propiedad alejándose las respuestas de una decodificación o lectura ingenua. La respuesta que más se parece a una decodificación, y que nos haría dudar de la comprensión de la propiedad, es la 7 pues en ella la única parte cuyo significado fue asociado localmente fue al referirse a "su distancia". Es decir los sujetos asocian a los significantes $|a - b|$ el significado, en este contexto de la distancia entre los números a y b. Esto es correcto, aunque resaltamos que esa asociación queda en un plano local. No tenemos certeza de que hayan recuperado el significado de la proposición si no abordan el significado del mensaje completo y las dudas se deben a que, excepto lo mencionado sobre la distancia, el resto de la lectura se asemeja a una decodificación.

Asimismo se observa en las respuestas 2, 5 y 7 la aparición de "lo pequeño", significado que no se extrae de ninguno de los significantes presentes. Cuando indagamos qué parte de los símbolos refieren a números muy pequeños, solo hubo alusión a que en el concepto de límite los símbolos "$\forall \varepsilon > 0$" se asocian con "valores pequeños". Al discutir si valdría o no tomar valores muy grandes para épsilon, concluyen que sí, no pudiendo explicar de otro modo esas referencias a lo pequeño.

Las respuestas 2 y 3 refieren únicamente a una de las implicaciones de la equivalencia presentada. Sin embargo, al preguntarles, los asistentes reconocen que la proposición presenta una equivalencia, pero a la hora de expresarla en lenguaje natural no encontraron modo de comunicarlo.

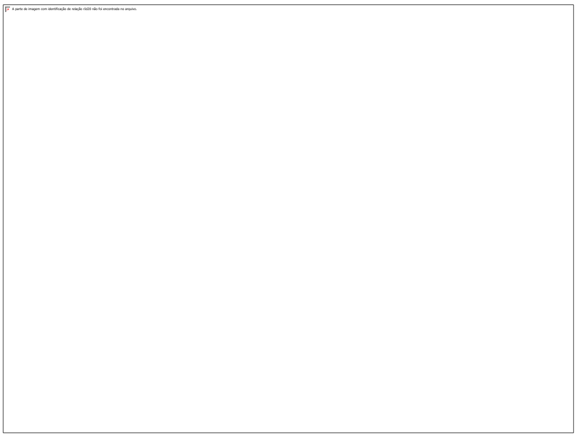
En la respuesta 6 no encontramos significados asociados a los símbolos, ni siquiera en otros contextos comunicacionales. En la respuesta 1 podría pensarse que el sujeto sólo consideró localmente "$\forall \varepsilon > 0$" y la asignación de significados realizada es "un número mayor que cero".

Las respuestas a la tarea T2-B, los equipos respondieron que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ representa:

1. El valor al que tiende la función en un entorno reducido del punto “*a*” (*en vez de decir en un entorno reducido, otros equipos aportaron en las cercanías, en una vecindad y en los alrededores*)
2. Cuando *x* toma valores próximos a *a*, la función toma valores próximos a *L*
3. Es el valor numérico de una función en las proximidades de un punto (*o bien acotaron “cerca” del punto*)
4. *L* es el valor al que se aproxima la función sin llegar a él, cuando *x* se aproxima a *a*, sin llegar a ella
5. El límite de una función *f*(*x*) es igual a *L* si el valor de la función se acerca a *L* cuando *x* se acerca a *a*
6. El límite evalúa una función en un entorno reducido del punto
7. El límite de una función en un punto *a* es *L* cuando la distancia entre *L* y *f*(*x*) es menor que cualquier número positivo para cualquier *x* que pertenezca al entorno reducido de *a*
8. La función toma el valor *L*
9. La función es igual a *L*
10. Para todo *x* que pertenezca a un entorno reducido de *a*, la función en el punto *x* se aproxima a *L*.

Al momento de dar la definición, solo dos equipos la presentaron, el segundo de los cuales escribió el último renglón que se ve en la Imagen 1.

Imagen 1: Definición de límite funcional, en símbolos.



La definición fue escrita en tres momentos:

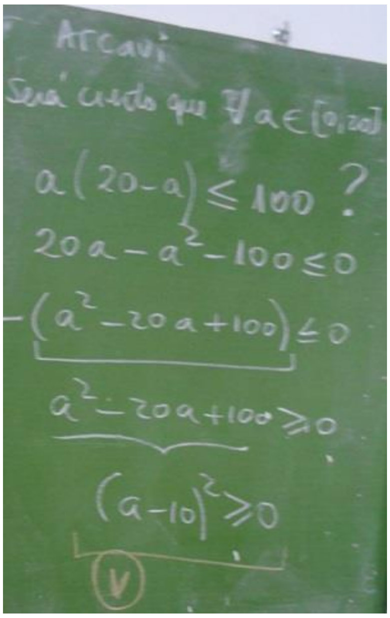
a) Desde "$\lim_{x \to a} f(x) = L$” hasta el primer módulo menor que épsilon

b) Otro equipo completó lo anterior, el presentar la función y decir dónde está definida
c) Por último otro equipo agregó el último renglón intentando aclarar o sumar una interpretación al renglón anterior

Entre las respuestas que presentaron los asistentes al Curso nos encontramos que la mayoría de ellas (excepto la 8 y la 9) expresan en lenguaje natural cuestiones que no se expresan en símbolos y que ellos mismos no pueden asociar. Simplemente dicen que tiene que ver con el modo de enseñar el concepto. Lo interesante aquí es que plasmaron correctamente en símbolos la definición, luego de pedirles que presenten la función y que digan condiciones sobre el punto *a*, previo a definir el concepto. Lo notable fue que al pedirles que vinculen los símbolos con las definiciones dadas en lenguaje natural poco pudieron hacer y reconocieron que una cosa es el concepto que tienen en mente, la idea intuitiva y otra es la definición simbólica a partir de la cual no son capaces de obtener sus propias definiciones coloquiales o incluso explicaciones. El "estar cerca" no fue asociado con símbolos, como sí lo fue "entorno reducido". Ocurre que, nuevamente, la asignación de significado circunscripta a las expresiones con módulo deja al sujeto lejos de comprender el concepto de límite encontrando que no logran mirar "el todo", el mensaje completo. Las respuestas 8 y 9 no las asociaron con la definición y luego de solicitarles que expresen en símbolos lo escrito en esas frases, expresaron $f(a) = L$ reconociendo que ni siquiera en las expresiones dice que la función toma el valor L cuando la variable independiente vale a, lo que tal vez les hubiese hecho pensar en algo erróneo, dado que expresan que no necesariamente la función debe estar definida en el punto para que en él exista límite.

La tarea T3-B no logró realizarla ningún grupo. Los asistentes sostuvieron que sabían la respuesta, argumentaron el porqué sin poder plasmar en símbolos lo pedido. Lo resolvimos en el pizarrón como indica la Imagen 2.

Imagen 2: Uso de símbolos para representar una conjetura sobre áreas de rectángulos.



La tarea había comenzado previamente, el valor a se usó para representar el largo de uno de los lados del rectángulo y, sabiendo que el perímetro es de 40 m, la longitud del otro lado debía ser $20 - a$. Los asistentes habían planteado que se debía maximizar la función f: $[0,20] \rightarrow$ R, f(a) = $a.(20 - a)$. Reconocieron que se trata de una cuadrática de ceros $a = 0$ y $a = 20$ y de allí concluyeron que en $a = 10$ debía alcanzarse el máximo.

El planteo que plasma exactamente la conjetura, imaginando un estudiante que desconoce las funciones cuadráticas, sus propiedades, o derivadas, etc., es el que presentamos en la imagen y permitiría hallar la solución sin necesidad de disponer de los conocimientos mencionados, solo cuestiones de álgebra básica.

Lo que aquí cabe resaltar es que, en símbolos, el planteo exige analizar la validez de la proposición "$\forall a \in [0,20], a.(20 - a) \leq 100$" y no solo plantear "$a.(20 - a) \leq 100$" y resolverla como una inecuación. Hicimos hincapié en esto y en la equivalencia entre:

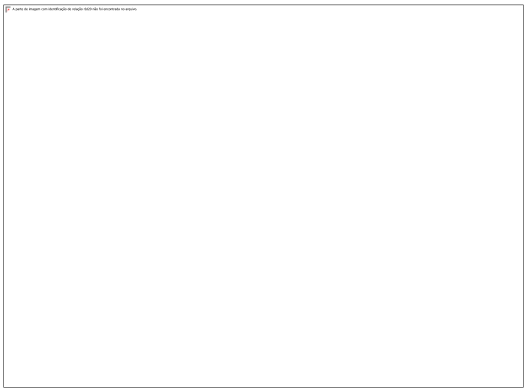
- preguntarse si es válido $a.(20 - a) \leq 100$ *para todo* $a \in [0,20]$
- preguntarse si es válido $20a - a^2 - 100 \leq 0$ *para todo* $a \in [0,20]$
- preguntarse si es válido $-(a^2 - 20a + 100) \leq 0$ *para todo* $a \in [0,20]$
- preguntarse si es válido $a^2 - 20a + 100 \geq 0$ *para todo* $a \in [0,20]$
- preguntarse si es válido $(a - 10)^2 \geq 0$ *para todo* $a \in [0,20]$

Llegado este punto, no solo discutimos sobre el hecho que, saber que la última proposición es verdadera, y siendo todas equivalentes, hace que la primera lo sea, sino que lo que este último mensaje simbólico nos permite concluir, además, es un significado que puede asociarse a estos significantes en el contexto en el que estamos es que el máximo valor posible se alcanza cuando el cuadrado del binomio vale lo menos posible, que es 0, valor que se alcanza cuando $a = 10$. De este modo se podría obtener la solución del problema y saber que es única.

En esta tarea se ve la necesidad de comprender el planteo simbólico, a partir de un enunciado claro en lenguaje natural y viceversa: teniendo un mensaje en símbolos, la necesidad de comprender lo que esos símbolos están significando, no solo localmente, sino globalmente.

En la tarea T4-B, sobre tangencia, los equipos tuvieron la necesidad de utilizar gráficos para intentar explicar el concepto. Son los que se ven en la Imagen 3.

Imagen 3: Representaciones gráficas sobre rectas tangentes utilizadas como apoyo para explicar el concepto.



En lengua natural, expresaron el concepto como:

1. recta que corta a la gráfica en un único punto
2. recta que toca a la gráfica en un único punto

Al momento de tener que expresar en lenguaje simbólico el concepto reconocieron que no sabían cómo hacerlo para sus ideas expresadas en 1 y 2, pero que conocían la definición que apela a derivadas y la expresaron correctamente, diciendo que si f: $(a,b) \rightarrow$ R, con f derivable en $x_0 \in (a,b)$, la recta tangente al gráfico en el punto de abscisa x_0 es: $y = f(x_0) + f\,'(x_0).(x - x_0)$. Sin embargo, advirtieron que no se lee de estos símbolos lo que ellos propusieron. Rápidamente reconocieron que no es necesario que la recta y la curva sólo se corten en un punto y llegamos a que una mejor descripción del concepto de tangencia podría darse, en lenguaje natural, expresando que "*la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es la que mejor aproxima a esa función en los alrededores del punto*". Sin embargo, cuando retomamos la consigna de representar con símbolos este concepto recién expresado a partir de esta descripción, el desconcierto fue aún mayor pues no podían desligarse de la noción de derivada. En ese momento trabajamos junto con los asistentes para presentarles y que comprendan el modo de simbolizar esa idea (el desarrollo, que es extenso para incluirlo aquí, puede verse en detalle en RODRÍGUEZ, POCHULU Y CECCARINI, 2011).

En este caso, nuevamente se pone de manifiesto que no es una práctica usual la de intentar comprender el mensaje de los símbolos y, recíprocamente, que dado un mensaje claro, no es evidente cómo representarlo en símbolos.

Las respuestas presentadas por los equipos a la tarea T5-B fueron las siguientes.

1. $\forall n \in N, n+1 \in N$
2. $\forall a \in N, \forall b \in N \wedge a > b \vee a > b$
3. $\forall a \in N, \exists b \in N / b > a$
4. $\forall a \in N, \exists b \neq 0 \; y \; \exists c = 0 / b > a \; y \; c < a$
5. $\forall n \in N, \exists k \in N / n < k$
6. $\nexists k \in R / \forall x \in N : x \leq k$

Habiendo expresado esto en el pizarrón, le solicitamos a cada equipo que, olvidándose del enunciado en lengua natural, intentaran explicar con palabras el mensaje que encierran los símbolos que presentaron. De este modo intentamos que los asistentes advirtieran si el mensaje recuperado era o no el dado inicialmente en la consigna.

Nuevamente fue evidente que la asignación de significados no recupera el mensaje original, excepto el último.

En algunos casos, como el primero, al asignar significados a los símbolos expresaron que "dado cualquier número natural, su siguiente también es un número natural", advirtiendo la distancia entre esto y la propiedad inicialmente dada.

Sobre la tarea T6-A no incluimos detalles aquí pues solo pudimos obtener una única producción del conjunto de los asistentes guiando el debate con preguntas, pedidos de explicaciones, etc.

Los resultados del trabajo de campo muestran serias dificultades en los asistentes para utilizar ambos lenguajes de un modo articulado. En la siguiente sección, identificamos las dificultades que consideramos son más relevantes y discutimos algunos puntos que consideramos clave para la formación de profesores, tanto inicial como continua.

5. Conclusiones

En términos de nuestra conceptualización de lenguaje simbólico, presentada en el marco teórico, podemos expresar algunos obstáculos que encontramos y que retomamos en este cierre. Una de las dificultades que identificamos ante la necesidad de comprender un mensaje presentado en símbolos es *trascender lo local*. Las partes que constituyen un mensaje (sea definición, propiedad, demostración, etc.) son importantes y el sujeto debe poder asignarle su significado correcto pero sin perder de vista que esto no es suficiente, que debe entender el todo. El caso extremo en el que se podría manifestar esta dificultad se da cuando el sujeto solo decodifica, asignando significados únicamente símbolo a símbolo, perdiendo de vista la globalidad y muchas veces también el contexto comunicacional. Esto es más común verlo en estudiantes que en docentes. El riesgo que se corre es que el sujeto considere que poder mencionar los nombres de los símbolos es suficiente indicador de comprensión del mensaje.

Una segunda dificultad que identificamos, vinculada tanto a comprender el significado de un mensaje dado en símbolos como la situación inversa, y que entendemos que podría ser más frecuente que se dé en docentes, es el hecho de *reconocer y delimitar el contexto del mensaje y utilizar palabras o simbología de uso frecuente en él, sin percibir que no recuperan el mensaje*. Si presentamos un mensaje simbólico, el docente con su saber identifica a qué campo de la Matemática pertenece, o a cuáles no y comienza a delimitar el contexto en el que intentará recuperar el mensaje. Por ejemplo, en la primera actividad, los docentes al solo leer, sabían inmediatamente que esa proposición no es de Geometría, ni de Estadística ni de Álgebra, reconocen que es del campo del Análisis, probablemente asociándola con su uso para probar la unicidad de un límite funcional, por ejemplo. Consideramos que esto produce una asociación inmediata de terminología utilizada en el campo del Análisis y otra que seguro no formará parte de los significados que el sujeto asocie ni de la explicación que dé. Términos como: estar cerca de, suficientemente chico, infinitamente pequeño, acercarse a, entre otros, conforman parte de los discursos que usualmente se asocian con este contexto. En este campo, el uso del épsilon como número arbitrario positivo se asocia, en la enseñanza, con números pequeños, mientras que “ser mayor que cero” no implica necesariamente ser pequeño y habría que explicar qué se quiere transmitir o enfatizar sobre el mensaje, que va más allá de ser un número mayor que cero. Probablemente si el enunciado incluyera ángulos de un triángulo, uno de los cuales se llamara épsilon, esta asociación no se daría porque la delimitación del contexto llevaría a una rápida asociación con lo geométrico y dejaría afuera ese tipo de expresiones asociadas al épsilon en el Análisis. Entendemos que los docentes hacen una primera aproximación previa a la comprensión del mensaje, delimitando el contexto y trayendo a escena terminología del campo matemático al que reconocen que pertenece dicho mensaje. Luego de esto, falta un poco más, pues la parte más fina de precisión, de análisis minucioso del mensaje podría aún no estar presente. Esta podría ser una causa de por qué mencionan la existencia de inverso aditivo en la tarea 1, significado que es difícil de asociar con los símbolos de la proposición.

Cuando los docentes han enseñado conceptos de un campo matemático, por ejemplo Análisis, han seguido estudiando de textos, leído autónomamente, buscaron actividades, pensaron cómo enseñarlo, etc. y seguramente tengan sus propias experiencias que consideran más exitosas para sus clases. Todas estas búsquedas son utilizadas con la intención de llegar a los alumnos y comunicarles el concepto. Entendemos que toda esta experiencia sigue conformando, modificando o ampliando la imagen conceptual de los docentes que inicialmente se constituyó por las experiencias vividas de él cuando era estudiante. De este modo, un docente que enseña Análisis tiene en su imagen conceptual de cada noción, no solo lo adquirido como aprendiz sino lo que ha construido desde el momento que piensa en cómo enseñar. Así, ciertos términos, metáforas, gráficos o esquemas prototípicos, e incluso gestos, pueden tener una fuerte presencia en las imágenes conceptuales de los docentes. Por otro lado, estos docentes conocen las definiciones matemáticas, se manejan cómodamente con los símbolos y, utilizándolos cómodamente, suelen enseñarlas. Desde nuestra perspectiva es posible que el hecho de que un docente no comprenda mensajes matemáticos sobre temáticas que enseña usualmente pueda deberse a que no confronta la definición conceptual con su imagen conceptual. Confía en que conoce la definición (y le basta para escribirla correctamente, en símbolos, en el pizarrón) y tiene reforzada su imagen conceptual que utiliza para explicar el concepto usando como soporte gráficos, frases, metáforas, por ejemplo. Apenas se exige la interacción entre la definición y la imagen conceptual, todo se desencadena, se advierten las diferencias, expresiones en lenguaje natural que no se corresponden con el simbólico, etc. y es el comienzo para poder ajustar el conocimiento. Entendemos que esto podría haber ocurrido por ejemplo en el caso de la tarea sobre el concepto de límite funcional. Se puede advertir que la definición rápidamente estuvo escrita en símbolos, completa, mientras que las expresiones en lengua natural que no describen el concepto, probablemente sean parte de las frases utilizadas a la hora de intentar explicar la noción. En este caso, no podríamos considerar que los docentes asignen significado partiendo de sus imágenes conceptuales. Tampoco ocurriría que extraigan significado de la definición. Entendemos que corresponde a una situación diferente en la que no hay interacción entre la definición conceptual (que conocen y están seguros de ello) y la imagen conceptual que está constituida por cuestiones que utilizan en la enseñanza. Tenemos esta posible explicación y nos proponemos, en un posterior trabajo, ahondar sobre esto.

Si un docente se queda con la idea que logró identificar el mensaje, cuando solo consideró una parte, o cuando menciona terminología del campo matemático, cercana, pero no precisa para describir el mensaje, se corre el riesgo que considere que ha comprendido y que, al enseñar, espere lo mismo de sus estudiantes: que mencionen partes o decodifiquen. Esto produciría un vaciamiento de la Matemática enseñada y aprendida.

Sobre la tarea de cuadrática, entendemos que algo no resultó claro en nuestra consigna. Asimismo esa tarea nos permitió poner en evidencia otra dificultad advertida que es la *falta de conexión entre el lenguaje natural y el simbólico de quien usa ambos lenguajes*. Entendemos que esto podría ocurrir pues el lenguaje simbólico suele asociarse con "utilizar símbolos" y el significado y el contexto quedan fuera de él. Asociamos este tipo de falencia con la ausencia de reflexión sobre las tareas realizadas, que suele darse en los distintos niveles escolares. Cuando la capacitación es para docentes, con más razón no suele ser una práctica presente.

Entendemos que este tipo de investigación nos permite tener ciertas pautas para pensar en la formación docente, sea inicial o continua. En este sentido presentamos esta reflexión final. Resulta clave estar consciente de la existencia de la distancia entre la acción verbalizada desarrollada por el docente en una clase, a la decisión de qué dejar plasmado en el pizarrón, sea en símbolos o en lenguaje natural. Esta distancia, que podría no ser tal en el docente pues podría dominar ambos lenguajes, debe hacerla consciente para organizar su enseñanza atendiendo a que, de no ser así, el alumno podría encontrarse con tal brecha, podría entender en la clase porque comprende el lenguaje natural con el que el docente explica, copia los símbolos del pizarrón y a la hora de leer de sus apuntes no recupera el mensaje y queda desconcertado sin entender cómo es que creía haber entendido la clase. Es indispensable reflexionar acerca de “qué decimos y qué dejamos escrito en el pizarrón” cada vez que damos clases. Los docentes estamos acostumbrados a utilizar en simultáneo, mientras damos clases, la oralidad y el pizarrón. Por ejemplo, cuando explicamos una noción estamos muchas veces hablando en lenguaje natural y escribiendo en símbolos como si “naturalmente” el alumno “viera” ambas acciones a la vez y pudiera naturalmente manejarse desde una de ellas a la otra. El pensamiento es indisoluble del lenguaje y el primer lenguaje que aprende un sujeto es el natural, luego los símbolos y recién después el lenguaje simbólico. Por esta razón, podemos decir que el lenguaje natural está en el punto de partida en los procesos de enseñanza y de aprendizaje pero también está en el punto de llegada, cuando el estudiante pone en evidencia la asignación de significados que le da a los símbolos mostrando el dominio del lenguaje matemático. Entre ambos puntos, de partida y de llegada, existen complejas redes de pensamiento cuando la intención es comunicar mensajes matemáticos. Además habría que reflexionar acerca de la importancia de trabajar sobre el análisis global de los símbolos que debe realizar el docente cuando plasma simbólicamente una noción matemática y no centrarse solamente en un análisis local de los símbolos que muchas veces deviene en lectura “ingenuas” de los mismos. El dominio del lenguaje simbólico, tal como lo concebimos aquí, no se advirtió en los docentes que participaron de este estudio.

Una explicación sobre las dificultades que los sujetos suelen tener al intentar comprender un texto matemático puede darse al considerar que éstas se originan en la falta de preparación para asignar significados matemáticamente correctos a los significantes en el contexto de trabajo. Sumado a esto, la decodificación muchas veces es considerada, por el docente, suficiente indicador de comprensión. Esto permite suponer que un trabajo sostenido en el tiempo de parte del docente para que los estudiantes trasciendan la lectura ingenua y comprendan que la asignación de significados “local” (sea decodificación o parcial, en bloques) no es suficiente sin una comprensión global de las proposiciones, enunciados, demostraciones, etc., permitiría lograr mejoras en la interpretación autónoma de un texto matemático.

Reconocimientos

Agradecemos el apoyo económico de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia; el de la Universidad Abierta Interamericana, sede centro, Ciudad Autónoma de Buenos Aires; la Universidad Nacional de Salta, sede Orán y la Universidad

Nacional de General Sarmiento que permitieron desarrollar el trabajo así como enriquecerlo con el intercambio entre investigadores.

6. Referencias

D'AMORE, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 35*, 90-106.

D´AMORE, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Pitágora.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de Science Cognitives* (5), 37-65.

DUVAL, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de RSME, 9(1),* 143-168.

FUSARO PINTO, M. y TALL, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. *Proceedings of the 23 Conference of PME, 3,* 281-288. Haifa, Israel.

GODINO, J y BATANERO, C. (1994).Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3),* 325-355.

GODINO, J. y BATANERO, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ponencia presentada en el IX Seminario de Investigación en Educación Matemática. Guimaraes.

GODINO, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3),* 237-284.

GODINO, J.; BATANERO, C. y FONT, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, GODINO, J. D. BATANERO, C. y FONT, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

PEIRCE, C. (1978). *Ecrits sur le signe*. Paris: Seuil.

PIAGET, J. (1967). *El juicio y el razonamiento en el niño. Estudio sobre la lógica del niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

RADFORD, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, *12*(1), 51-69.

RADFORD, L. (2004).Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México.

RADFORD, L. (2006a). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Relime*, 7-23.

RADFORD, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, 103-131.

RODRÍGUEZ, M.; POCHULU, M. y CECCARINI, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa 13 (3)*, 624-650.

SAUSSURE, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot.

VIGOTSKY, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.