UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 57. Diciembre 2019
Páginas 153-161

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Rectángulos: Perímetros, áreas y curvas de nivel. Una experiencia de indagación

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

¿Cuántos rectángulos de perímetro 36 cm tienen área mayor que el área de algún rectángulo de perímetro 72 cm?

Considero muy importante poner énfasis en la indagación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y por ello en este artículo describo el origen del problema propuesto, mediante una secuencia de actividades en las que está muy presente la indagación didáctico-matemática y las reflexiones que suscita, en la perspectiva de la creación y resolución de problemas. Veremos cómo se llega a vincular este problema con temas del análisis matemático, en el marco del conocimiento ampliado y especializado del profesor de matemáticas.

Este problema, es uno de los que fueron creados por profesores de matemáticas de secundaria, en un taller sobre creación de problemas, con énfasis en la indagación. Se les planteó una situación y tres actividades; en las dos primeras se acentuó la indagación didáctica, como se explicita a continuación:

Situación:

> Juan y María disponen de alambres flexibles de 72 cm y 36 cm de longitud, respectivamente.

Primera actividad (individual):

> Escriba brevemente una o más actividades, con los alambres flexibles de Juan y María, que Ud. sugeriría a estudiantes de segundo año de secundaria, para afianzar sus conocimientos sobre *áreas y perímetros de rectángulos.*

Segunda actividad (individual):

> Escriba una o más preguntas que Ud. haría a los estudiantes, o se plantearía Ud misma(o), relacionadas con la(s) actividad(es) propuesta(s).

Tercera actividad (grupal):

> Considerar una de las actividades propuestas – u otra que se les ocurra en el grupo – para **crear** y resolver un problema relacionado con *áreas y perímetros de rectángulos*.

En esta fase, ya propiamente de creación de un problema, es que surge el problema con el que iniciamos este artículo, creado en uno de los grupos, luego de las fases anteriores de indagación sobre lo que podría hacerse ante la situación planteada y lo que podría preguntarse, a partir de tales actividades, considerando el entorno matemático de áreas y perímetros de rectángulos.

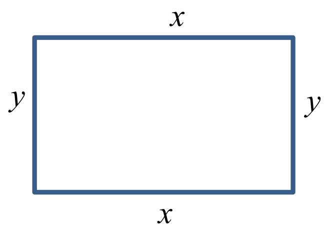
Antes de detenernos en este problema, es interesante mostrar otro, que llamaremos Problema 1, creado por otro grupo:

Problema 1:

> *¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede construir con el alambre de María, de 36 cm de longitud? ¿Y con el alambre de Juan, de 72 cm de longitud?*

Una solución del Problema 1

Este problema es relativamente conocido y su solución también. Para el caso del alambre de María; o sea el caso de rectángulos de perímetro 36 cm, se consideran, por ejemplo, las variables x e y para las longitudes de los lados (en centímetros), por lo cual $x + y = 18$ (el semiperímetro es 18 cm).



Así, el área A del rectángulo es

$$\begin{aligned} A &= xy \\ &= x(18 - x) \\ &= 81 - (x - 9)^2 \end{aligned}$$ (se “completó el cuadrado”)

Y en consecuencia, el área máxima se obtiene cuando $x = 9$; o sea, es 81 cm^2. Como $x + y = 18$, se obtiene que $y = 18$, y así, también la otra dimensión del rectángulo tiene longitud 9 cm; es decir, el rectángulo de perímetro 36 cm y área máxima es un cuadrado cuyos lados miden 9 cm.

Para el caso del alambre de Juan, procediendo de manera similar, se obtiene que el rectángulo de perímetro 72 cm y de mayor área que se puede construir, es el cuadrado cuyos lados miden 18 cm. Su área es 324 cm^2.

Cabe mencionar la discusión que suscitó el obtener un cuadrado, cuando lo que se pide en el problema es obtener un rectángulo. Recordando que un rectángulo se define como un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos y que un cuadrado se define como un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos y sus lados son congruentes entre sí, se llegó al convencimiento que la definición de cuadrado es un caso particular de la definición de rectángulo y, en consecuencia, todo cuadrado es un rectángulo.

Pasemos ahora al problema inicial, que lo llamaremos Problema 2

Problema 2

¿Cuántos rectángulos de perímetro 36 cm tienen área mayor que el área de algún rectángulo de perímetro 72 cm?

Una solución del Problema 2

Considerando que el problema sería planteado a alumnos de segundo año de secundaria, propusieron responder a la pregunta luego de examinar todos los casos posibles. Así, construyeron cuadros como los que muestro en las Tablas 1 y 2:

Tabla 1
Rectángulos J_i de perímetro 72 cm
(lados de longitudes x e y en centímetros)

Rectángulo	x	y	Semiperímetro: $x + y$	Área: xy (en cm^2)
J_1	1	35	36	35
J_2	2	34	36	68
J_3	3	33	36	99
J_4	4	32	36	128
J_5	5	31	36	155
J_5	6	30	36	180
J_7	7	29	36	203
J_8	8	28	36	224
J_9	9	27	36	243
J_{10}	10	26	36	260
J_{11}	11	25	36	275
J_{12}	12	24	36	288
J_{13}	13	23	36	299
J_{14}	14	22	36	308
J_{15}	15	21	36	315
J_{16}	16	20	36	320
J_{17}	17	19	36	323
J_{18}	18	18	36	324

Tabla 2
Rectángulos M_k de perímetro 36 cm
(lados de longitudes x e y, en centímetros)

Rectángulo	x	y	Semiperímetro: $x + y$	Área: xy (en cm^2)
M_1	1	17	18	17
M_2	2	16	18	32
M_3	3	15	18	45
M_4	4	14	18	56
M_5	5	13	18	65
M_6	6	12	18	72
M_7	7	11	18	77
M_8	8	10	18	80
M_9	9	9	18	81

Observando las Tablas 1 y 2 podemos afirmar que el rectángulo M_9 tiene perímetro 36 cm y su área es 81 cm^2, que, evidentemente, es mayor que las áreas de los rectángulos J_1 y J_2, que tienen perímetro 72 y sus áreas son, respectivamente, 35 cm^2 y 68 cm^2. Algo similar podemos decir de los rectángulos M_8, M_7 y M_6. En consecuencia, para responder a la pregunta del problema, ya tenemos 4 rectángulos de perímetro 36 cm cuyas áreas son mayores que el área de algún rectángulo de perímetro 72 cm. ¿Hay más rectángulos con esta característica? Vemos que los rectángulos M_5, M_4 y M_3 tienen áreas de 65, 56 y 45 cm^2 respectivamente, que son mayores que el área del rectángulo J_1, cuya área es 35 cm^2. Por consiguiente, tenemos 3 rectángulos más, de perímetro 36 cm, cuyas áreas son mayores que el área de algún rectángulo de perímetro 72 cm. Así, la respuesta final al problema, dada por el grupo, fue que existen 7 de tales rectángulos.

Observaciones

1. Si se hubiera construido primero la tabla de rectángulos de perímetro 36 cm (los M_k), habría bastado que en la tabla de rectángulos de perímetro 72 cm (los J_i) se consideren solo los dos primeros casos, pues a partir del rectángulo J_3, todos tienen área mayor que 81 cm^2, que es el área máxima de un rectángulo de perímetro 36 cm, como se puede ver en la Tabla 2 (el rectángulo M_9). Esto también podría haberse concluido, si el grupo hubiera conocido antes el Problema 1 y una solución de éste.

2. Un aspecto muy importante de hacerlo explícito en relación a la solución mostrada de este problema, es que solo se están considerando números naturales. Por eso, en el caso del alambre de Juan, se muestran solo 18 rectángulos posibles (Tabla 1) y en el de María sólo 9 rectángulos posibles (Tabla 2). Si consideramos los números racionales, no se está teniendo en cuenta, por ejemplo, para el caso de Juan, un rectángulo – llamémoslo J'– de perímetro 72 cm, de dimensiones 34.5 cm y 1.5 cm, cuya área es 51.75 cm^2; y para el caso de María, no se está considerando un rectángulo – llamémoslo M' – de perímetro 36 cm, de dimensiones 10.8 cm y 7.2 cm, cuya área es 77.66 cm^2. Como se puede ver, este rectángulo M' de perímetro 36 cm, tiene área mayor que la del rectángulo J', de perímetro 72 cm y mayor también que de los rectángulos J_1 y J_2 de la Tabla 1. Es fácil imaginar que también podemos construir muchos otros rectángulos de dimensiones no enteras y perímetro 36 cm, cuyas áreas sean mayores que algún rectángulo de perímetro 72 cm. ¿Cuántos más?

   Al seguir indagando, matemáticamente, sobre rectángulos de perímetro 36 cm, considerando números no enteros – por ejemplo números irracionales – encontramos también rectángulos como el que podemos llamar M'', cuyas dimensiones son $10\sqrt{2}$ cm y (18 - $10\sqrt{2}$) cm, cuya área aproximada es 54.55 cm^2 , como se ilustra en la Figura 1.

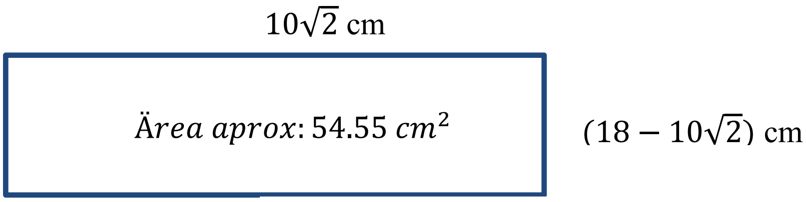


Figura 1. Rectángulo M''

   Es claro que M'', tiene área mayor que el rectángulo J_1 de la Tabla 1. Podemos afirmar, entonces, que – considerando el conjunto de los números reales – **existen más de 7 rectángulos de perímetro 36 cm cuya área es mayor que el área de un rectángulo de perímetro 72 cm**.

Otras herramientas de análisis

Las dos observaciones hechas a la solución expuesta del Problema 2, sobre todo la segunda, nos hacen pensar que más allá de considerar el problema solo para estudiantes de segundo año de secundaria – en el marco del conocimiento ampliado y especializado del profesor de matemáticas (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) – debemos usar otras herramientas matemáticas de análisis para ilustrar la respuesta a la pregunta del Problema 2.

Consideremos que las variables x e y representan las dimensiones de un rectángulo cualquiera, en el conjunto de los números reales positivos. Así, el conjunto

$$\boldsymbol{M} = \{(x; y) \in R \times R \;/\; x + y = 18; \quad x > 0, \qquad y > 0\}$$

representa el conjunto de posibles pares de valores reales que pueden tomar las dimensiones de un rectángulo de perímetro 36 (pues $2x + 2y = 36$). Más aún, como tal conjunto se representa en el plano como un segmento de recta, con cada uno de sus puntos podemos asociar un rectángulo con un vértice en él y lados paralelos a los ejes coordenados (Figura 2).

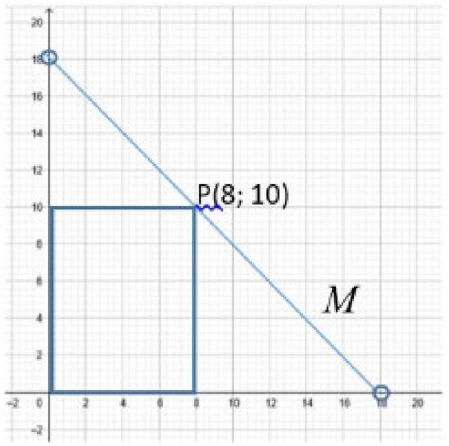


Figura 2

Evidentemente, su área estará dada por el producto de las coordenadas x, y del punto del segmento. En la Figura 2 se muestra el rectángulo cuyos lados son de longitudes 8 y 10, uno de cuyos vértices es el punto P del segmento que representa el conjunto $\boldsymbol{M}$. Ya podemos advertir que, habiendo infinitos puntos en el segmento de recta $\boldsymbol{M}$, hay también infinitos rectángulos de perímetro 36. Así podemos representar los 9 rectángulos de la Tabla 1 (En la Figura 2 mostramos el rectángulo M_8) y también los rectángulos M' y M'' de dimensiones no enteras que encontramos en la observación 2.

Es claro que el área del rectángulo mostrado en la Figura 2 es 80 (el producto de 8 y 10) y podemos intuir que si el punto que elegimos del segmento $\boldsymbol{M}$ está muy cerca del punto (0; 18) o del punto (18; 0), el rectángulo correspondiente será “muy flaco” y de área muy pequeña.

Análogamente, podemos definir y representar gráficamente al conjunto $\boldsymbol{J}$ de todos los rectángulos de perímetro 72:

$$\boldsymbol{J} = \{(x; y) \in R \times R \;/\; x + y = 36; x > 0,\; y > 0\}.$$

También podemos intuir que si escogemos un punto del segmento $\boldsymbol{J}$ muy cercano al punto (0; 36) o al punto (36; 0), el rectángulo correspondiente será “muy flaco” y de área muy pequeña.

Observación: En verdad, existen rectángulos de perímetro 72 cuya área puede ser tan pequeña como deseemos. Basta considerar el punto del segmento $\boldsymbol{J}$ lo suficientemente cercano al punto (0; 36) o al punto (36; 0).

Ya hemos visto cómo representamos a los rectángulos que tienen el mismo perímetro. Prestemos atención ahora a los rectángulos que tienen la misma área.

¿Cómo podemos representar a todos los rectángulos que tienen, por ejemplo, área 56?

Veamos; manteniendo lo que representan las variables x e y, su producto debe ser 56; en consecuencia, el siguiente conjunto

$$K_{56} = \{(x;y) \in R \times R / xy = 56; x > 0, \; y > 0\}$$

representa a todos los rectángulos de área 56.

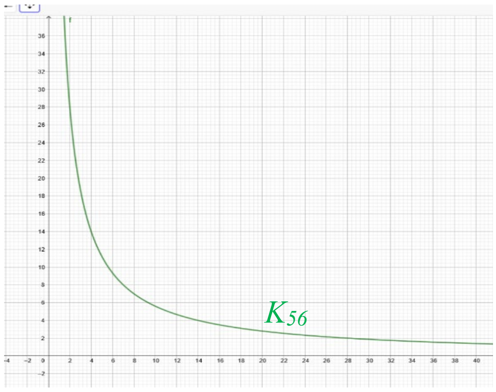


Figura 3

En el plano cartesiano, el conjunto K_{56} es una curva que es la rama positiva de una hipérbola equilátera, como se muestra en la Figura 3.

Considerando la función área

$$A(x;y) = xy \,,$$

el conjunto K_{56} es la *curva de nivel* 56 de esta función de dos variables. En este contexto matemático, en general, tenemos la curva de nivel $q > 0$ de esta función, que llamaremos K_q

$$\boldsymbol{K_q} = \{(x;y) \in R \times R \; / \; xy = q; \; x > 0, \; y > 0\}.$$

Este conjunto representa a todos los rectángulos de área q.

Ahora podemos hacer indagaciones matemáticas, considerando relaciones entre los conjuntos M, J y K_q.

Por ejemplo, ¿qué representa el conjunto $M \cap K_{56}$?

Un elemento de este conjunto, por ser elemento de *M*, representa a un rectángulo de perímetro 36; y por ser elemento de K_{56}, representa un rectángulo de área 56. Gráficamente, como se ve en la Figura 4, es el conjunto formado por los dos puntos de intersección del segmento de recta con la rama de hipérbola. Tales puntos representan rectángulos de dimensiones 4 y 14 que, como podemos verificar, tienen área 56 (4 x 14) y perímetro 36 (4 + 14 + 4 + 14). Es el rectángulo M_4 de la Tabla 2. Observamos que los dos puntos de intersección representan el mismo rectángulo, en diferente posición.

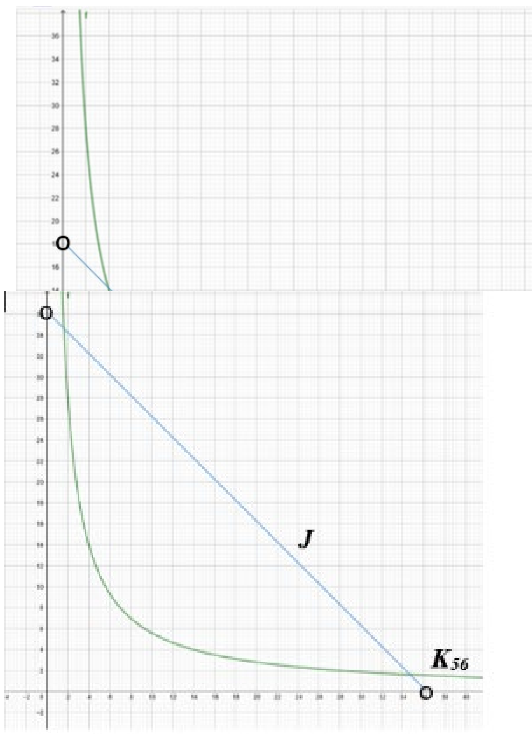


Figura 5

Algo parecido podemos afirmar del conjunto $J \cap K_{56}$, que tiene dos elementos como se ve en la Figura 5. En consecuencia, existen rectángulos de perímetro 72 (por estar en J) cuya área es 56 (por estar en K_{56}). En el párrafo anterior concluimos que existen rectángulos de perímetro 36 con área 56; por consiguiente, estamos verificando que hay rectángulos de perímetro 36 que tienen la misma área que rectángulos de perímetro 72. Este hallazgo es muy importante, pues nos lleva a indagar si lo hallado es solo un caso único, para rectángulos de área 56, y entonces plantearnos preguntas de carácter general, cuyas respuestas pueden hallarse a partir del análisis de las gráficas de los conjuntos M, J y K_q y de sus intersecciones.

Una pregunta natural es

> *¿Para todo rectángulo T de perímetro 36, existe un rectángulo S de perímetro 72, cuya área es la misma que el área de T?*

Y otra, que es una mirada general al Problema 2:

> *¿Para todo rectángulo T de perímetro 36, existe un rectángulo Q de perímetro 72 cuya área es menor que el área de T?*

Evidentemente, tenemos nuevos problemas creados como fruto de la indagación. Las respuestas a ambas preguntas son afirmativas y se ilustran examinando en un mismo sistema de coordenadas las intersecciones de las curvas de nivel K_q con los conjuntos M y J.

Para responder a la primera pregunta, observemos que toda curva de nivel K_q, con $0 < q \leq 81$ interseca a los dos segmentos M y J (Figura 6) y, en consecuencia, se tienen rectángulos de perímetros 36 y 72 que tienen la misma área q. En la Figura 6, el punto T corresponde a un rectángulo de perímetro 36 y área q, y el punto S corresponde a un rectángulo de perímetro 72 y cuya área también es q.

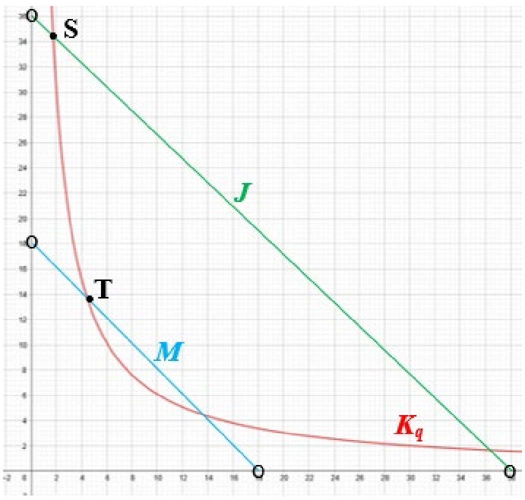


Figura 6

Ciertamente, también se puede hacer un análisis algebraico y llegar a la misma conclusión. Notar que $q \leq 81$ porque – como se vio en el Problema 1 – la máxima área posible de los rectángulos de perímetro 36, es 81.

Para justificar la respuesta afirmativa a la segunda pregunta, observemos (Figura 7) que para toda curva de nivel $K_{q'}$ que interseca el segmento M (por ejemplo, el punto **T** es uno de los puntos de tal intersección), existe otra curva de nivel $K_{q''}$, más cercana al origen (es decir, $q'' < q'$), que de igual forma

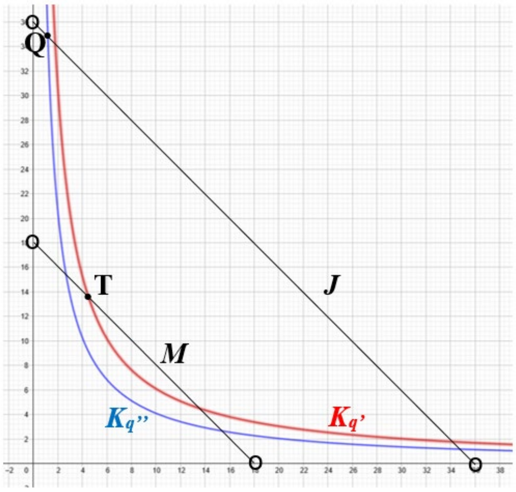


Figura 7

interseca a M y también a J (punto **Q**), por lo cual cada punto de intersección de M y $K_{q'}$ (por ejemplo el punto **T**) representa un rectángulo de perímetro 36, con área q' , y cada punto de intersección de J y $K_{q''}$ (por ejemplo el punto **Q**), representa un rectángulo de perímetro 72, con área q'', que es menor que q'. En consecuencia, **todo** rectángulo de perímetro 36 tiene área mayor que el área de algún rectángulo de perímetro 72. Esto es coherente con la idea intuitiva que existen rectángulos de perímetro 72 cuya área es tan pequeña como se desee, tal como lo manifestamos en la observación hecha a partir de la Figura 2 y el segmento ***J***.

De los análisis hechos y recordando que, al considerar el conjunto de los números reales, existen infinitos rectángulos de perímetro 36 cm, concluimos que la respuesta al problema inicial de este artículo, es que **existen infinitos rectángulos de perímetro 36 cm, cuya área es mayor que el área de algún rectángulo de perímetro 72 cm.**

Comentarios finales

1. Pensando en la formación de profesores de matemáticas, hemos mostrado una nueva estrategia de creación de problemas por elaboración, a partir de una situación dada y un entorno matemático específico, que considera fases iniciales de propuesta de actividades y de preguntas relacionadas con tales actividades. Esta propuesta responde a la importancia que le damos a la educación matemática basada en la indagación que, como sostienen Artigue y Blomhøj (2013), es un poderoso medio de acción, a través de intentos personales y colectivos, para responder preguntas. Enfatizamos lo que podemos llamar *indagación didáctico-matemática*, por ser la búsqueda de actividades y preguntas que contribuyan a aclarar y profundizar conceptos y relaciones de estos en un entorno matemático previamente establecido, que finalmente se concreten en la creación de problemas. Al inicio, el énfasis es

en una *indagación didáctica*, planteándose preguntas en torno a actividades cuya implementación se haga en un determinado grado de educación básica. El proceso de indagación lleva a preguntas y discusiones matemáticas a niveles más avanzados, que pueden llegar a temas de matemática universitaria. En los talleres, la fase final, de socialización y discusiones de los problemas y sus soluciones es muy enriquecedora.

2. Constatamos, una vez más, cómo la creación de problemas contribuye a ampliar horizontes del conocimiento matemático (Malaspina, 2014), lo cual es particularmente importante en la perspectiva de formación de profesores. En este tipo de talleres, las fases previas de indagación didáctico-matemática refuerzan las ideas para la creación de problemas y favorecen que los docentes pasen del conocimiento común de un contenido matemático, a aspectos que forman parte del conocimiento ampliado y especializado. Queremos destacar la importancia de los aspectos intuitivos en la indagación; tanto para plantearse las preguntas como para encaminar las respuestas.

3. Mediante la indagación, la intuición y el uso de registros gráficos de representación, partiendo de una situación muy sencilla (que Juan y María disponen de alambres flexibles de 72cm y de 36 cm de longitud, respectivamente), hemos llegado a temas vinculados con la geometría analítica (segmentos de recta e hipérbolas), el análisis matemático (curvas de nivel), la topología (conjuntos infinitos) y la optimización matemática (existencia de rectángulos de área máxima y no existencia de rectángulos de área mínima, cuando el perímetro del rectángulo está fijo). Ciertamente, las indagaciones y discusiones en otros talleres o grupos de profesores pueden llevar a formular otras preguntas / problemas o a hacer los análisis con otras herramientas matemáticas.

4. Las dos preguntas finales y los análisis hechos para responderlas, usando las Figuras 6 y 7, brindan excelentes oportunidades para construir proposiciones usando los cuantificadores universal y existencial. Cabe mencionar la similitud de tales proposiciones con expresiones usuales al definir, en textos de Análisis Matemático, el límite de una función en un punto, usando ε y δ.

Referencias

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797-810

Godino, J D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM

Malaspina, U. (2014). La creación de problemas como medio para ampliar horizontes matemáticos. En *Anais do I Colóquio Internacional sobre Ensino e Didática das Ciências. Contribuições e Perspectivas,* pp. 104 – 110. Bahía: Universidade Federal da Bahía.