

Artigo Teórico

Futuros Professores de Matemática Interagindo em um Ambiente Virtual com o Geogebra



Felipe de Jesus Ribeiro Marques¹
Marcelo Almeida Bairral²

Resumo

O uso de *softwares* de geometria dinâmica (SGD) pode auxiliar a compreensão de propriedades geométricas e a construção de provas. O GeoGebra tem sido muito explorado com esses propósitos. Todavia, sua utilização em situações que preconizam interações *online* ainda é escassa na educação matemática. Neste artigo, ilustraremos futuros professores interagindo a distância no VMT com o GeoGebra (VMTcG), na busca de justificativa para o Teorema de Varignon. Reconhecemos que a elaboração de provas na formação inicial de professores de matemática deve ser vista como um processo contínuo e que pode ser estimulado, principalmente, com o uso de SGD. Ilustraremos um esquema que pode ser adotado na interpretação e potencialização de estratégias de provas, mediante interações em bate-papos do VMTcG.

Palavras-chave: Ambiente Virtual. VMT com GeoGebra. Teorema de Varignon. Formação Inicial de Professores de Matemática.

Introdução

Softwares de geometria dinâmica (SGD) podem proporcionar a construção de conceitos e a compreensão de propriedades das figuras geométricas. Estudos em educação matemática sublinham que, com utilização de SGD, o usuário tem uma liberdade para procurar soluções, fazer argumentações (SCHEFER; PASIN, 2013), testar hipóteses (RICHT et al., 2012), criar conjecturas (BACCAGLINI-FRANK, 2012), deduzir propriedades matemáticas e criar estratégias (GRAVINA, 1996).

¹Licenciando em Matemática na UFRRJ. Bolsista IC/CNPq. E-mail: felipe.ribeiromarques@ig.com.br

²Professor do Instituto de Educação da UFRRJ/PPGEduc/DTPE. E-mail: mbairral@ufrj.br

Neste artigo, ilustramos como futuros professores de matemática interagiram em um chat com o uso do GeoGebra³: o ambiente VMT com GeoGebra (VMTcG). Além de **(i)** descrevermos sucintamente o dispositivo virtual, **(ii)** ilustraremos o processo interativo em uma sala de bate-papo e **(iii)** refletiremos sobre o processo de desenvolvimento do raciocínio, mediante conjecturas e estratégias de prova.

Geometria Dinâmica com o uso de *softwares*

Segundo Menegotto e Lara (2011), o termo geometria dinâmica é utilizado para indicar *softwares* interativos que permitem ao usuário a criação e a manipulação de figuras geométricas, construídas a partir de suas propriedades. Conforme Pereira (2012), os SGD são aqueles que oferecem a possibilidade de construir e manejar objetos geométricos na tela do computador. O diferencial de um SGD fica marcado pela possibilidade de arrastar e transformar a figura construída (mantendo ou não suas propriedades euclidianas), usando o *mouse* em tempo real. Portanto, esses *softwares* tornam-se importantes aliados do ensino, pois potencializam as investigações das propriedades geométricas (com a opção de arrastar), possibilitam a construção de conceitos e favorecem a interação usuário-computador.

A visualização de um objeto geométrico é evidenciada como uma outra potencialidade dos SGD. Neste sentido, Pereira (2012) destaca que os SGD favorecem a agilidade na investigação, pois construções geométricas, que tomariam algum tempo para serem realizadas no papel, são feitas em segundos na tela do computador. Assim, o uso apropriado de SGD pode tornar o ensino de matemática mais eficiente, integrado e significativo (MENEGOTTO; LARA, 2011).

Aprendizagem matemática e interação *online* com o GeoGebra

Segundo Meier e Gravina (2012), o GeoGebra permite uma abordagem que pode auxiliar no aprendizado. Menegotto e Lara (2011) mostraram que os alunos que tiveram experiências com o GeoGebra compreenderam com mais precisão as definições e as propriedades dos quadriláteros do que os estudantes que tiveram aulas tradicionais. O estudo de Richit e colaboradores (2012) ratifica que, com o uso do GeoGebra em atividades

³Pesquisa financiada pelo CNPq (bolsa PQ e de IC). Agradecemos aos professores Arthur B. Powell e Wagner Silveira Marques pelas valiosas contribuições em uma das versões prévias deste artigo.

exploratórias e investigativas, foi possível que os discentes criassem hipóteses e conjecturas para os conceitos de derivada e integral.

Em sintonia com Sfard (2008), assumimos que aprender matemática é mudar de discurso. Uma das formas de promover essa mudança é mediante interações. Interagir é compartilhar significados, principalmente, quando os interlocutores atuam como pares, isto é, posicionando-se igual e livremente sobre suas suposições, dúvidas e certezas. Portanto, provar, nesse contexto discursivo, deve ser visto como um processo contínuo de levantamento de conjecturas e de construção de validações ou refutações para as mesmas.

Provar é uma forma de certificar determinada conjectura, propriedade etc. Conjecturar e provar são ações humanas intrínsecas e fortemente relacionadas ao pensamento matemático (HSIEH et al., 2012). A conjectura é uma suposição. Ela não é uma prova, mas auxilia no processo de demonstração. A conjectura provém argumentos para justificativas de ideias matemáticas específicas. A solução de um problema aberto, mediante conjecturas em SGD, envolve duas fases (BACCAGLINI-FRANK; MARIOTTI, 2010): uma fase de conjecturar, na qual os alunos se envolvem na exploração de uma figura e a sua argumentação conduz à formulação escrita de um enunciado; e uma fase de prova, na qual os discentes tentam provar a conjectura. A prova é um produto desta segunda fase.

Um SGD pode ser um ambiente propício para gerar conjecturas em problemas abertos e para observar e investigar o processo de conjecturar (BACCAGLINI-FRANK; MARIOTTI, 2010). As conjecturas podem surgir da ação de arrastar, mas a sua validação é feita no âmbito da geometria; ou seja, a conjectura exige uma prova (MARIOTTI, 2000). Vejamos como esse processo de provar localmente pode ocorrer em um *chat*.

O VMT com GeoGebra

O VMT é um ambiente virtual *online* gratuito que é utilizado para a resolução de atividades de matemática. Ele é cedido pela *Drexel University, Philadelphia, USA*. Para acessar o ambiente⁴ é preciso realizar um cadastro para obter nome e senha de acesso. O VMT é constituído do quadro branco⁵ (*whiteboard*) para representações gráficas, do *GeoGebra*, que ajuda na resolução de atividades, da wiki e da área de *chat*, que é a seção para interagir por escrito. Na figura 1 ilustramos a configuração de uma tela no VMTcG.

⁴<http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/>.

⁵No VMTcG para abrir o GeoGebra é necessário clicar na aba correspondente. Os participantes não podem usar concomitantemente o GeoGebra. É necessário pedir ao colega que libere o controle (*take control*).

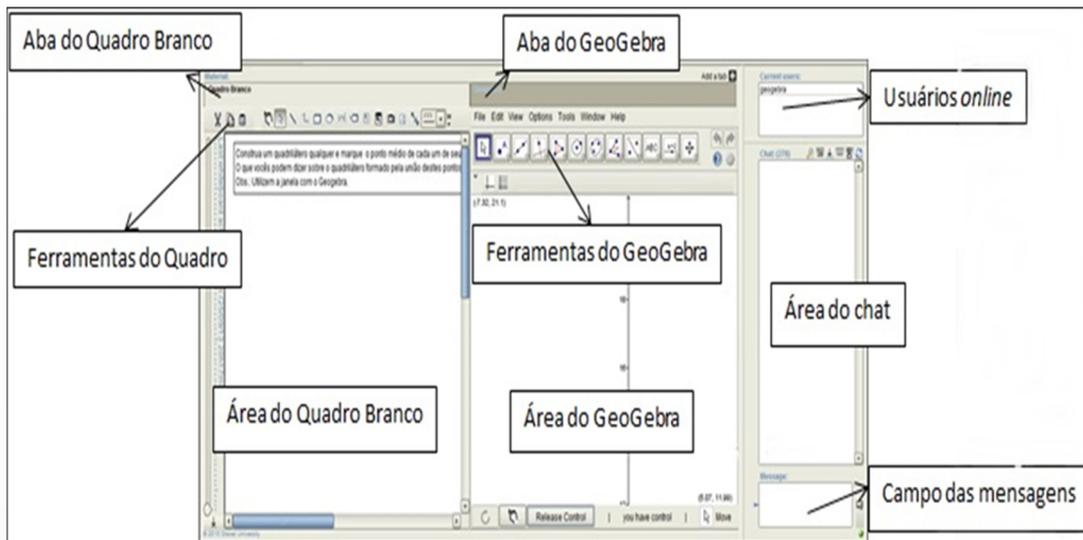


Figura 1 – Imagem da sala do VMTcG editada com algumas de suas funcionalidades
Fonte: PrintScreen da sala Atividade_1 do VMTcG.

A seguir, analisaremos a interação em uma sala no VMTcG.

Licenciandos interagindo no VMT com GeoGebra

Nossa implementação teve salas de dois propósitos diferentes: salas para a ambientação no VMTcG e salas para a resolução da tarefa proposta. A análise exemplificada neste artigo utilizou-se de dados de apenas uma sala (Atividade_1). Nela os alunos interagiram por aproximadamente 2 horas.

Em nossas implementações no VMT, sempre propiciamos um tempo de ambientação. Nesse momento os interlocutores têm oportunidade de se familiarizar com o ambiente virtual. Não há atividade matemática específica para ser resolvida. É apenas um conhecimento do cenário e de suas ferramentas. Os licenciandos de matemática⁶ interagiram por, aproximadamente, 30 minutos. Nesse tempo, perceberam que o GeoGebra não podia ser utilizado ao mesmo tempo por todos e que era necessário usar o botão *take control*. Na sala atividade_1 existia a seguinte tarefa:

Construa um quadrilátero qualquer e marque o ponto médio de cada um de seus lados. O que você pode dizer sobre o quadrilátero formado pela união destes pontos médios? Justifique sua resposta.

Inicialmente, ilustramos a tela na qual os alunos estavam interagindo na tarefa proposta.

⁶Eles possuíam conhecimento do GeoGebra e estavam fisicamente distantes.

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

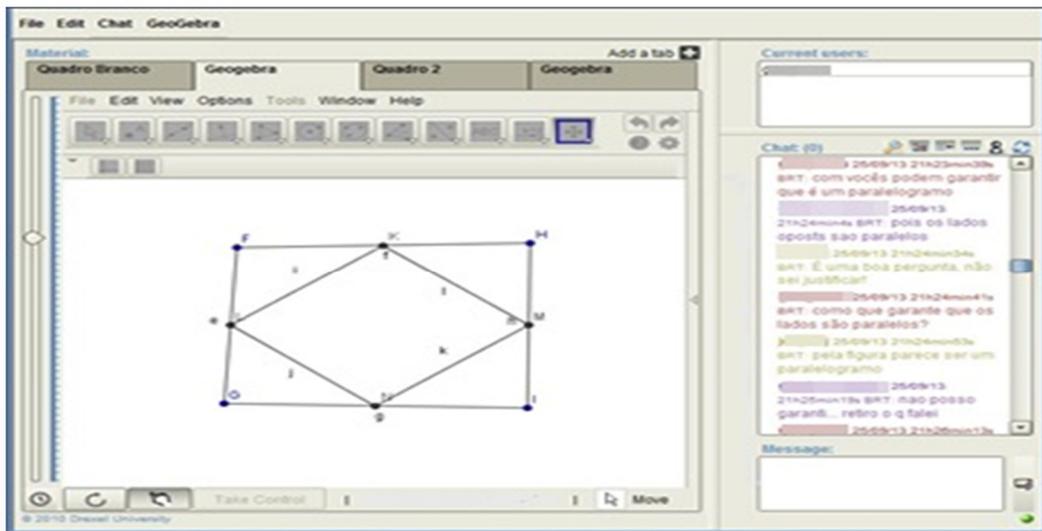


Figura 2 – Imagem da sala do VMTcG.
Fonte: PrintScreen da sala Atividade_1 do VMTcG.

Construído o quadrilátero unido pelos pontos médios, foi feito um questionamento pelo participante “Felipe⁷” (“Agora o que vocês me dizem sobre este quadrilátero formado pelos pontos médios”), como é ilustrado com trecho 99-100⁸ do chat.

Índice	Autor	Mensagem ⁹
99	Felipe	Agora o que vocês me dizem sobre este quadrilátero formado
100	Felipe	pelos pontos médios
101	José	É um paralelogramo
102	Rita	sim sim
103	Felipe	com vocês podem garantir que é um paralelogramo?
104	Rita	pois os lados opostos são paralelos
105	José	É uma boa pergunta, não sei justificar!
106	Felipe	como que garante que os lados são paralelos?
107	José	pela figura parece ser um paralelogramo
108	Rita	nao posso garantir... retiro o q falei

Quadro 1: Fragmentos de mensagens escritas na sala atividade_1.
Fonte: Transcrição gerada pelo VMTcG.

Percebemos que os graduandos “José” e “Rita” observaram que o quadrilátero formado pelos pontos médios aparentava ser um paralelogramo (101-102). Como eles não souberam inicialmente justificar a ideia (104-108), intrigados, começaram a utilizar as ferramentas do GeoGebra e dialogaram sobre como poderiam certificar esta conjectura.

⁷Nomes fictícios.

⁸Todos os trechos foram transcritos em sua forma natural de interação.

⁹A plataforma VMT registra todas as inscrições no ambiente. Esse tipo de tabela é gerado a partir desse registro, inclusive os índices que são os ordenadores dos turnos de interação.

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

Índice	Autor	Mensagem
147	José	Então o segmento "eg" é paralelo ao segmento "FI"
148	Felipe	por que é paralelo
149	José	e fazendo o mesmo procedimento feito lá em cima na conversa, podemos fazer com os triângulos HFI e HKM
150	Artur	isso José
151	Rita	por semelhança de triângulo
152	José	como eu tinha feito lá em cima na conversa

Quadro 3 – Fragmentos 3 de mensagens escritas na sala atividade_1
Fonte: Transcrição gerada pelo VMTcG.

No trecho transcrito no quadro 3, “José” percebeu que, fazendo o mesmo procedimento no triângulo HFI, chegaria à conclusão de que KM é paralelo a FI (147), pois tinha adotado raciocínio análogo no triângulo GFI (152).

Índice	Autor	Mensagem
181	José	Qual será o próximo passo?
182	Rita	mas se eu movimentar KM esse segmento vai se sobrepor a FI
183	Rita	ou não?
184	Felipe	mexe aí Rita

Quadro 4 – Fragmentos 4 de mensagens escritas na sala atividade_1
Fonte: Transcrição gerada pelo VMTcG.

Em sua reflexão “Rita” teve uma ideia diferente de certificar que o segmento KM e FI eram paralelos, isto é, de KM se sobrepor a FI (182).

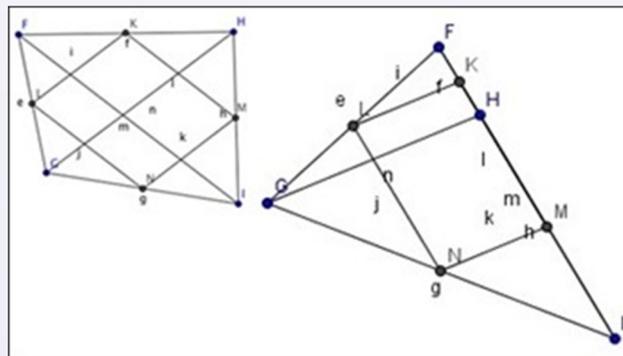


Figura 4 – Desenho movimentado da Figura 6.
Fonte: PrintScreen da tela do VMTcG.

Observando a figura 4, percebemos que “Rita” movimentou o ponto H e não o segmento KM como sugeriu (182). Desta forma, ela não constatou que os segmentos são paralelos. Ela somente deformou a figura original.

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

Índice	Autor	Mensagem
220	Artur	se LN e FI sao paralelos e os pontos L e N são pontos médios, pela propriedade da base média ...o que podem dizer?
221	José	Que são paralelos.
222	Artur	algo mais?
223	José	e proporcionais
224	Rita	exatamente josé
225	Feli- pe	isso ai
226	Artur	em quanto?
227	José	$FI = 2 * LN$
228	Rita	sim sim

Quadro 5 – Fragmentos 5 de mensagens escritas na sala atividade_1.
Fonte: Transcrição gerada pelo VMTcG.

No quadro 5, observamos que o mediador “Artur” fez alguns questionamentos sobre as propriedades da base média de um triângulo (220, 222, 226) e os participantes concluíram que LN e FI eram paralelos (221), proporcionais (223) e $FI = 2 \times LN$ (227).

Índice	Autor	Mensagem
235	Artur	ok José; e isso ajuda em algo p/ finalizar?
236	José	Que o quadrilátero formado pelos pontos médios de um quadrilátero será sempre em paralelogramo
237	José	é isso?
238	Rita	faz sentido
239	Feli- pe	Correto

Quadro 6 – Fragmentos 6 de mensagens escritas na sala atividade_1.
Fonte: Transcrição gerada pelo VMTcG.

No fragmento do *chat*, ilustrado no quadro 6, “José” e “Rita” chegaram à conclusão de “que o quadrilátero formado pelos pontos médios de um quadrilátero será sempre um paralelogramo” (teorema de Varignon). A seguir ilustramos algumas de suas construções no GeoGebra que os auxiliaram nessa observação.

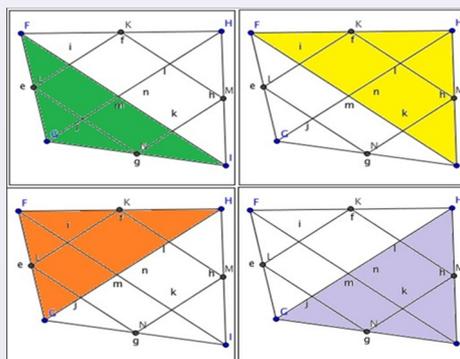


Figura 5 – Aprimoramentos na Figura 6 com os triângulos pintados.
Fonte: PrintScreen da tela do VMTcG.

Para chegar a este resultado os licenciandos trabalharam com a base média dos triângulos GFI e HFI, observando que os segmentos LN e KM eram paralelos. Do mesmo modo, considerando o triângulo FGH, eles justificaram que os segmentos LK e NM eram paralelos. Logo, pelo teorema da base média de um triângulo, temos que LK é paralelo a GH. O mesmo ocorre com o triângulo IGH. Assim, temos NM paralelo a GH e podemos concluir que LK é paralelo a NM. Portanto, o quadrilátero formado pelos pontos médios é um paralelogramo, pois tem lados paralelos dois a dois. A seguir sintetizamos o processo interativo da sala analisada.

O desenvolvimento do raciocínio mediante conjecturas e estratégias de prova

A partir de Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) ratificamos as duas fases (de conjecturar e de provar) em cenário de interação síncrona como o VMTcG. Geralmente, trabalhando com SGD, várias conjecturas emergem e algumas são refutadas rapidamente. Nessa sala observada, a única conjectura que apareceu (linha 107) foi sendo persistentemente analisada pelos graduandos mediante dúvidas, certezas e ideias emergentes dos interlocutores (HSIEH et al., 2012). E, com suas diferentes formas de argumentação (no *chat* escrito e nas construções e manipulações no GeoGebra), as interações contribuíram para a formulação de uma possível prova. No início do processo interativo, os licenciandos aparentaram perceber (linhas 101, 108) que a figura gerada pelos pontos médios do quadrilátero era um paralelogramo. Essa suposição foi ratificada na linha 105. Uma estratégia inicial adotada pelos interlocutores foi traçar as diagonais no quadrilátero inicial. Posteriormente, surgiu a possibilidade do uso do teorema da base média de um triângulo e, perseguindo essa ideia, os graduandos conseguiram buscar uma forma de convencimento do teorema de Varignon. Esse processo interativo dos licenciandos está descrito a seguir.

Índice	Autor	Mensagem do mediador	Desenvolvimento <i>online</i> de uma tentativa de prova para a tarefa proposta			
			Dúvida	Certeza	Conjectura	Ideia emergente
99	Felipe	Agora o que vocês me dizem sobre este quadrilátero formado				

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

100	Felipe	pelos pontos médios				
101	José			É um paralelogramo		
102	Rita			sim sim		
103	Felipe	com vocês podem garantir que é um paralelogramo?				
104	Rita			pois os lados opostos são paralelos		
105	José			É uma boa pergunta, não sei justificar!		
106	Felipe	como que garante que os lados são paralelos?				
107	José				pela figura parece ser um paralelogramo	
108	Rita		nao posso garantir... retiro o q falei			
126	José					eu estava pensando em traçar um segmento IF e depois comparar os triangulos GFI com Gge
127	Felipe	O q vc acha da ideia do José Rita?				
128	José			já que os pontos "e" e "g" são pontos médios então os segmentos "eg" e "FI" são paralelos		
129	Rita			sim sim		
130	José		acho que vale daquela relação que "eg" é base média relativa ao segmento "FI"			
131			Estou no caminho ou estou falando besteira?			
132			o que acham ?			
133	Artur			isso José		

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

134	Rita		se eg e FI sao paralelos consequentemente fh e FI sao tbm entao podemos dizer q eg e fh sao paralelos			
135			correto?			
147	José			Então o segmento "eg" é paralelo ao segmento "FI"		
148	Felipe	por que é paralelo				
149	José			e fazendo o mesmo procedimento feito lá em cima na conversa, podemos fazer com os triangulos HFI e HKM		
150	Artur			isso José		
151	Rita			por semelhança de triangulo		
152	José			como eu tinha feito lá em cima na conversa		
181			Qual será o próximo passo?			
182	Rita			mas se eu movimentar KM esse segmento vai se sobrepor a FI		
183	Rita		ou nao?			
184	Felipe	mexe aí Rita				
220	Artur	se LN e FI sao paralelos e os pontos L e N são pontos médios, pela propriedade da base média ...o que podem dizer?				
221	José			Que são paralelos.		
222	Artur	algo mais?				
223	José			e proporcionais		
224	Rita			exatamente José		
225	Felipe	isso aí				
226	Artur	em quanto?				
227	José			$FI = 2 \cdot LN$		
228	Rita			sim sim		

**FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA INTERAGINDO
EM UM AMBIENTE VIRTUAL COM O GEOGEBRA**

235	Artur	ok José; e isso ajuda em algo p/ finalizar?				
236	José			Que o quadrilátero formado pelos pontos médios de um quadrilátero será sempre em paralelogramo		
237			é isso?			
238	Rita			faz sentido		
239	Felipe	Correto				

Quadro 7 – Descrição do processo interativo na busca de uma prova para o Teorema de Varignon
Fonte: Elaboração dos autores

Considerações Finais

No VMTcG as interações ocorriam natural e simultaneamente, com inserções e justificativas, ora no quadro branco, ora no *chat* escrito ou no próprio GeoGebra. Quando um interlocutor deseja realizar alguma construção ou manipulação no *software*, ele clica no comando *take control* e somente ele trabalha no programa. Os demais ficam observando. Conforme salientaram Bairral e Salles (2012), a inter-relação dos espaços do VMT e a natureza discursiva do ambiente são importantes no desenvolvimento do raciocínio matemático. Elas trazem uma singularidade no processo interativo: a implicação diferenciada dos interlocutores e a constante movimentação cognitivo-discursiva nos diferentes espaços do VMT. Nesse processo, sublinham os autores, as interlocuções negociativas (POWELL, 2006) desempenham um importante papel, pois elas constituem um momento reflexivo fértil para a obtenção de aspectos do raciocínio utilizados pelos sujeitos e, como ilustramos neste artigo, o aprimoramento coletivo de raciocínios voltados à construção de provas em tarefas de geometria.

O tipo de atividade proposta e o aspecto dinâmico do VMTcG permitiram aos licenciandos pensar e refletir sobre as ideias emergentes e, com ajuda do *software* e da interação favorecida pelo ambiente, os integrantes construíram, perceberam propriedades e elaboraram justificativas para as observações emergentes em suas manipulações. Esse processo de descobertas, de validações e refutações na produção e desenvolvimento de conjecturas em atividades com SGD pode ser assim esquematizado:

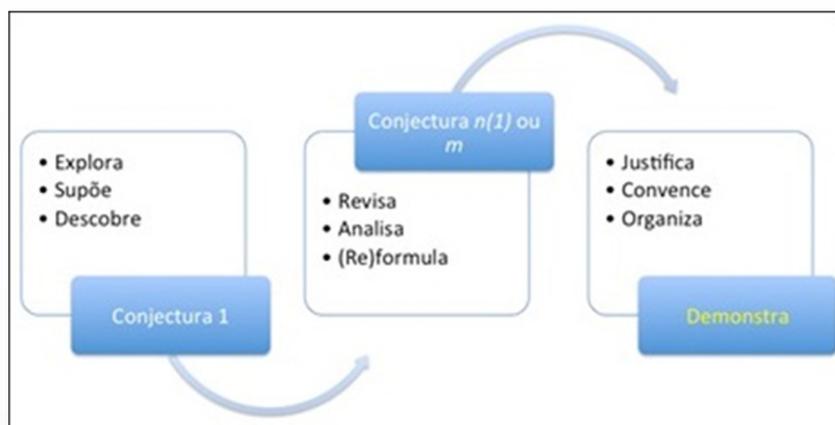


Figura 6 – Esquema para a construção de provas em SGD.
Fonte: Elaboração dos autores a partir de Hsieh et al. (2012)

Acreditamos que os formadores de professores de matemática podem adotar um olhar mais dinâmico e processual para a produção de provas com SGD, pois envolve explorações e aprofundamentos contínuos de suas descobertas e argumentos. Esse tipo de dinâmica interativa também pode tornar os futuros docentes mais motivados para o uso de *softwares* como minimizadores das dificuldades comumente encontradas para demonstrar em matemática. Finalmente, concordamos com Bairral (2013) que a realização de apenas um *chat* pode não ser suficiente para esgotar uma discussão ou para dar conta da solução de um problema matemático ou da construção de uma determinada prova.

Referências

- BACCAGLINI-FRANK, A. B.; MARIOTTI, M. A. Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. **Springer**, v.15, p. 225-253, 2010.
- BACCAGLINI-FRANK, A. E. B. Dragging and Making Sense of Invariants in Dynamic Geometry. In this activity, students learn to make conjectures about properties that do not change. **Mathematics Teacher**, v. 105, n. 8, 2012.
- BAIRRAL, M. A. **O uso de chat e de fórum de discussão em uma educação matemática inclusiva** (Vol. 5). Rio de Janeiro: Edur, 2013.
- BAIRRAL, M.A.; SALLES, A.T. Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.17, n. 2, p. 453-466, 2012.
- GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. In: **Anais ... VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p.1-13, Belo Horizonte, 1996.

HSIEH, FENG-JUI, HORNG, WANG-SHIAN; SHY, HAW-YAW. From Exploration to Proof Production. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), **Proof and Proving in Mathematics Education**. New York: Springer, 2012, p. 279-303.

MARIOTTI, M. A. Introduction to Proof: the Mediation of a Dynamic Software Environment. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 25-53, 2000.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. In: **Anais ... 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**, p. CCL-CCLXIV, 2012.

MENEGOTTO, G.; LARA, I. C. A. Contribuições do Software Geoalgebra Para o Estudo de Paralelogramos. **Alexandria**, v.4, n.2, p.31-55, 2011.

PEREIRA, T. de L. M. **O uso do software GeoGebra em uma Escola Pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Juiz de Fora: UFJF, 2012.

POWELL, A. B. Socially emergent cognition: Particular outcome of student-to-student discursive interaction during mathematical problem solving. **Horizontes**, v. 24, n. 1, p. 33-42, 2006.

RICHT, A.; BENITES, V. C.; ESCHER, M. A.; MISKULIN, R. G. S. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. In: **Anais ... 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**, p. 90-99, 2012.

SCHEFFER, N. F.; PASIN, P. A argumentação de professores de matemática suscitada pelo uso de softwares dinâmicos: construindo significados. **Vidya**, v. 33, n. 1, p. 9-17, 2013.

SFARD, A. **Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.



Veja mais em www.sbemrasil.org.br