

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica: uma análise sobre um livro didático

Michel da Silva Pinto Pedreira, Jaqueline de Souza Pereira Grilo, Marcos Grilo

Fecha de recepción: 09/01/2020
 Fecha de aceptación: 15/04/2020

<p>Resumen</p>	<p>Este artículo tiene como objetivo identificar los temas de la Teoría de Números presentes en la educación básica. Con este fin, analizamos un libro de texto de escuela primaria de sexto grado utilizado en escuelas brasileñas en un intento de identificar temas de Teoría de Números cubiertos en Educación Básica, ya que los libros de texto todavía guían la práctica docente en la actualidad. La investigación se desarrolló en un enfoque cualitativo del tipo documental. Como resultado, encontramos que los temas de la Teoría de Números aparecen en la educación básica de manera explícita e implícita. Palabras clave: Teoría de Números, libro de texto, enseñanza.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This article aims to identify topics of Number Theory present in Basic Education. To this end, we analyzed a 6th grade elementary school textbook used in Brazilian schools in order to identify Number Theory topics covered in Basic Education since textbooks still guide teaching practice today. We conducted a documentary research in the analysis of the textbook. As a result, we find that the topics of Number Theory appear in Basic Education explicitly and implicitly. Keywords: Number Theory, textbook, teaching.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo tem como objetivo identificar tópicos de Teoria dos Números presentes na Educação Básica. Para tanto, analisamos um livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental utilizado em escolas brasileiras na busca de identificar tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica visto que os livros didáticos ainda hoje norteiam a prática docente. A pesquisa foi desenvolvida em uma abordagem qualitativa do tipo documental. Como resultado, encontramos que os tópicos de Teoria dos Números aparecem na Educação Básica de maneira explícita e implícita. Palavras-chave: Teoria dos Números, livro didático, ensino.</p>

1. Introdução

De acordo com Hefez (2005), a Teoria dos Números teve como principal marco inicial a obra Os Elementos, de Euclides (aprox. 300 a.C.), estando em seu auge nos trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), o que levou a se tornar uma das principais bases da Matemática. Para o autor, graças

à obra de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a Aritmética transforma-se em Teoria dos Números (TN) e, a partir daí, passa a ter um desenvolvimento extraordinário.

Estudos apontam que tópicos de Teoria dos Números são abordados na Educação Básica passando por processos de adaptações da linguagem afim de se adequar ao ano escolar ao qual se destina (RESENDE, 2017; OLIVEIRA; FONSECA, 2017). Dos tópicos explorados em cursos de Teoria dos Números voltados para a formação de professores de Matemática, identificamos estudos que sugerem atividades envolvendo: Congruência; Máximo Divisor Comum (MDC); Mínimo Múltiplo Comum (MMC); Números Primos, Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE), Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) (RESENDE, 2007; OLIVEIRA; FONSECA, 2017; MANLER, 2016; GOMES, 2015; GROENWALD; SAUER; FRANKE, 2005).

Este artigo tem como objetivo identificar tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica baseando-se na análise de um livro didático (LD). Nossa motivação em realizar essa pesquisa está relacionada ao fato de que as pesquisas não estão voltadas para identificar que tópicos de Teoria dos Números estão presentes na Educação Básica, mas para propor atividades que podem ser exploradas tanto na Educação Básica quanto em cursos de formação de professores. Analisar o que está proposto na Educação Básica permite reflexões de como podemos abordar tópicos da Teoria dos Números em cursos de formação de professores.

Neste sentido, este artigo apresenta, além desta introdução, uma revisão de literatura sobre Teoria dos Números e uma discussão sobre o uso do livro didático na Educação Básica. Em seguida, expomos os procedimentos metodológicos adotados, a apresentação e discussão dos dados e, por fim, nossas considerações finais.

2. Teoria dos Números na/para a Educação Básica

Geralmente, o estudo de tópicos relacionados à Teoria dos Números (TN) ocorre na Educação Básica quando são vistos conteúdos relacionados à Aritmética, tais como: Divisibilidade; Máximo Divisor Comum (MDC); Mínimo Múltiplo Comum (MMC); Números Primos, dentre outros. Entretanto, apesar da proximidade desses conteúdos com tópicos da TN, estudos apontam que poucas são as pesquisas que problematizam a sua relação com a Educação Básica (RESENDE, 2007; OLIVEIRA; FONSECA, 2017).

Segundo Oliveira e Fonseca (2017), a TN nos cursos de formação de professores deve ser trabalhada com foco na Educação Básica, pois dá sentido ao aprendizado acadêmico e destaca a importância do domínio conceitual. Para os autores, era de se esperar que a formação de professores nos cursos de Licenciatura em Matemática permitisse um amplo contato com os elementos pertencentes a TN na Educação Básica, mas não tem sido assim. Deste modo, a TN é vista nos cursos de formação de professores de forma separada da Educação Básica, não permitindo reflexões e nem gerando oportunidades para relacioná-las.

Resende (2007) e Mandler (2016) corroboram o resultado apontado por Oliveira e Fonseca (2017) ao afirmar que a TN nos cursos de formação de professores não tem como principal preocupação a formação do professor da Educação Básica, pois seus conteúdos são tratados de forma essencialmente axiomática, com linguagem predominantemente simbólico-formal e com ênfase em demonstrações. Assim, dada a relevância da TN para a formação de professores e com o intuito de minimizar o distanciamento da Educação Básica, estudos têm se voltado a discutir atividades que propiciem esta aproximação.

Groenwald, Sauer e Franke (2005), por exemplo, sugerem seis atividades envolvendo tópicos da TN (Números Inteiros, Divisibilidade, MDC e Congruência de Números Inteiros), dentre estas, cinco voltadas para a Educação Básica e uma para ser desenvolvida em cursos de formação de professores. Apesar da ideia de Congruência de Números Inteiros ser proposta apenas na atividade destinada a futuros professores, os autores destacam que a definição de congruência dada por $a \equiv b \pmod{m}$, $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$:= se existir $k \in \mathbb{Z}$, tal que $a - b = km$, está diretamente associada aos restos da divisão de a e b por m .

Gomes (2015) também propõe uma sequência de atividades dividida em duas partes com o objetivo de introduzir o conceito de Congruência a alunos do Ensino Médio. Entretanto, observamos que a primeira parte que aborda conceitos de Divisibilidade poderia ser também desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando, pelas propostas curriculares brasileiras, este conteúdo é trabalhado.

Em uma outra direção, Oliveira e Fonseca (2017) desenvolveram um estudo com um grupo de futuros professores de Matemática acerca de suas compreensões sobre tópicos de TN analisando as respostas apresentadas a duas questões referentes a Números Primos e ao Teorema Fundamental da Aritmética. O estudo aponta a importância do conhecimento formal da Teoria dos Números por parte de professores de Matemática, pois as estratégias usadas pelo grupo indicam um apelo à intuição, nem sempre correta, e a técnicas prescritivas ou ao uso de algoritmos desnecessários.

Neste sentido, conforme Groenwald, Sauer e Franke (2005), trabalhar com a TN na formação inicial de professores sem relacioná-la com a prática docente na Educação Básica, não favorece que os futuros professores analisem o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, perdendo a oportunidade de conhecer e atuar com atividades que envolvem essa teoria. A TN quando vista somente por meios de algoritmos, proposições, demonstração e definições formais, não oferece condições didáticas para que o conteúdo seja transformado para fins de ensino na Educação Básica (RESENDE 2007; MANDLER, 2016; FONSECA; OLIVEIRA, 2017; GROENWALD; SAUER; FRANKE, 2005).

Assim, a TN pode ser classificada sob dois aspectos: a TN estudada nos cursos de formação de professores e a TN presente na Educação Básica. É nosso interesse nesse estudo, identificar tópicos de TN que aparecem na Educação Básica. Para tanto, recorreremos à análise de um livro didático, que ainda é o principal instrumento utilizado pelos professores.

3. O livro didático como norteador da prática de ensino

Estudos indicam que os livros didáticos (LD), ainda hoje, são instrumentos utilizados por professores como norteadores de sua prática de ensino (LAJOLO, 1996; DANTE; 1996; SANTOS; BARBOSA, 2017; QUEIROZ; BARBOSA, 2016). Segundo Lajolo (1996, p. 4), dado o modo como o LD é utilizado em nossas escolas, “ele acaba determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina”. Neste sentido, visando identificar tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica, recorreremos à análise de um livro didático de Matemática, pois, com base nos estudos, nos permite inferir como essa abordagem acontece.

De acordo com Dante (1996) e Santos e Barbosa (2017), há algum tempo o LD passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente, podendo indicar o tempo destinado à apresentação de um dado conteúdo, bem como o sequenciamento dos mesmos. Isso nos permite inferir que os LD desempenham além da sua função básica, que é ser instrumento auxiliar de aprendizagem dos alunos, a de nortear a prática de ensino dos professores.

Como destaca Granville (2008), o LD é um material rico em informações e uma ferramenta legitimada pelo sistema educacional brasileiro por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). De acordo com o PNLD, o livro didático deve ser escolhido com base no Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola, de acordo com a realidade sociocultural das instituições, em especial, de seus alunos e professores. O programa prevê que os professores escolham o livro que será por ele adotado e garante a distribuição desses livros para os alunos da Educação Básica.

Entretanto, mesmo considerando que o PNLD tem critérios bem definidos para a aprovação dos livros didáticos, eles não estão imunes a problemas, sejam decorrentes do seu conteúdo ou do uso inadequado. Como destaca Dante (1996), a fim de evitar um uso inadequado do LD, é importante que os professores mantenham a sua autonomia para que o LD não seja o próprio currículo da Matemática Escolar. Assim, sugere o autor, a escolha do LD deve levar em consideração a sua principal função: instrumento auxiliar do processo de ensino e de aprendizagem, e não para ser rigidamente seguido.

Portanto, com base em Dante (1996), um LD precisa satisfazer algumas condições, tais como: i) apresentar conceitos corretamente; ii) apresentar todas as linguagens (matemática, verbal, gráfica, ilustrativa, etc.) igualmente eficientes; iii) ter boa qualidade de impressão e encadernação resistente; iv) apresentar valores compatíveis com uma sociedade democrática, não endossando a discriminação a qualquer grupo social; v) levar em consideração o nível de ensino ao qual se destina. Neste sentido, espera-se que os tópicos de TN abordados em livros didáticos da Educação Básica apresentem-se com uma linguagem mais simples, adequando-se ao currículo escolar.

4. Percurso metodológico

Esta pesquisa foi desenvolvida com base numa abordagem qualitativa do tipo documental, haja vista que empregamos significados aos conteúdos apresentados em um livro didático (FIORENTINI; LORENZATO, 2007). Utilizou como fonte de dados um livro do Ensino Fundamental da Coleção “Projeto Teláris”, do autor Luiz Roberto Dante (DANTE, 2015) a fim de identificar como tópicos da Teoria dos Números são apresentados em nesse livro.

A coleção foi escolhida após a constatação de que essa era uma das mais adotadas pelas escolas públicas localizadas no município de São Gonçalo dos Campos, Bahia, Brasil, local onde o primeiro autor é professor da Educação Básica. Após a leitura dos Sumários dos 4 (quatro) livros que compõem a coleção, selecionamos o volume do 6º ano, pois entre os livros este era o que tratava explicitamente de tópicos da TN. A escolha de mais de um volume poderia acarretar em um conjunto de dados volumoso, o que inviabilizaria uma análise mais refinada dado o tempo de conclusão da pesquisa.

Do livro escolhido lemos integralmente, página por página, os capítulos 01, 02 e 05, além do Manual do Professor correspondente a cada um deles. À medida que os tópicos eram identificados, registrávamos a página e o tópico de TN ao qual ela se relacionava, observando as atividades, definições, problemas e desafios propostos pelo autor. A identificação de tópicos de TN no livro analisado foi ancorada pelo livro de Teoria Elementar dos Números de Edgard de Alencar Filho (ALENCAR FILHO, 1981). A escolha por esse livro baseou-se na proposta do autor em contribuir para a melhoria do ensino de Matemática no país.

Uma vez identificados os tópicos de TN estabelecemos categorias analíticas que nos permitiram identificar aqueles que aparecem explicitamente no livro didático e os que aparecem implicitamente no livro didático como mostraremos na seção a seguir.

Consideramos explícitos os tópicos que foram identificados no LD destinado ao aluno que utilizam expressões, conceitos ou linguagem matemática próximos daquela abordada em TN, sem levar em consideração as instruções que aparecem no Manual do Professor. Os tópicos implícitos, por sua vez, foram considerados observando as instruções do Manual do Professor e conceitos matemáticos explorados no LD destinado ao aluno que não explicitam a TN.

5. Apresentação dos dados

Os dados foram organizados em duas categorias, a saber: Tópicos Explícitos e Tópicos Implícitos. Na primeira, apresentamos conteúdos que aparecem no livro didático e que se aproximam de tópicos abordados em TN, a menos da adaptação da linguagem haja vista o ano de escolarização ao qual o LD se destina. A segunda categoria apresenta tópicos de TN que aparecem implicitamente em conteúdos apresentados no livro didático. Ou seja, esses tópicos foram identificados quando o LD se dirige apenas ao professor, ou quando, mesmo se dirigindo ao aluno, não aparecem numa linguagem próxima daquela utilizada em TN.

5.1. Tópicos explícitos



Como apontam os estudos de Groewald, Sauer e Franke (2005), Gomes (2015) e Oliveira e Fonseca (2017), é possível identificarmos tópicos de Teoria dos Números abordados na Educação Básica, mesmo após passarem por um processo de adaptação da linguagem para serem adequados ao nível a que se destina. Inicialmente, observamos que o estudo da Aritmética, no livro didático do 6º ano, centra-se nos *Números Naturais*, enquanto que nos cursos de TN a Aritmética é abordada de forma mais ampliada, visto que se estuda os Números Inteiros.

O livro didático analisado inicia o estudo dos *Números Naturais* partindo da noção de antecessor e sucessor, admitindo o número 0 (zero) como sendo natural, por meio de uma atividade intitulada Explorar e Descobrir. A atividade explora os Axiomas de Peano permitindo ao aluno concluir que o Conjunto dos Números Naturais é infinito, conforme a Figura 1 abaixo.

Explorar e descobrir

Copie e complete a sequência dos números naturais em seu caderno. Depois, responda às questões.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, ...

a) Qual é o primeiro número dessa sequência? 0

b) E o próximo? O que devemos fazer para determiná-lo? 1. Adicionamos 1 ao 0.

c) Que número vem imediatamente depois do 7? Como você fez para descobrir esse número? 8. Resposta esperada: $7 + 1$

d) E depois do 10? Você obteve esse número pelo mesmo processo usado acima? 11. Resposta esperada: Sim.

e) Como você fez para descobrir os outros números que faltavam na sequência? Resposta esperada: Adicionamos 1 ao número imediatamente anterior.

f) O sucessor de um número natural é o número que vem imediatamente depois dele na sequência dos números naturais. O que fazemos para obter o sucessor de um número natural? Adicionamos 1 ao número.

g) O antecessor de um número natural é o número que vem imediatamente antes dele na sequência dos números naturais. O que fazemos para obter o antecessor de um número natural? Subtraímos 1 desse número.

h) Copie e complete os esquemas em seu caderno, para obter o sucessor e depois o antecessor do 4 e do 13.

i) O que devemos fazer para obter qualquer número da sequência dos números naturais? Adicionar 1 ao número que vem imediatamente antes ou subtrair 1 do número que vem imediatamente depois.

Diagramas de sucessão e antecessão:

- 4 → 5 (adicionar 1)
- 13 → 14 (adicionar 1)
- 3 → 4 (adicionar 1)
- 12 → 13 (adicionar 1)
- 5 → 4 (subtrair 1)
- 14 → 13 (subtrair 1)
- 4 → 3 (subtrair 1)
- 13 → 12 (subtrair 1)

Figura 1. Axiomas de Peano.
Fonte: DANTE (2015, p.26).

Observamos que os *Axiomas de Peano* são explorados numa linguagem diferente daquela que é apresentada em TN. Entretanto, ambas as abordagens têm como objetivo construir uma teoria do Conjunto dos Números Naturais que fundamenta as propriedades de suas operações usuais e da relação de ordem.

O LD segue apresentando a sequência dos números pares e ímpares recorrendo, mais uma vez, a uma atividade de Explorar e Descobrir. Tem o objetivo de levar os alunos a compreenderem que um número par termina com algarismos 0, 2, 4, 6, e 8, enquanto os números ímpares terminam em 1, 3, 5, 7 e 9, como se observa na Figura 2.

Explorar e descobrir

Analise algumas sequências formadas por números naturais. Em seu caderno, copie cada uma delas e responda às questões.

a) Sequência dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, ...

- Um número par termina com qual algarismo? 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Qual é o resto da divisão de qualquer número par por 2?

b) Sequência dos números naturais ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, ...

- Um número ímpar termina com qual algarismo? 1, 3, 5, 7 ou 9.
- Qual é o resto da divisão de qualquer número ímpar por 2?

c) Sequência dos números quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, ...

• Por que é dado esse nome à sequência? Provável resposta: porque os pontos que contamos estão desenhados em uma disposição que lembra um quadrado.

• Como podemos descobrir os termos dessa sequência sem fazer desenhos?
Fazendo $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, e assim por diante ou $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, e assim por diante.

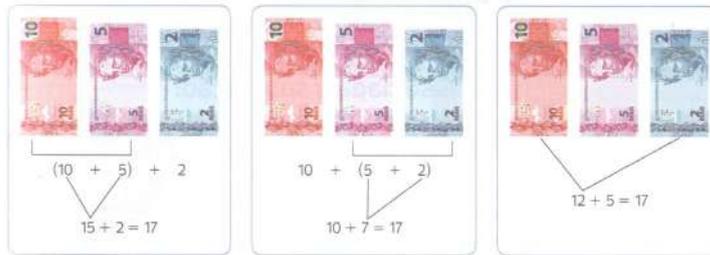
• Escreva em seu caderno os 10 primeiros números dessa sequência. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Figura 2. Paridade.
Fonte: DANTE (2015, p.27).

Vê-se que a ideia de *Paridade de um Número Inteiro* é apresentada no livro recorrendo às estratégias da TN quando se pergunta sobre o resto da divisão de um número par e de um número ímpar por 2 e explora a sequência dos números quadrados perfeitos. Em relação às *Propriedades dos Inteiros*, identificamos que o LD as apresenta como se emergissem de um padrão a ser encontrado pelo aluno ao realizar as atividades propostas na seção Explorar e Descobrir, como se vê nas Figuras 3 e 4. Essa estratégia utilizada no LD difere do que ocorre em TN, quando se considera que o Conjunto dos Números Inteiros é munido de tais propriedades.

Propriedade associativa

Observe como podemos calcular a quantia total destas três cédulas juntas.



Mesmo agrupando as parcelas de modos diferentes, a soma final é sempre a mesma.

Explorar e descobrir

1. Copie em seu caderno e verifique se acontece o mesmo nos itens a seguir. Comece sempre pela adição que está entre parênteses.

a) $(100 + 50) + 30$	$150 + 30 = 180$	b) $201 + (40 + 101)$	$201 + 141 = 342$	c) $(37 + 49) + 23$	$86 + 23 = 109$
$100 + (50 + 30)$	$100 + 80 = 180$	$(201 + 40) + 101$	$241 + 101 = 342$	$37 + (49 + 23)$	$37 + 72 = 109$
2. Agora responda: o que acontece com a soma final em uma adição de três ou mais parcelas quando agrupamos (associamos) as parcelas de formas diferentes? A soma final permanece a mesma.

Dizemos que a adição possui a **propriedade associativa**, ou seja:

Em uma adição de três ou mais parcelas, é indiferente quais delas vamos adicionar primeiro.

Figura 3. Propriedade Associativa da Adição.
Fonte: DANTE (2015, p.39).

Propriedade comutativa

Explorar e descobrir

Vamos organizar pontinhos em disposição retangular.

- a) Em seu caderno, faça 3 linhas com 4 pontinhos em cada uma delas.
- b) Agora, faça 4 linhas com 3 pontinhos em cada uma delas.
- c) Quantos pontinhos você fez em cada construção? Represente cada situação com uma multiplicação.
- d) Experimente fazer outras construções como essas e verifique o que acontece. Escreva o que você observou.



12 pontinhos: 4×3 ou 3×4

Dizemos que a multiplicação possui a **propriedade comutativa**:

Em uma multiplicação, trocando a ordem dos fatores, o produto permanece o mesmo. Ou seja, a ordem dos fatores não altera o produto.

Proporiona a construção de regiões retangulares em papel quadriculado. Determine o número de linhas, a quantidade de quadradinhos de cada linha e peça aos alunos que pintem as regiões.

Figura 4. Propriedade Comutativa da Multiplicação.
Fonte: DANTE (2015, p.45).

Verificamos que o Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE) aparece no LD quando o autor apresenta a ideia de divisão exata e não-exata. O LD conclui que para verificar se uma divisão foi realizada corretamente basta fazer $D = d \cdot q + r$, onde D é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto, conforme a Figura 5.

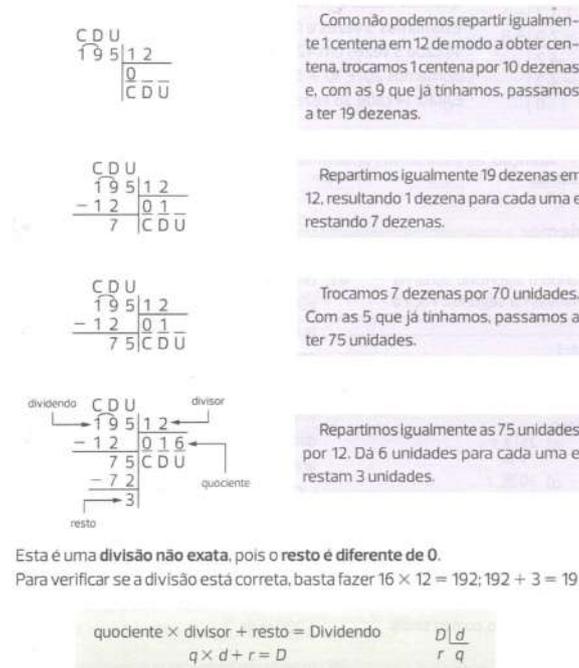


Figura 5. Algoritmo da Divisão Euclidiana.
 Fonte: DANTE (2015, p.53).

Outro tópico de TN identificado no livro didático foi a Relação de Divisibilidade, quando apresenta o conteúdo Múltiplo e Divisor de um Número Natural. O livro, recorrendo ao Algoritmo da Divisão, utiliza exemplos para mostrar quando um número é ou não divisor de um outro número, como mostrado na Figura 6.

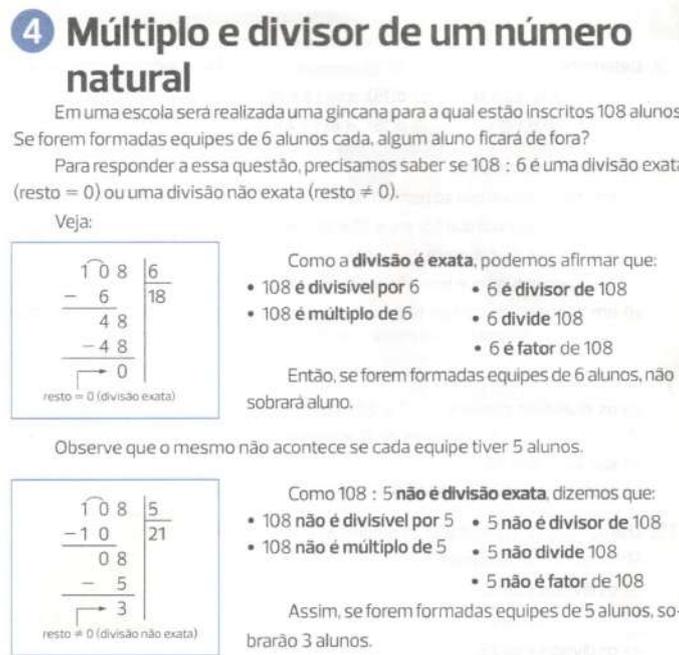


Figura 6. Relação de divisibilidade.
 Fonte: DANTE (2015, p.132).

O tópico Números Primos, que em TN é apresentado por meio de Definição, é abordado na seção Explorar e Descobrir sugerindo que o aluno investigue todos os divisores de uma dada lista de números construindo regiões retangulares, como se vê nas Figuras 7 e 8.

Explorar e descobrir

Vamos achar os divisores de 16 ou fatores de 16 pelo processo geométrico. Desenhamos todas as regiões retangulares cuja área seja 16 e cujas medidas dos lados sejam números naturais. Essas medidas são os divisores de 16 ou os fatores de 16:

Atenção! O quadrado é um caso particular de retângulo.

16

2 8

4 4

Faça o que se pede em seu caderno.

1. Observe as regiões acima e responda: quais são os divisores de 16? 1, 2, 4, 8 e 16
2. Em uma folha de papel quadriculado, descubra e registre todos os divisores abaixo construindo regiões retangulares. Veja as construções no Manual do Professor. Recorte e cole no caderno.

a) d(12) 1, 2, 3, 4, 6, 12 d) d(7) 1, 7
b) d(5) 1, 5 e) d(9) 1, 3, 9
c) d(20) 1, 2, 4, 5, 10, 20 f) d(3) 1, 3

Figura 7. Explorar e Descobrir.
Fonte: DANTE (2015, p.130).

5 Número primo

Explorar e descobrir

Observe as regiões retangulares que você obteve na questão 2 da seção Explorar e descobrir da página 130 e responda.

- a) Você desenhou a mesma quantidade de regiões retangulares para cada um dos números? Não
- b) Para quais números você desenhou apenas uma região retangular? 3, 5 e 7
- c) Então, quantos divisores tem cada um desses números? 2 divisores. Quando isso acontece, eles são chamados de **números primos**.

Número primo é todo número natural maior do que 1 que tem exatamente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

Figura 8. Números primos.
Fonte: DANTE (2015, p.139).

No LD, o Crivo de Erastóstenes (Figura 9) é apresentado na seção Explorar e Descobrir seguindo os passos estudados em TN. Também identificamos a Decomposição Canônica de um Inteiro Positivo $n > 1$, que em TN é estudada como consequência imediata do Teorema Fundamental da Aritmética, como se vê na Figura 10 a seguir.

Crivo de Eratóstenes

 **Explorar e descobrir**

Quais são os números primos até 100?

Eratóstenes, matemático, geógrafo e astrônomo grego, criou um método simples e prático para a obtenção de números primos até um determinado limite: o **Crivo de Eratóstenes**.

Veja e faça junto.

- 1ª) Construa em seu caderno um quadro com os números naturais de 2 até 100.
- 2ª) Risque os múltiplos de 2 maiores do que 2.
- 3ª) Risque os múltiplos de 3 maiores do que 3.
- 4ª) Risque também os múltiplos de 5 e os múltiplos de 7 maiores do que eles.
- 5ª) O maior número primo a ser checado corresponde à raiz quadrada do valor-limite, arredondado para baixo. Neste exemplo, como $\sqrt{100} = 10$, o maior número a ser checado é o 7.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Os números que não foram riscados são os números primos até 100. Você já descobriu quais são eles?

Figura 9. Crivo de Eratóstenes.
Fonte: DANTE (2015, p.140).

Decomposição de um número natural em fatores primos

Veja o número 36 escrito como produto de dois ou mais números naturais. São algumas **fatorações** do número 36.

- $36 = 6 \times 6$
- $36 = 2 \times 18$
- $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
- $36 = 2 \times 2 \times 9$

De todas as fatorações do número 36, há uma em que todos os fatores são números primos: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$. Ela é a **decomposição do número 36 em fatores primos** ou a **fatoração completa do número 36**.

Quando há fatores repetidos em uma fatoração, podemos usar a potenciação para simplificar a sua escrita.

Fatorar um número é transformá-lo em uma multiplicação (mostrar os fatores).

Então a fatoração completa de 36 pode ser escrita:
 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ou
 $36 = 2^2 \times 3^2$

Quando um número é primo, não há o que fatorar. Para números naturais não primos e maiores do que 1, existem processos para decompor esse número natural em fatores primos.

Figura 10. Decomposição canônica de um inteiro positivo $n > 1$.
Fonte: DANTE (2015, p.141).

Observamos que, ao tratar da Decomposição Canônica de um Inteiro Positivo $n > 1$, o LD faz referência a Números Compostos e passa a apresentar processos de decomposição desses números em fatores primos. Ao mostrar esses processos, o LD apresenta o Teorema Fundamental da Aritmética por meio de uma

observação, como se este fosse decorrente de exemplos realizados anteriormente, conforme Figura 11.



Figura 11. Teorema Fundamental da Aritmética.
Fonte: DANTE (2015, p.142).

O LD segue explorando o tópico Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC) recorrendo, para isso, aos Divisores e Múltiplos de um Número Natural. Propõe que o MDC pode ser determinado pela listagem de divisores comuns para, posteriormente, identificar entre eles o maior, conforme a Figura 12, bem como apresenta um processo prático para a determinação do MDC (Figura 13).

6 Máximo divisor comum (mdc)

Ivo tem 12 selos e 30 figurinhas repetidas. Ele quer reparti-las igualmente entre um grupo de amigos de modo que não sobrem selos nem figurinhas. Qual é o número máximo de amigos que o grupo pode ter para que isso seja possível?

Os 12 selos podem ser distribuídos entre:

1, 2, 3, 4, 6 ou 12 amigos
divisores de 12

Assim, $d(12)$: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

As 30 figurinhas podem ser distribuídas entre:

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ou 30 amigos
divisores de 30

Assim, $d(30)$: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Então, os selos e as figurinhas podem ser distribuídos, **ao mesmo tempo**, entre:

1, 2, 3 ou 6 amigos
divisores comuns de 12 e 30

Assim, $dc(12, 30)$: 1, 2, 3, 6.

O número máximo de amigos que o grupo pode ter é 6 (**máximo divisor comum** de 12 e 30).

Indicamos assim: **$mdc(12, 30) = 6$** , que se lê "máximo divisor comum de 12 e 30 é igual a 6".

Então, Ivo deve repartir os selos e as figurinhas para um grupo de 6 amigos.

Agora, vamos determinar o maior dos divisores comuns entre 24 e 36:

- divisores de 24 $\rightarrow d(24)$: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
- divisores de 36 $\rightarrow d(36)$: 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36
- divisores comuns entre 24 e 36 $\rightarrow dc(24, 36)$: 1, 2, 3, 6, 12

O maior dos divisores comuns entre 24 e 36 é 12, ou seja, $mdc(24, 36) = 12$.

Examinando as duas situações anteriores, podemos definir:

O **máximo divisor comum (mdc)** de dois ou mais números naturais é o maior dos divisores comuns desses números.



Ivo com suas figurinhas e selos.

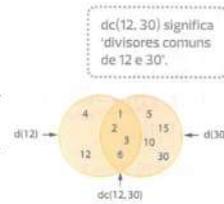


Figura 12. Máximo Divisor Comum.
 Fonte: DANTE (2015, p.143).

Processo prático para determinação do mdc

Veja os exemplos:

a) $mdc(120, 252)$

Fazemos a decomposição dos dois números em fatores primos. O mdc será obtido com o produto de **todos os fatores que são comuns** às duas decomposições.

120	2	252	2
60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

$$mdc(120, 252) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Processo simplificado

120, 252	2	← fator comum (divide 120 e 252)
60, 126	2	← fator comum (divide 60 e 126)
30, 63	2	← so divide o 30 (não é fator comum)
15, 63	3	← fator comum (divide 15 e 63)
5, 21	3	← so divide o 21 (não é fator comum)
5, 7	5	← so divide o 5 (não é fator comum)
1, 7	7	← so divide o 7 (não é fator comum)
1, 1		

$$mdc(120, 252) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Figura 13. Processo prático para a determinação do MDC.
 Fonte: DANTE (2015, p.144).

O MMC é apresentado de modo análogo, recorrendo à listagem dos Múltiplos Comuns seguido da identificação do menor entre eles, conforme mostra a Figura 14, bem como apresenta um processo prático para a determinação do MMC (Figura 15).

7 Mínimo múltiplo comum (mmc)

Sabrina está doente. O médico receitou-lhe um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 4 em 4 horas. Sua mãe deu-lhe um comprimido e uma colher de xarope à zero hora (meia-noite). Qual é o primeiro horário em que Sabrina voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo?

Uma maneira de resolver essa situação é escrever todos os horários e apontar aquele que dá a resposta desejada:

- Horários para tomar comprimido → $0, 6, 12, 18, 24$
múltiplos de 6, até 24
- Horários para tomar xarope → $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24$
múltiplos de 4, até 24
- Horários em que coincidem os dois remédios → $0, 12, 24$
múltiplos comuns de 6 e 4, até 24
- Primeiro horário após zero hora → 12, que é o **mínimo múltiplo comum** de 6 e 4.
Indicamos assim: $\text{mmc}(6, 4) = 12$.

Logo, o primeiro horário após zero hora em que Sabrina voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo será às 12 horas (meio-dia).

Examinando a situação acima, podemos definir:

O **mínimo múltiplo comum (mmc)** de dois ou mais números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo comum desses números.



Criança doente sendo medicada por adulto.

Comente com os alunos a importância de só tomar medicamentos com prescrição médica.

Figura 14. Mínimo Múltiplo Comum.
Fonte: DANTE (2015, p.145).

Processo prático para a determinação do mmc

Você já fez o cálculo do $\text{mmc}(14, 35) = 70$ usando as sequências de múltiplos de cada um desses números. Veja agora como chegar ao mesmo valor (70) usando a decomposição em fatores primos.



Basta usar o mesmo dispositivo do mdc, fazendo a decomposição simultânea dos números em fatores primos.

Só que, para obter o mmc, devemos multiplicar não só os fatores primos comuns, mas também os demais fatores.

$$\begin{array}{r|l} 14, 35 & 2 \\ 7, 35 & 5 \\ 7, 7 & 7 \\ 1, 1 & 70 \leftarrow 2 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline \text{mmc}(14, 35) & = 70 \end{array}$$

Outros exemplos:

$$\begin{array}{r|l} 52, 78 & 2 \\ 26, 39 & 3 \\ 13, 39 & 3 \\ 13, 13 & 13 \\ 1, 1 & 156 \leftarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \\ \hline \text{mmc}(52, 78) & = 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12, 18 & 2 \\ 6, 9 & 2 \\ 3, 9 & 3 \\ 1, 3 & 3 \\ 1, 1 & 36 \leftarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline \text{mmc}(12, 18) & = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8, 10, 14 & 2 \\ 4, 5, 7 & 2 \\ 2, 5, 7 & 2 \\ 1, 5, 7 & 5 \\ 1, 1, 7 & 7 \\ 1, 1, 1 & 280 \leftarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline \text{mmc}(8, 10, 14) & = 280 \end{array}$$

Figura 15. Processo prático para determinação do MMC.
Fonte: DANTE (2015, p.147).

A análise empreendida nos permitiu identificar os seguintes tópicos de TN que aparecem explicitamente na Educação Básica: Números Naturais, Axiomas de Peano, Paridade de um Número Inteiro, Propriedade dos Inteiros, Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE), Relação de Divisibilidade, Primalidade, Crivo de Eratóstenes, Decomposição Canônica de um Inteiro Positivo $n > 1$, Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

5.2. Tópicos implícitos

Nesta categoria, como mencionamos anteriormente, buscamos identificar tópicos da TN que aparecem implicitamente em conteúdos abordados na Educação Básica. Inicialmente, identificamos que o tópico Congruência (Figura 16) aparece implicitamente no LD quando são apresentados critérios de divisibilidade¹. Gomes (2015) afirma que os critérios de divisibilidade na Educação Básica são abordados de maneira meramente decorativa, sendo um dos tópicos que mais se afasta da TN, pois não há apreço ao rigor técnico matemático, levando os alunos a acreditarem no

¹ Sugerimos a leitura da dissertação de Gomes (2015) na qual o autor apresenta uma proposta de abordagem do ensino de Congruência na Educação Básica.

que está proposto no LD. A Figura 16 é um extrato da explicação do LD sobre o critério de divisibilidade por 2. O LD utiliza o mesmo caminho para expor os critérios de divisibilidade por 3, 4, 6, 9 e 10.

Divisibilidade por 2

Explorar e descobrir

Observe a divisão ao lado. Como o resto é zero, ela é uma divisão exata.

Os números que podem substituir o ■ são os números naturais divisíveis por 2. Quais são eles? 0, 2, 4, 6, 8, ... ou os números naturais pares.

Como é o resto na divisão de um número natural ímpar por 2? Resto 1.

Podemos então escrever o **critério de divisibilidade por 2**:

Um número natural é divisível por 2 quando ele é número par, ou seja, quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Figura 16. Congruência.
Fonte: DANTE (2015, p.133).

Identificamos também que, apesar de o LD apresentar explicitamente o Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE) (ver Figura 5), deixa implícita a discussão sobre a unicidade do resto. Observemos, na Figura 17, a mensagem direcionada ao professor quando o LD chama a atenção para o fato de que $0 \div 0$ é uma indeterminação. Caso contrário, se fosse possível determinar $0 \div 0$, não estaria garantida a unicidade do quociente, visto que, teríamos: $0 = 0 \cdot q + r$, para qualquer $q \in \mathbb{Z}$ com $r = 0$.

0 zero na divisão

- Analise os exemplos com atenção.
- a) $5 : 0$ é impossível, pois não existe número natural que multiplicado por 0 dê 5.
b) $7 : 0$ é impossível, pois não existe número natural que multiplicado por 0 dê 7.
- Não é possível a divisão de um número natural por zero.
- a) $0 : 5 = 0$, pois $0 \times 5 = 0$
b) $0 : 11 = 0$, pois $0 \times 11 = 0$
- Chame a atenção para o fato de que $0 : 0$ ou $0 \div 0$ é uma indeterminação, pois qualquer número multiplicado por 0 dá 0.
- Zero dividido por qualquer número natural, diferente de zero, dá sempre zero.

Figura 17. ADE: unicidade do resto.
Fonte: DANTE (2015, p.55).

Observamos também que apesar do TFA aparecer explicitamente no LD (ver Figura 11) algumas consequências desse teorema que, geralmente, são apresentadas em formas de corolários em TN, aparecem implicitamente no LD.

Vejam, na Figura 18, que o LD alerta o professor para o fato de que a decomposição de um inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos é única, a menos da ordem dos fatores. No Manual do Professor, este resultado é retomado novamente na página 373 de forma semelhante à Figura 18.

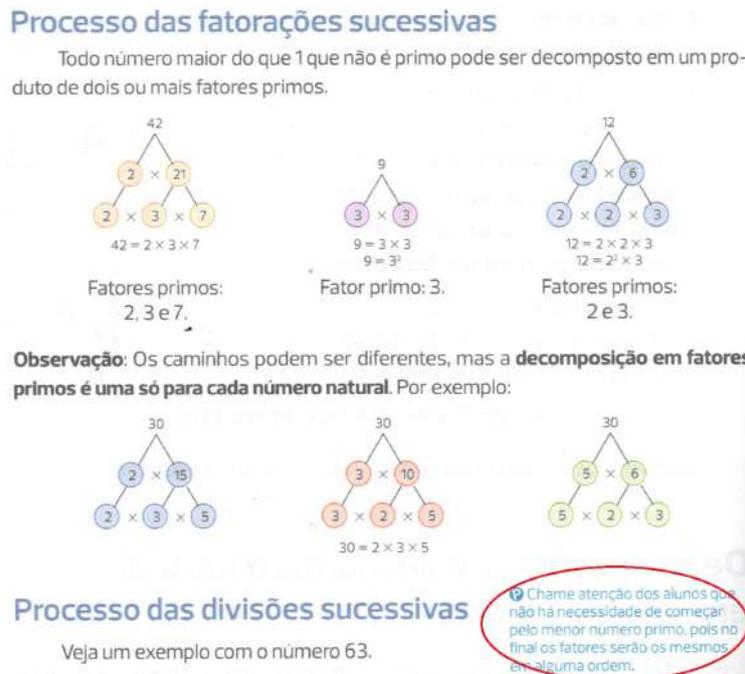


Figura 18. Unicidade da decomposição de um número $n > 1$ em fatores primos.
Fonte: DANTE (2015, p.142).

Por fim, o LD apresenta no Manual do Professor, como leitura complementar, a *Representação dos Inteiros em outras Bases*. A base escolhida foi a binária e o LD a apresenta fazendo um paralelo com a base decimal, como é possível verificar na Figura 19. Por fim, desafia o professor a escrever o mesmo número utilizado como exemplo na base 5.

A maneira prática de obter isso é fazer sucessivamente a divisão por 2:

$$\begin{array}{r} 123 \overline{) 2} \\ \underline{16} \\ 130 \\ \underline{10} \\ 015 \\ \underline{14} \\ 01 \\ \underline{0} \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

Lendo o último quociente e os restos de baixo para cima, temos:

$$1111011_{\text{base } 2}$$

Na base 10, usamos 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9).

Na base 2, usamos apenas 2 símbolos (0 e 1).

Atualmente, os computadores operam utilizando o sistema de numeração binária (ou de base 2).

Você sabe escrever o número 123 na base 5? Quantos símbolos usamos na base 5? Quais são eles?

Resolução:

$$\begin{array}{r} 123 \overline{) 5} \\ \underline{3} \\ 44 \end{array}$$

Respostas: $443_{\text{base } 5}$; 5 símbolos; 0, 1, 2, 3 e 4.

Figura 19. Representação em outras bases.
Fonte: DANTE (2015, p.371).

Nesta categoria, mostramos que mesmo implicitamente tópicos de TN, como Congruência e Representação dos Inteiros em outras Bases, são abordados na Educação Básica. Nela, também mostramos a existência de aspectos associados a tópicos como Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE) e Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) que aparecem explicitamente no LD e que podem ser melhor identificados quando observamos os textos destinados exclusivamente ao professor.

6. Discussão dos dados

Neste estudo, analisamos em duas categorias tópicos de TN presentes em um LD da Educação Básica. Notamos que os tópicos de TN abordados na Educação Básica são apresentados de maneira formal, por meio de definição, e informal, por meio de discussões de seção, observações, diálogos com o professor, explorações e em outras leituras. Em cursos de TN, os mesmos tópicos são apresentados através de axiomas, definições, proposições, teoremas e corolários, intercalados com exemplos.

Na Tabela 1, apresentamos uma sistematização que mostra como são explorados os tópicos de TN na Educação Básica em comparação à forma como são apresentados em Teoria dos Números.

	TÓPICOS	LD	TN
T ÓPICOS L E V A N T	Números Naturais	Definição	Definição
	Axiomas de Peano	Explorar e Descobrir	Axiomas
	Paridade de um Número Inteiro	Explorar e Descobrir	Definição
	Propriedade dos Inteiros	Explorar e Descobrir	Axiomas

	Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE)	Discussão de Seção	Algoritmo
	Relação de Divisibilidade	Discussão de Seção	Definição
	Primalidade	Explorar e Descobrir	Definição
	Crivo de Eratóstenes	Explorar e Descobrir	Definição
	Decomposição Canônica de um Inteiro Positivo $n > 1$	Discussão de Seção	Corolário
	Teorema Fundamental da Aritmética (TFA)	Diálogo com o professor	Teorema
	Máximo Divisor Comum (MDC)	Definição	Definição
	Mínimo Múltiplo Comum (MMC)	Definição	Definição
TÓPICOS IMPLÍCITOS	Congruência	Explorar e Descobrir	Definição
	Representação dos Inteiros em outras Bases	Outras Leituras	Teorema
	Algoritmo da Divisão Euclidiana (ADE): Unicidade do Resto	Diálogo com o professor	Corolário
	Teorema Fundamental da Aritmética (TFA): Unicidade da Decomposição de um Inteiro $n > 1$ em Fatores Primos	Diálogo com o professor	Corolário

Tabela 1. Síntese dos tópicos

De acordo com a Tabela 1, há tópicos como MMC, MDC e Números Naturais, que são apresentados tanto no LD, quanto em TN por meio de Definição. Por outro lado, percebemos que alguns tópicos, que em TN são apresentados como corolários e teoremas, no LD são apresentados remetendo a uma discussão com o professor ou a uma discussão de abertura de seção, nas quais o autor estabelece um diálogo com o professor, para que este discuta com seus alunos. Outro ponto que chama a atenção é o fato de que alguns tópicos, que em TN são apresentados como Definição ou Axioma, no LD aparecem na seção Explorar e Descobrir. Identificamos que ao trabalhá-los nesta seção, o autor procura, por meio de exercícios, desenvolver generalizações a partir da identificação de um padrão.

Observamos também que a sequência dos tópicos vistos na Educação Básica difere da sequência apresentada em TN. Por exemplo, os tópicos de MMC e MDC aparecem no LD após a discussão do TFA e da Decomposição Canônica, fundamentando o uso de processos práticos para determinar o MDC e MMC. Em TN é apresentado o tópico de MDC e MMC sem fazer o uso da Decomposição Canônica, que é apresentada posteriormente.

Assim, a análise empreendida sobre os tópicos identificados aponta que: há uma adaptação da linguagem, principalmente quando se referem a Corolários ou a Teoremas da Teoria dos Números; recorre-se ao uso de generalizações a partir de exemplos para apresentar Axiomas e Definições da TN; a sequência da apresentação dos tópicos na Educação Básica difere daquela adotada em TN.

7. Considerações finais

A presente pesquisa teve como objetivo identificar tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica a partir da análise de um Livro Didático. Foram identificados 16 tópicos estudados em TN na Educação Básica. Observamos que destes, 12 são apresentados de maneira explícita, para o professor e para os alunos, pois utilizam expressões, conceitos e linguagem matemática próximos dos

abordados em TN, e 4 são apresentados de maneira implícita, pois não explicitam a TN ao explorar os conceitos matemáticos no LD.

Os estudos de Groenwald, Sauer e Franke (2005), Gomes (2015) e Oliveira e Fonseca (2017) apontam que há um distanciamento da TN com a Educação Básica. Este artigo mostra o quanto é importante ter esses cursos mais próximos da Educação Básica, pois há muitos tópicos de TN que serão trabalhados pelo futuro professor. Desta forma, o professor precisa compreender esse contexto para ter condições de fazer essas aproximações entre os tópicos vistos em TN e o que ele vai ensinar na Educação Básica.

Por fim, visando propor pesquisas futuras, propomos investigar todos os volumes de uma coleção de livros do ensino fundamental e médio da Educação Básica, a fim de identificar outros tópicos de TN, que devido a limitação da pesquisa, por termos analisado um único volume, podem não ter sido abordados neste estudo.

Referências

- Alencar Filho, E. (1981). *Teoria elementar dos números*. Nobel.
- Barbosa, J. C. e Queiroz, M. R. P. P. P.; QUEIROZ, Maria Rachel P. Pessoa P. (2016). *Características da Matemática Financeira Expressa em Livros Didáticos: conexões entre a sala de aula e outras práticas que compõem a Matemática Financeira disciplinar*. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 30:56, 1280-1299.
- Dante, L. R. (1996). *Livro didático de matemática: uso ou abuso? Em aberto*, 16:69.
- Dante, L. R. (2015). *Projeto Teláris – Matemática. 6º ano do Ensino Fundamental*. Ática, São Paulo.
- Fiorentini, D. e Lorenzato, S. (2007). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados, Campinas.
- Gomes, A. R. G. et al. (2015). *Uma abordagem do ensino de congruência na educação básica*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana.
- Granville, M. A. (2008). *O discurso pedagógico dos livros didáticos da década de sessenta: reflexos ou reproduções das políticas públicas de educação da época*. *Jornada Internacional de Estudos do Discurso*, 1.
- Groenwald, C. L. O., Sauer, L. O. e Franke, R. F. (2005). *Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números*. *Acta Scientiae*, 7:1, 93-102.
- Hefez, A. (2006). *Elementos de aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio

de Janeiro.

Lajolo, M. (2008). *Livro didático: um (quase) manual de usuário*. Em aberto, 16:69.

Mandler, M. L. (2016). *A Teoria de Números na formação inicial do professor de Matemática: conexões entre o conhecimento específico e o conhecimento matemático para o ensino na escola básica*. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Matemática – Ebrapem, 20, 2016, Curitiba, PR. Anais (online). Acesso em 19 de agosto de 2019, de http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd7_marnei_mandler.pdf

Oliveira, G. P. e Fonseca, R. V. (2017) A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. *Ciência & Educação (Bauru)*, 23:4, 881-898.

Resende, M. R. (2007). *Re-significado a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC-SP.

Santos, G. L. e Barbosa, J. C. (2017). Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos. *Educação Matemática Pesquisa*, 19:2.

AUTORES

Michel Pedreira da Silva Pinto: Licenciado em Matemática pela UEFS (2019). Email: michel.pedreira15@gmail.com.

Jaqueline de Souza Pereira Grilo: Licenciada em Matemática pela UEFS (2002), mestre em Educação pela UFBA (2014) e doutora em Educação pela UFBA (2019), atualmente é professora auxiliar da UEFS. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando em ensino de matemática e formação de professores. Email: jspgrilo@uefs.br

Marcos Grilo: Licenciado em Matemática pela UEFS (2001), mestre em Matemática pela UFPE (2004) e doutor em Difusão do Conhecimento pela UFBA (2016), atualmente é professor adjunto da UEFS. Tem experiência em Teoria de Redes, Ensino de Matemática, Teoria dos Grafos, Geometria e Topologia. Email: grilo@uefs.br