REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 58. Abril 2020
Páginas 191-196

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

# Curvas crecientes y porcentajes

**Uldarico Malaspina Jurado**
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

## Problema

*Un día, el número de casos positivos de una enfermedad pandémica, reportados en un país A es 3 600 y en un país B es 11 000; pero el día anterior los números de casos positivos reportados fueron 3 000 en el país A y 10 000 en el país B, Ante esta información, Julio pregunta ¿esto quiere decir que el avance del número de casos positivos en el país B es mayor que en el país A?*

En esta época, marcada por la pandemia Covid 19, se ha escuchado hablar mucho sobre curvas crecientes y decrecientes. Un problema tan serio como la pandemia, ha puesto en evidencia, en la vida cotidiana, la relación tan estrecha que hay entre realidad y matemática. Surgen entonces muchas preguntas relacionadas con la situación, que tienen un sentido matemático, como la pregunta con la que iniciamos este artículo; ciertamente, son también oportunidades para reflexionar con nuestros estudiantes, usando y aclarando algunos conceptos matemáticos.

En verdad, hay muchos conceptos matemáticos inherentes al problema de la pandemia, a su estudio y a la búsqueda de soluciones. Algunos de ellos son porcentajes, proporciones, curvas, funciones (que conllevan a las crecientes y decrecientes), crecimiento lineal, crecimiento exponencial, crecimiento porcentual, punto de inflexión, ajuste de curvas, incertidumbre, probabilidades, predicciones, estadística, modelo matemático, ecuaciones diferenciales, etc. Estas palabras, o algunas otras relacionadas con estas, se vienen escuchando de periodistas, médicos, investigadores, políticos, y aun en conversaciones cotidianas. Por cierto, no hemos estado habituados a estas expresiones, por las limitaciones en la cultura matemática, como consecuencia del tipo de formación matemática que usualmente se recibe en los centros educativos. Su comprensión profunda requiere profundidad en conocimientos matemáticos, pero hay algunos conocimientos básicos que consideramos oportuno aclarar, para favorecer reflexiones y aprendizajes de nuestros estudiantes, teniendo como marco una situación real y usando la pregunta inicial. En lo que sigue, nos referiremos a algunos conceptos más vinculados con contenidos de la secundaria (funciones reales de variable real); sin embargo, usando solamente información dada en tablas, podrían hacerse reflexiones con estudiantes desde los últimos grados de primaria, haciendo comparaciones y usando porcentajes. Todo esto, como parte de la importancia de examinar relaciones entre los datos de la información cuantitativa que se reciba, y de buscar mayor información que relativice y dé un contexto más amplio a la información recibida.

## Curvas

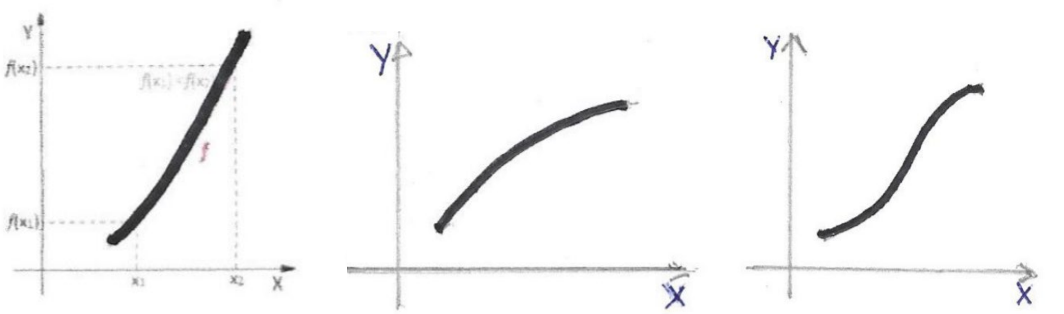
El concepto matemático de curva forma parte de la geometría diferencial, pero en el contexto de este artículo, basta considerarla como la gráfica de una función continua $f$, real de variable real, cuyo dominio es un intervalo del tiempo. Podría no conocerse la expresión algebraica de tal función, pero sí algunos valores, tomados de la realidad. La curva se obtiene uniendo en el plano cartesiano los puntos correspondientes a esos valores conocidos, mediante segmentos de recta o mediante trazos continuos, suponiendo un comportamiento de acuerdo con la tendencia que marca la ubicación de los puntos. Una alternativa más formal, es usar los datos conocidos para encontrar una función, cuya gráfica se aproxime y represente al conjunto de puntos correspondientes a los valores conocidos. Esto es lo que se llama hacer un ajuste a una determinada función con expresión algebraica específica. Otra alternativa es usar los datos para considerarlos en un modelo matemático; así, en situaciones de crecimiento poblacional, suele usarse como hipótesis que la variación en el tiempo, del número de casos, es directamente proporcional a la cantidad de casos presente. Este supuesto, da lugar a una ecuación diferencial y a una función exponencial.

## Funciones crecientes

Suele hacerse una identificación entre una función real de variable real y la curva que representa sus puntos en el plano y se puede percibir gráficamente si una función es creciente, observando que la curva correspondiente “crece de izquierda a derecha”; sin embargo, es importante distinguir diferentes tipos de crecimiento, y tener una definición más formal de función creciente:

> *Una función $f$, real de variable real, es creciente si y solo si para todo par de valores $x_1$, $x_2$ de su dominio, si $x_1 < x_2$, necesariamente $f(x_1) < f(x_2)$.*

En la Figura 1, ilustramos en (a) lo dicho en esta definición. En (b) y en (c) mostramos otras formas de curva creciente, y el lector puede imaginar otras. También es importante aclarar que una función puede no ser creciente (o decreciente) en todo su dominio, pero tener intervalos en los que es creciente e intervalos en los que es decreciente, o inclusive constante. Un caso como éste, se muestra en la Figura 2.




(a) (b) (c)

Figura 1

Según la definición dada, si una función es creciente, al considerar dos valores cualesquiera de la variable independiente, en el dominio de la función, el valor correspondiente al menor valor de la variable siempre será menor que el valor correspondiente al valor mayor de la variable. Si la variable independiente es el tiempo, medido, por ejemplo, en días, ocurrirá entonces que el valor de la función en el día 3 (o sea $f(3)$ ) será menor que el valor de la función en cualquier día posterior a ese día 3, por ejemplo, que el valor de $f$ en el día 7 (o sea $f(3) < f(7)$).

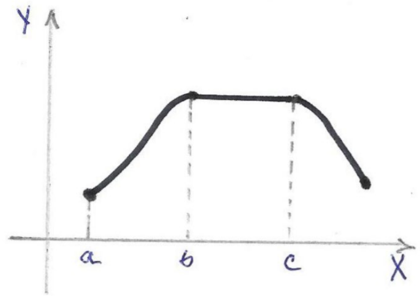



Figura 2

En la Figura 2, se muestra el caso de una curva que no es creciente en todo su dominio. Para valores entre $a$ y $b$, sí es creciente; para valores entre $b$ y $c$, es constante; y para valores mayores que $c$, es decreciente.

Si la función se está generando al registrar casos, por ejemplo, de infectados por el Covid-19, y se verificó que, en una primera fase, lamentablemente, cada día era mayor el número de infectados, se trata de una función creciente; sin embargo, es importante distinguir diferentes tipos de crecimiento. Por ejemplo, si cada día el aumento es mayor que el aumento registrado el día anterior, diremos que se está teniendo un caso de crecimiento "cada vez más rápido". Curvas con este tipo de crecimiento son las que se llaman convexas, o como suele llamarse en algunos textos "cóncavas hacia arriba". En la Figura 1 (a) tenemos un ejemplo de curva creciente de "crecimiento rápido".

En la Figura 3 presentamos una curva de crecimiento rápido, mostrando de manera más evidente los cambios en la velocidad del crecimiento, representados por las longitudes de los "segmentos verticales gruesos", que son cada vez más grandes. Notar que se han considerado puntos consecutivos en el dominio de la función y así la longitud de cada segmento representa la diferencia entre el valor de la función en un punto y el valor de la función en un punto inmediatamente anterior.

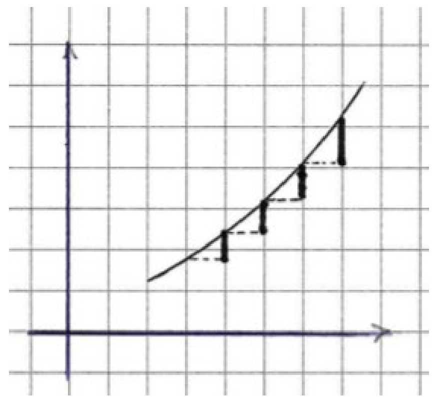


Figura 3

Si la variable independiente fuera el tiempo, medido en días, esas diferencias serían las que corresponden a los valores de la función en un día y en el día anterior a tal día.

Las funciones exponenciales, cuya expresión algebraica es $f(x) = a^x$, para $a > 1$, tienen una gráfica con un comportamiento parecido al que mostramos en la Figura 3, cuando $x > 0$ (crecen cada vez más rápido). En ese sentido, es frecuente escuchar hablar del *crecimiento exponencial*, al referirse a crecimientos acelerados. Cabe aclarar que la función exponencial no es la única que tiene este tipo de comportamiento. Además, cuando la base $a$ es un número entre 0 y 1, la función exponencial $f(x) = a^x$ es decreciente.

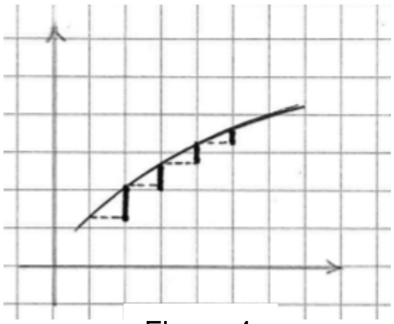


Figura 4

En la Figura 4, mostramos una curva creciente con "crecimiento lento", con los cambios en la velocidad de crecimiento representados por los "segmentos verticales gruesos", cada vez más pequeños; y en la Figura 5 mostramos una curva creciente a "velocidad constante", con esa velocidad representada por los "segmentos verticales gruesos", siempre del mismo tamaño.

En este último caso, por la forma de la curva (un segmento de recta) suele decirse que el crecimiento es lineal. Más aún, podemos ver este segmento de recta como parte de la gráfica de una función afín $f$, cuya expresión general es

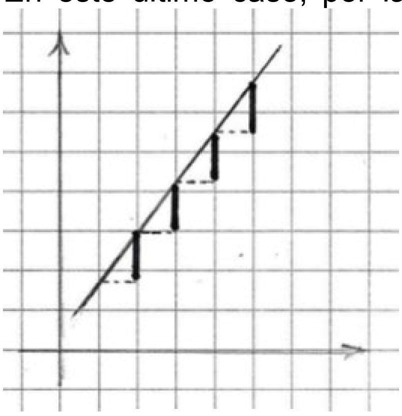


Figura 5

$$f\,(x) = ax + b,$$

donde $x$ es la variable independiente y $a$ y $b$ son números reales fijos. La constante $a$ es la pendiente de la recta; es decir, la longitud de los "segmentos verticales gruesos". que expresa la velocidad (constante) de crecimiento de la función;

También es importante observar que en la Figura 1 (c) tenemos un caso de curva creciente, cuya velocidad de crecimiento va aumentando hasta cierto punto (el tramo en el que se parece a la curva de la Figura 3) y luego esa velocidad de crecimiento va disminuyendo (el tramo en el que se parece a la curva de la Figura 4). El punto en el que cambia esa velocidad de crecimiento, se llama *punto de inflexión*.

En una perspectiva rigurosa, tendríamos que referirnos a velocidades instantáneas de cambio y usar las herramientas del cálculo diferencial, pero no es esa la intención de este artículo. Basta decir que, cuando esa velocidad instantánea de cambio de los valores de una función $f$ existe en un punto $w$ de su dominio, una aproximación de ella es la diferencia entre $f\,(w + 1)$ y $f\,(w)$; es decir, $f\,(w + 1) - f\,(w)$. Estas son las longitudes de los "segmentos verticales gruesos", mostrados en las figuras 3, 4 y 5.

## Volviendo al problema inicial

Si consideramos la variable tiempo ($t$), medido en días, podemos llamar $g$ a la función según la cual a cada día $t$ le corresponde $g(t)$ casos positivos reportados en el país A y $h$ a la función según la cual a cada día $t$ le corresponde $h(t)$ casos positivos reportados en el país B. Así, si llamamos $t_0$ a un día, $g(t_0)$ y $h(t_0)$ serán los valores de estas funciones en ese día, y $g\,(t_0 + 1)$ y $h(t_0 + 1)$ serán los valores de esas funciones al día siguiente.

Según la información dada en el problema, tendremos:

País A: $g(t_0) = 3\ 000$ $\quad g\,(t_0 + 1) = 3\ 600$ $\quad g\,(t_0 + 1) - g(t_0) = 600$

País B: $h(t_0) = 10\ 000$ $\quad h(t_0 + 1) = 11\ 000$ $\quad h(t_0 + 1) - h(t_0) = 1\ 000$

Como la diferencia entre los números de los casos ocurridos en el día $t_0 + 1$ y el día anterior $t_0$, es mayor para el país B que para el país A (pues 1 000 > 600) y ya hemos dicho que esta diferencia es una aproximación a la velocidad de crecimiento de la función correspondiente, podemos afirmar que el número de casos está creciendo a mayor velocidad en el país B que en el país A.

## Cambio porcentual

Al estudiar situaciones reales como esta, es muy importante considerar el *cambio porcentual*, lo cual significa examinar el porcentaje de la diferencia observada, respecto al valor inicial registrado. Así, en el caso del país A, el cambio porcentual del número de casos en los dos días registrados, lo obtenemos calculando qué porcentaje de 3 000 (el valor inicial) es 600 (la diferencia observada, o sea 3 600 – 3 000). Al dividir 600 entre 3 000 obtenemos 0,2, lo cual significa que 600 es el 20% de 3 000 y afirmamos que el crecimiento porcentual fue del 20%.

Para el país B, debemos calcular qué porcentaje de 10 000 es 1 000. Podemos hacer cálculos similares al hecho para el país A, pero ya se ve directamente que 1 000 es el 10% de 10 000.

Tenemos entonces que, si bien en el país B la velocidad de crecimiento es mayor que en el país A (1 000 > 600), el crecimiento porcentual es menor (10 < 20).

En el caso específico de la pandemia, si el número de casos considerados es el de resultados positivos con el Covid 19, otro aspecto importante a considerar es la relación porcentual que tiene con el número de casos examinados. Por ejemplo, el crecimiento porcentual del 20% de casos positivos en el país A será menos preocupante si la información (3 000) en el día $t_0$ fue sobre 20 000 casos examinados ese día, pero la información (3 600) en el día $t_0 + 1$ fue sobre 40 000 casos examinados ese día, pues 3 000 es el 15% de 20 000, mientras que 3 600 es el 9% de 40 000.

Otro aspecto muy importante para destacar es que no se pueden sacar conclusiones generales a partir de pocos datos; menos aún a partir de solo dos datos. Para el estudio serio y las proyecciones o predicciones de la evolución de la pandemia es fundamental mucha información, estudios comparativos con la evolución de otras pandemias y los modelos matemáticos usados para su estudio, así como el uso de programas informáticos estadísticos, por la complejidad de las estimaciones.

Ciertamente, es posible desarrollar actividades que promuevan la reflexión con los estudiantes, tanto sobre la realidad – con la información que se pueda disponer – como sobre aspectos matemáticos, y evidenciar la relación entre ambos aspectos. A continuación, algunas ideas para crear y resolver problemas:

- Mostrar, en un mismo sistema de coordenadas dos curvas de crecimiento rápido, de modo que una de ellas crezca más rápidamente que la otra. Explicar por qué. Indagar sobre casos concretos con esta situación, considerando dos regiones o países.
- Tomar información cuantitativa de 4 o más casos, ocurridos diariamente o en intervalos de tiempo de igual duración, en un país o región. Hacer una tabla que registre esa información. Examinar si el número de casos es creciente o no en el tiempo considerado. Hacer la tabla de los crecimientos porcentuales correspondientes y examinar si esos porcentajes son crecientes o no en el tiempo considerado.
- Conociendo solamente información de cambios porcentuales sobre números de casos en un país o región, en algunos días consecutivos, ¿se puede reconstruir la información sobre los números de casos en esos días? Si no fuera posible, ¿qué información adicional sería suficiente para hacer tal reconstrucción?
- Indagar sobre curvas decrecientes. Partiendo de lo intuitivo y de las analogías con lo visto para curvas crecientes, hacer gráficas de curvas decrecientes. Proponer una definición de función, real de variable real, decreciente.

## Comentarios

1. No se puede dar una respuesta tajante a la pregunta formulada por Julio en el problema inicial, que está dada en forma coloquial, pues no sabemos exactamente lo que para Julio significa que “el avance del número de casos” en un país es mayor o menor que en el otro país. Si se está refiriendo a velocidad de crecimiento del número de casos, en los días observados, la respuesta es afirmativa, pero esto es solo ver una parte del problema, al no tener en cuenta el crecimiento porcentual, ni la referencia – si se trata de casos positivos de Covid 19 – al número de casos examinados, ni al número de habitantes de cada país. Más aún, solo se está teniendo información de dos puntos de cada una de las curvas que podrían representar la evolución en el tiempo del número de casos en cada uno de los países, lo cual es insuficiente para obtener conclusiones generales.

2. Con base en las aclaraciones hechas, y en la información que se encuentra en páginas oficiales o en artículos de investigación, se tiene oportunidades para proponer actividades de indagación, de formulación de preguntas y de búsqueda de respuestas. La realidad es tan cuestionante, que esta línea de trabajo puede llevar a referirse a otros conceptos más vinculados con la estadística y la elaboración de modelos matemáticos, pero con gráficas y porcentajes ya se tiene bastante para analizar y reflexionar.