UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 252-274

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Sentidos del álgebra que priorizan textos escolares: Un análisis de libros de textos

Andrea Estefanía Aguirre, Eleonora Cerati

Fecha de recepción: 16/08/2019
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen

Existen múltiples respuestas a la pregunta de cómo se introduce el álgebra en la escuela secundaria. Por otra parte, existe una marcada influencia de los libros de textos en el aula ya que, tanto para los profesores como para los alumnos, estos suelen constituirse en el referente exclusivo del saber científico. El principal objetivo de este trabajo es caracterizar el sentido del álgebra escolar que priorizan los autores de los manuales escolares utilizados en las escuelas de la ciudad de Santa Fe (Argentina). Para ello empleamos los constructos y herramientas desarrollados por Bolea, específicamente la distinción entre álgebra escolar como aritmética generalizada y como instrumento de modelización algebraica.
Palabras clave: Álgebra escolar, introducción, libros de texto.

Abstract

There are many answers to the question about the way algebra gets introduced in secondary school. On the other hand, textbooks are a great influence in the classroom, because both teachers and students often think of them as the only source of scientific knowledge. The main objective of this work was to characterize the sense of school algebra prioritized by the authors of the schoolbooks used in the schools of Santa Fe city (Argentina). To do so, we have utilized the constructs and tools developed by Bolea, specifically, the distinction made between school algebra as a generalized arithmetic, and as a tool for algebraic modeling.
Keywords: school algebra, introduction, textbooks

Resumo

Existem múltiplas respostas à pergunta de como se introduz a álgebra no ensino médio. Aliás, existe uma destacada influência dos livros de texto na sala de aula, pois tanto para os professores quanto para os alunos, aqueles costumam constituir o referente exclusivo do saber científico. O principal objetivo deste trabalho foi caracterizar o sentido da álgebra escolar que priorizam os autores dos manuais escolares utilizados na cidade de Santa Fe (Argentina). Para isso, utilizamos os construtos e ferramentas desenvolvidas por Bolea, especificamente a distinção entre álgebra escolar como aritmética generalizada e como instrumento de modelização algébrica.
Palavras-chave: álgebra escolar, introdução, livros de texto

1. Introducción

Existen múltiples respuestas a la pregunta acerca de cómo se introduce el álgebra en la escuela secundaria. Estas respuestas tienen diversos sentidos que pueden ser considerados como prioritarios en el trabajo algebraico. Muchos docentes consideran el trabajo con la traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas, las manipulaciones algebraicas y la resolución de ecuaciones como las primeras experiencias con el álgebra. En Argentina, Sessa (2005) afirma que las ecuaciones han sido, en la enseñanza tradicional, la forma privilegiada para la introducción al álgebra. El uso de ecuaciones no es para los alumnos un pasaje intuitivo de la aritmética al álgebra, ya que rechaza el manejo del cálculo de incógnitas y números. Mercado (2016) presenta distintas investigaciones sobre la enseñanza del álgebra que tratan las dificultades que presentan las resoluciones de ecuaciones en los primeros años.

Vergnaud (1988, citado en Mercado, 2016, p.28) menciona ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico; el rompimiento cognitivo de estos dos campos no debe ser pasado por alto por el docente. Afirma también que la introducción al álgebra implica una doble ruptura epistemológica: por un lado, el abordaje a través de un desarrollo formal en la resolución de problemas antes tratados intuitivamente, por el otro, la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuaciones e incógnitas, funciones y variables, monomios y polinomios.

Investigadores como Duval (1995) y Chevallard (1996), entre otros, trabajaron sobre las dificultades de los estudiantes en el pasaje de la aritmética al álgebra. También Sessa (2005) y Socas (2011) han analizado los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes cuando se acercan a las primeras herramientas algebraicas. Esto nos llevó a analizar los libros de textos escolares de matemática de primer año de secundaria.

Para introducir el álgebra en el nivel medio se deben tener en cuenta las diferencias que existen con la aritmética en cuanto a las propiedades, y sobre todo debe tenerse presente que la transición abrupta puede generar obstáculos en el aprendizaje.

En el trabajo que sugieren llevar a cabo los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) (Argentina, Ministerio de Educación, 2011) y el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014) en primer año (que corresponde a estudiantes de 13 años) en torno a la generalización, se espera que los alumnos construyan referencias para realizar, analizar y modelizar las transformaciones algebraicas que representan la equivalencia de expresiones. Además, se plantean distintos asuntos didácticos respecto de la resolución y la expresión de las soluciones de un problema, pues se ve a lo largo de todo el proyecto de enseñanza la necesidad de tratar situaciones problemáticas que se puedan resolver por distintos caminos o procedimientos, que no tengan solución, que admitan varias soluciones y que una fórmula sea reconocida como la respuesta a un problema. Cuando los alumnos crean fórmulas durante la resolución de diferentes actividades, estas pueden ser distintas (es decir, un alumno puede encontrar distintas expresiones o en un curso puede haber diferentes) y todas ellas ser correctas, pues cuentan o calculan lo mismo para cada valor de la variable. Por medio de este tipo de situaciones se construye la noción de equivalencia de expresiones algebraicas.

Gascón (2011) afirma que para saber cómo se concibe el álgebra elemental, se deben considerar las nociones o ideas que están disponibles en la cultura escolar, las cuales en la mayoría de los casos son importadas de los documentos curriculares. Serán, por tanto, los libros de texto y los currículos nacional y provincial fuentes importantes para mirar los tipos de problemas presentes en la educación secundaria, los cuales son tomados como propuestas de un modelo epistemológico de referencia por la mayoría de los docentes.

Los libros de texto constituyen uno de los instrumentos más importantes de la acción pedagógica del profesor. Espinoza, Pochulu y Jorge (2013) sostienen que:

> [...] por tal motivo es importante identificar herramientas que posibiliten realizar un análisis didáctico de los libros de texto que los docentes utilizan en sus prácticas. Tanto para los profesores como para los alumnos, el libro de texto suele constituirse en el referente exclusivo del saber científico. Los análisis didácticos de textos permiten caracterizar la calidad de la organización matemática textualizada, su grado de completitud, pertinencia, adecuación e idoneidad epistémica y didáctica, y en tal sentido, orientar al profesor para sostener un trabajo de gestión de la clase o rediseño de actividades científicamente sustentable y fundamentado. (Espinoza, Pochulu y Jorge, 2013, pp.1-2)

El análisis didáctico de textos escolares utilizando distintas herramientas y constructos de la educación matemática, permite obtener información relevante sobre las tareas que se proponen y el modo en que estas se vinculan con aspectos centrales de la actividad matemática. Asimismo, pone en evidencia la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se involucran en esta actividad.

Según Sierra, González y López (1999), el interés de analizar los libros de textos parte de la hipótesis de que en general la práctica de la enseñanza no está determinada por los currículos oficiales sino más bien por los libros utilizados en el aula. Vargas (2003), señala que el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profesores. El Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas (Colombia) muestra que el texto es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos, así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar. Esta posición privilegiada del texto se condice indudablemente con el reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico.

A partir de las consideraciones anteriores, se propone como objetivo principal de la investigación caracterizar el sentido del álgebra escolar que priorizan los autores de textos escolares. Para realizar el análisis didáctico de los manuales utilizados en sus clases por los docentes consultados, se emplean los constructos y herramientas desarrollados por Bolea (2003), específicamente la distinción entre álgebra escolar como *aritmética generalizada* y como instrumento de *modelización algebraica*.

Se espera identificar en los textos escolares el objetivo con el que se utiliza el álgebra escolar. Para ello se analizan cuáles son las acciones en las que se involucrarán los alumnos al resolver las actividades. También, se enumeran los objetos (símbolos, variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, entre otros) mediante los cuales se realizarán las acciones algebraicas para alcanzar los objetivos.

2. Antecedentes y aportes teóricos

Bolea (2003), a partir de la revisión de documentos oficiales de la ley educativa española y diversos libros de texto, caracteriza la interpretación habitual del álgebra escolar como una *aritmética generalizada*. Esta consiste en la identificación del álgebra elemental con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), en contraposición a, pero también como desarrollo de, un supuesto "lenguaje aritmético". Desde este punto de vista, las actividades que se consideran "algebraicas" constituyen una prolongación unilateral de las prácticas aritméticas y, por lo tanto, pueden caracterizarse y describirse a partir de éstas. En trabajos anteriores (Gascón, 1993, 1994, 1999) en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se ha analizado el fenómeno de la aritmetización del álgebra escolar, mostrando que dicho fenómeno responde a la interpretación dominante en la institución escolar.

A partir del Análisis/Síntesis clásico, considerado como técnica de resolución de problemas no solo geométricos, Bolea (2003) considera el álgebra escolar como un instrumento de la actividad matemática y, más concretamente, como un instrumento de *modelización algebraica*. Así, una actividad matemática será "algebraica" en la medida en que permita la manipulación global de la estructura de los problemas, incluya la problemática relativa a la descripción, justificación y alcance de las técnicas que se utilizan, unifique los tipos de problemas, técnicas y tecnologías y provoque la emergencia de nuevos tipos de problemas con la consiguiente ampliación de los mismos.

En otro trabajo, Bolea, Bosch y Gascón (2004) muestran que una de las consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra elemental es la ausencia del álgebra como instrumento de modelización en las matemáticas que se estudian en la enseñanza secundaria.

Por su parte, Sessa (2005) expresa una posible vía de entrada al álgebra por medio de la idea de generalización, expresando que generalizar es encontrar características que unifican, es reconocer tipos de objetos y de problemas. Es al descontextualizar el trabajo hecho sobre un problema y discutir sobre la matemática involucrada, que se está en un proceso de generalización. Esto permitiría utilizar y adaptar lo realizado en ese problema a otros del mismo tipo. Otra posible vía de entrada al álgebra es a través de la modelización de fenómenos de la realidad. Esto requiere que los estudiantes exploren en la variedad de registros de representación semiótica que conlleva esta noción y además reflexionen sobre el papel que juegan los procesos de conversión entre registros. Esta modelización se vislumbra en la construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y por la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables, lo que llevará a la construcción del concepto de función.

También Sessa (2005) aspira llegar a las ecuaciones desde la idea de variables, de fórmulas o de número generalizado, y que los alumnos vean a las transformaciones algebraicas como un medio de llegar a la equivalencia de expresiones.

Puig (2012), al igual que Bolea, preconiza la enseñanza del álgebra en la escuela como un instrumento de modelización. A partir de su estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra educativa y la fenomenología histórica del álgebra, concluye que el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

El primero de estos aspectos conduce a la elaboración de materiales de enseñanza, en los que las expresiones algebraicas pueden adquirir significado para los estudiantes al resolver situaciones que permiten expresar de forma general relaciones que representan las configuraciones geométricas o las series de números; las transformaciones algebraicas tienen sentido en la medida en que pueden dar cuenta del hecho de que expresiones algebraicas distintas, representan la misma configuración geométrica o serie de números, lo que atestigua la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones. El segundo de los aspectos corresponde a la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal. En este caso, las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas. El tercero de los aspectos tiene que ver con los procesos de modelización. Aquí las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas. En los tres casos, las transformaciones algebraicas tienen sentido, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, y porque permiten obtener aquellas expresiones que son más convenientes para el tratamiento de la situación.

Una de las primeras dificultades que encuentra Bolea (2003) para describir el modelo epistemológico del álgebra escolar dominante en las instituciones escolares consiste en que este no aparece de forma explícita en los documentos oficiales, sino que en la cultura escolar puede, incluso, existir una gran diferencia entre lo que el profesor “dice que hay que hacer en el aula”, la propuesta que podemos llamar discursiva, y lo que realmente “se hace en el aula”, la propuesta efectiva, a propósito del álgebra escolar.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997), expresan que existe una distancia entre las obras matemáticas y su adaptación didáctica, lo cual destruye la ilusión de transparencia de la organización matemática escolar y permite su cuestionamiento.

Afirman que cuando estudiamos una obra matemática, debemos reconstruir la organización matemática en la que la obra se enmarca, es decir, los campos de problemas en que se traducen las cuestiones, las técnicas con las que se pueden resolver estos problemas, los elementos tecnológicos y teóricos que permiten explicar y justificar las técnicas. Proponen desentrañar esa organización a través de preguntas.

> Así, ante la descripción curricular de una obra matemática determinada, hay que plantearse preguntas como las siguientes. ¿Cuáles son las tareas problemáticas en las que se debe basar el estudio? ¿Qué tipos de problemas matemáticos aparecerán? ¿Qué técnicas son inicialmente útiles para abordar estos problemas? ¿Cómo evolucionan dichas técnicas a lo largo del proceso de estudio? ¿Qué elementos tecnológicos se utilizarán para interpretar y justificar esta actividad? ¿En qué teoría se fundamenta el trabajo realizado? (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 126).

A partir de la revisión teórica realizada, en este trabajo se espera identificar indicios acerca del sentido que priorizan los autores de libros de texto en su propuesta pedagógica (teniendo en cuenta: objetivos, contenidos, actividades, metodología y criterios de evaluación). Se trata de establecer cuál es el modelo dominante en el abordaje propuesto: el álgebra como *aritmética generalizada* o como *modelización algebraica*.

3. Metodología

En esta investigación se utilizaron métodos cualitativos (McMillan y Schumacher, 2005). Una característica de este tipo de estudios es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que en datos numéricos. No obstante, un empleo cuidadoso proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (McKnight, Magid, Murphy y McKnigt, 2000).

En el marco de la modalidad cualitativa, se llevó a cabo un tipo de estudio no interactivo, consistente en el análisis de libros de texto con el fin de identificar los aspectos enfatizados en el desarrollo del tema (McMillan y Schumacher, 2005). Se trata de un muestreo no probabilístico por conveniencia, ya que son textos seleccionados con los criterios de ser accesibles y actualmente utilizados por los docentes de secundaria.

Como método de análisis de datos se utiliza el análisis de contenido (que supone el desarrollo de procedimientos de categorización de datos) y la codificación (revisión de un conjunto de datos como notas, transcripciones, etc., con la finalidad de determinar patrones que describan características particulares del fenómeno estudiado) (McKnight, y col., 2000). El proceso de análisis interpretativo se desarrolló simultáneamente con la exploración y análisis de la literatura sobre la problemática en estudio.

Para seleccionar los libros de texto de llevaron a cabo dos indagaciones. En primer lugar, se entrevistaron profesores de matemática de primer año- 8vo año de escolaridad (alumnos de 13-14 años) de escuelas de enseñanza media de la ciudad de Santa Fe (Argentina) y alrededores, algunas de gestión pública y otras de gestión privada. Se preguntó a los docentes si utilizaban un libro en particular para trabajar con los alumnos durante todo el año escolar o si elaboraban sus propios apuntes de trabajo (mediante la consulta de distintos libros de texto de secundaria y/o con aportes propios). También se accedió a las bibliotecas de las escuelas y se relevaron los libros de primer año que se encuentran a disposición de los alumnos. Muchos docentes expresaron que elaboran su propio material utilizando varios libros de primer año de matemática.

En segundo lugar, se realizó una consulta a encargados de las dos librerías más grandes de Santa Fe (Argentina) acerca de cuáles fueron los libros de primer año de matemática más vendidos en el año 2017. En una de ellas, los libros más vendidos corresponden a las editoriales Puerto de Palos (serie Activados) y Santillana. En la otra, a Santillana, Puerto de Palos (serie Activados) y Kapelusz. Los promedios de ambos comercios arrojan que, en ese orden, las ventas corresponden aproximadamente en un 45% a la primera editorial, en un 40% a la segunda y en un 15% a la tercera.

Finalmente, se seleccionaron tres de los textos escolares (A, B y C), teniendo en cuenta los más utilizados en las escuelas seleccionadas de la ciudad y la región por los docentes encuestados y que están disponibles en las bibliotecas y librerías visitadas.

3.1 Descripción de las categorías de análisis

Para realizar el análisis didáctico de los textos escolares que los docentes ponen en juego en sus clases, se utilizan los constructos y herramientas que aporta Bolea (2003). Para describir las características de la interpretación del álgebra escolar como modelo de *aritmética generalizada*, se asume que la construcción o emergencia del álgebra se produce en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción de expresiones numéricas-verbales, las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos y el álgebra escolar se presenta muy vinculada a la aritmética y bastante aislada del resto de las organizaciones matemáticas presentes en el currículum de secundaria.

Por otra parte el instrumento algebraico que Bolea (2003) identifica como *modelización algebraica* sostiene que el álgebra escolar es un instrumento para resolver problemas aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc., que el proceso de modelización algebraica es una herramienta potente para describir, generalizar y justificar procedimientos y propiedades de los sistemas estudiados y que también permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos que son muy difíciles de plantear y de resolver sin álgebra. El álgebra escolar permite entonces unificar problemas que aparecen aislados en la organización matemática escolar.

Se espera en este trabajo identificar en los textos escolares el objetivo con el que se utiliza el álgebra escolar, intentando dar respuesta a la pregunta *¿qué es el álgebra y para qué sirve?* Además, se analizan en cada uno de ellos cuáles son las posibles acciones que llevarán a cabo los alumnos al resolver las actividades, respondiendo a la pregunta *¿cuáles son las acciones físicas y mentales en las que nos involucramos cuando "hacemos álgebra"?* Por último, se enumeran los objetos mediante los cuales se realizarán las acciones algebraicas para perseguir los objetivos, utilizando la descripción de los objetivos, acciones y objetos del álgebra escolar de Arcavi, Drijvers y Stacey (2017).

Los principales **objetivos** del álgebra que pueden aparecer en los textos escolares son:

- ❖ expresar generalizaciones usando letras para representar objetos matemáticos y para manejar clases de objetos, para expresar un patrón o una relación;
- ❖ establecer relaciones entre números o cantidades por medio de palabras, fórmulas, tablas o gráficos;
- ❖ resolver problemas, relacionando incógnitas vinculadas por operaciones en ecuaciones o desigualdades;
- ❖ explorar propiedades de las operaciones definidas por reglas formales;
- ❖ probar teoremas para desarrollar el razonamiento deductivo;
- ❖ calcular mostrando el poder que tiene el álgebra para crear métodos eficientes y elegantes.

Las **acciones** del álgebra presentes en los textos escolares son:

- ❖ notar, describir, denotar y representar regularidades y patrones por medio de palabras, símbolos, tablas, o gráficos;

- manejar expresiones simbólicas de acuerdo a reglas algebraicas, con un propósito determinado;
- traducir símbolos y leer, es decir inspeccionar expresiones algebraicas con el fin de extraer información de ellas;
- conectar representaciones, o sea utilizar representaciones múltiples para desplegar ideas y conceptos, operar sobre ellos, discernir matrices y engendrar nuevos conocimientos sobre contenidos matemáticos;
- crear expresiones algebraicas, lo que obligará a decidir sobre una variable a elegir para luego crear expresiones apropiadas, ecuaciones o desigualdades para establecer relaciones que serán instrumentales en la solución del problema modelado.

Los **objetos** mediante los cuales se realizan las acciones algebraicas para alcanzar los objetivos pueden describirse como:

- símbolos como: $=, >, <, \geq, \leq, (\ldots), \neq, \cong, |\ldots|$, entre otros;
- expresiones algebraicas (o sea una combinación de números, letras y signos de operaciones de acuerdo a las reglas de la sintaxis algebraica);
- ecuaciones (igualdad de expresiones que puede ser absoluta o relativa);
- inecuaciones (desigualdad de expresiones absoluta o condicionales);
- relaciones y funciones que son medios para indicar, producir, reproducir y manejar dependencias y correspondencias entre variables.
- variables, que pueden ser:
    - Un marcador de posición para un valor numérico que considera a la variable como un cuadro vacío, un contenedor de valores numéricos, como un lugar en una memoria de la calculadora que puede llenarse con un valor específico.
    - Un número desconocido que es una letra que se usa para denotar un número que debe encontrarse, lo que es una situación habitual al resolver ecuaciones.
    - Una cantidad variable que es un símbolo literal que no representa un solo valor desconocido, sino un proceso que atraviesa un dominio de posibles valores.
    - Un número generalizado que es una variable que se usa para describir propiedades generales.
    - Un parámetro que es una variable de orden superior en el sentido de que su valor determina la situación como un todo.

Estos matices del concepto de variable son cruciales en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, así como en el uso de herramientas digitales para álgebra.

4. Análisis de tres libros de texto

4.1. Análisis del texto A

El tema seleccionado aparece bajo los títulos “Fórmulas para contar” y “Más sobre operaciones y álgebra”. En un principio el libro propone una revisión que involucra los números naturales y sus propiedades, las fracciones, porcentaje, distancia entre dos puntos, arcos y circunferencias, rectas paralelas y perpendiculares (geométricamente), ángulos complementarios, suplementarios y adyacentes, clasificación de triángulos y sus propiedades, polígonos, perímetro, área y volumen.

A lo largo del libro, se busca primero que los alumnos interactúen individualmente con el texto por medio de juegos y luego grupalmente con un nuevo conocimiento que posteriormente se formaliza esperando que sea asimilado por todos los alumnos. Recién se provee de una autoevaluación al final del capítulo, como se describe en el siguiente párrafo. Se les da a los alumnos la oportunidad de vivir la experiencia de involucrarse con otras formas de razonamiento y de conocer otro modo de pensar.

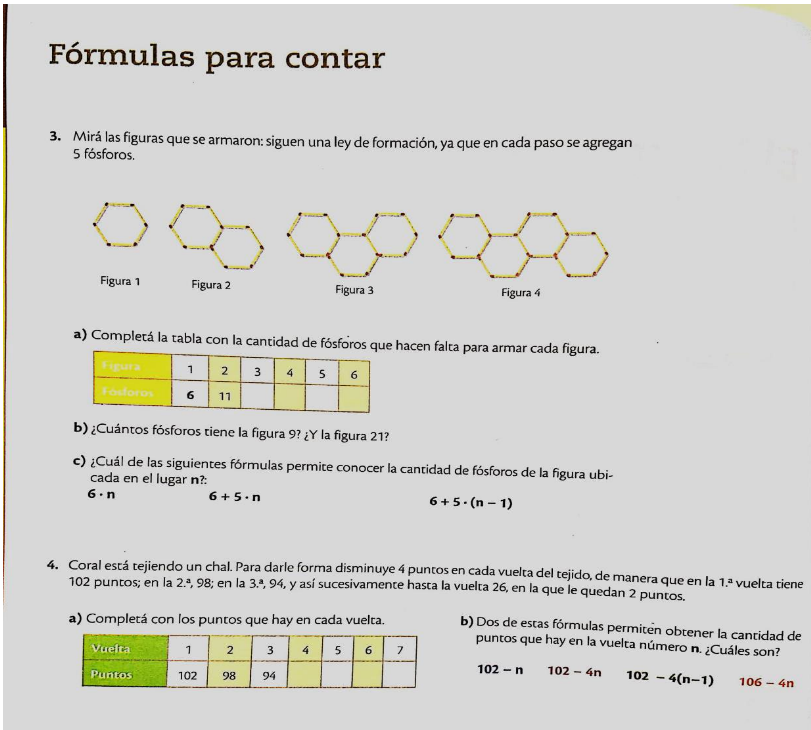
En cada capítulo se propone un comienzo exploratorio empírico, analizando diferentes dibujos o ejemplos concretos de la vida diaria, que pueden resultar muy útiles. Estas experiencias permiten la obtención de resultados y la formulación de conjeturas que luego formalizarán en propiedades. Cada capítulo cuenta con una sección de “Resolver Repasar Revisar” para que los alumnos resuelvan ejercicios variados en los que se deben aplicar los temas dados en el capítulo. Además, consta de una sección llamada “Dar la nota” donde se relatan diferentes anécdotas de la historia de la matemática relacionadas con los temas del capítulo. Dentro del capítulo motivo de nuestro análisis la misma trata sobre El último teorema de Fermat. Por último, se incluye una sección de una página de autoevaluación denominada “Me tomo una prueba” donde, luego de resolverla, los alumnos deben responder al final cuántas veces se equivocaron. También cuentan con un apartado que dice “Debo repasar”, donde los estudiantes realizan sus anotaciones personales para llevar un “control” de sus conocimientos.

La primera secuencia analizada consta de tres situaciones problemáticas, el primero es de una colección de fósforos, el segundo sobre un tejido y el último es para realizar en equipos e involucra ternas pitagóricas. La primera y la segunda proponen una actividad individual cuyo objetivo es que los estudiantes lleguen a la fórmula desde un ejemplo sencillo a uno más complejo por medio de la utilización de tablas. Con las tres actividades, se busca que los alumnos partan de una tabla y puedan generalizar y justificar el porqué de la elección de las fórmulas, además de que puedan encontrar más de una fórmula posible de conteo. En la Figura 1 aparece el primer ejemplo descrito.

En la segunda sección analizada se trabaja primero un problema, luego se formalizan mediante definiciones los conceptos de ecuación, incógnita, resolución de ecuaciones, comprobación y ecuaciones equivalentes. Posteriormente se trabajan ejercicios de diferentes tipos aplicando lo anterior.

Lo planteado en las secuencias analizadas concuerda con lo establecido en los diseños curriculares y en los NAP porque se trabaja con distintos problemas de conteo y diferentes niveles de abstracción para encontrar la fórmula de conteo. Los problemas que contiene la secuencia analizada contribuyen también a que los estudiantes, al resolverlos, desarrollen algunas de las capacidades necesarias para el aprendizaje de la matemática, en este caso *expresiones equivalentes*. Para ello se pretende que los alumnos pongan en juego capacidades para la comprensión de los enunciados, para realizar inferencias lógicas, para establecer relaciones y poder realizar generalizaciones, es decir, pasar de lo particular a lo general.

Los problemas son también de carácter abierto, no dirigido. Es importante señalar que el objetivo no se centra en resolver el problema sino en que éste sea utilizado como base para identificar los temas de aprendizaje para su estudio de manera independiente o grupal. Asimismo, se dan actividades grupales, suponemos para que a lo largo del proceso de trabajo, los estudiantes adquieran responsabilidad y confianza en el trabajo realizado en conjunto, desarrollando la habilidad de dar y recibir críticas orientadas a la mejora de su desempeño y del proceso de trabajo del grupo. Los conocimientos son introducidos en relación directa con el problema y no de manera aislada o fragmentada; así los estudiantes pueden observar su avance en el desarrollo de conocimientos y habilidades, tomando conciencia de su propio desarrollo.



Fórmulas para contar

3. Mirá las figuras que se armaron: siguen una ley de formación, ya que en cada paso se agregan 5 fósforos.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Completá la tabla con la cantidad de fósforos que hacen falta para armar cada figura.

Figura	1	2	3	4	5	6
Fósforos	6	11				

b) ¿Cuántos fósforos tiene la figura 9? ¿Y la figura 21?

c) ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite conocer la cantidad de fósforos de la figura ubicada en el lugar **n**?:

$6 \cdot n$ $\quad 6 + 5 \cdot n$ $\quad 6 + 5 \cdot (n - 1)$

4. Coral está tejiendo un chal. Para darle forma disminuye 4 puntos en cada vuelta del tejido, de manera que en la 1.ª vuelta tiene 102 puntos; en la 2.ª, 98; en la 3.ª, 94, y así sucesivamente hasta la vuelta 26, en la que le quedan 2 puntos.

a) Completá con los puntos que hay en cada vuelta.

Vuelta	1	2	3	4	5	6	7
Puntos	102	98	94				

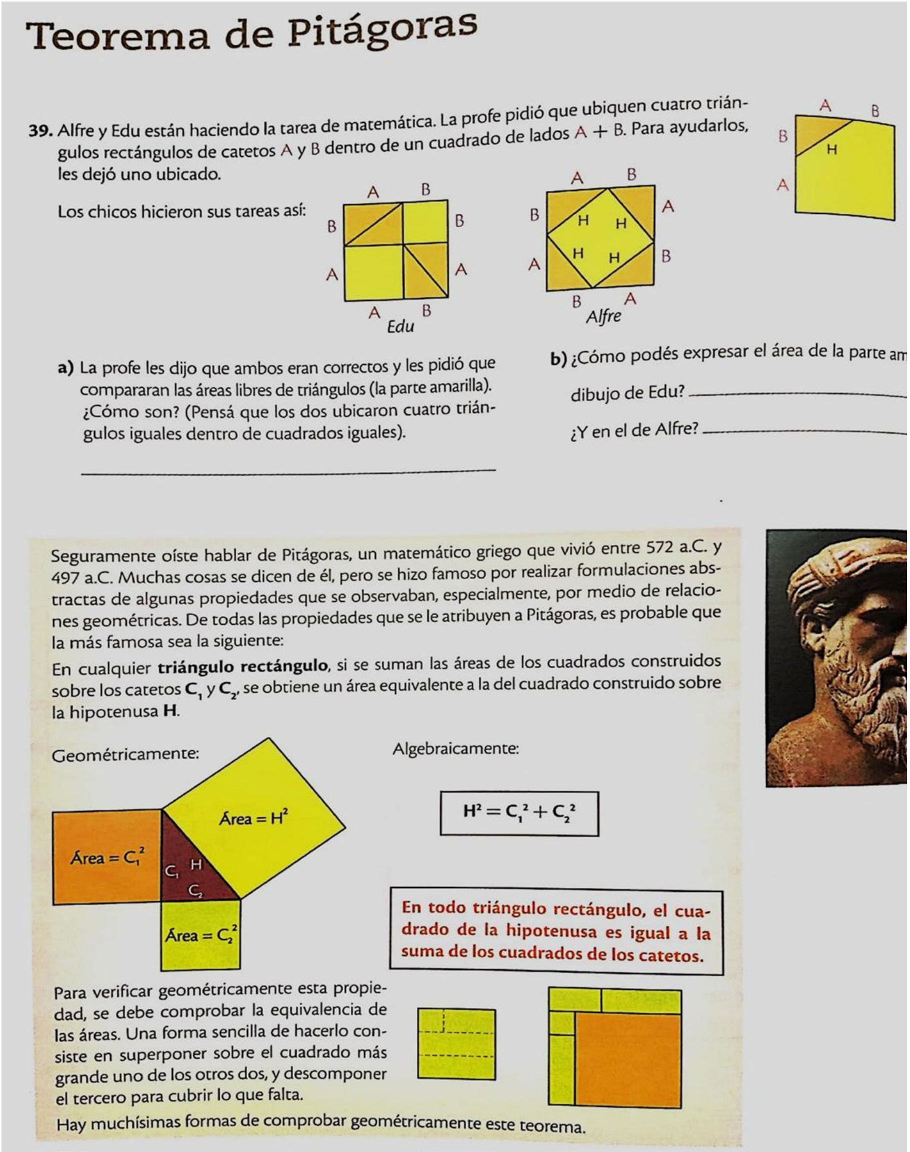
b) Dos de estas fórmulas permiten obtener la cantidad de puntos que hay en la vuelta número **n**. ¿Cuáles son?

$102 - n$ $\quad 102 - 4n$ $\quad 102 - 4(n-1)$ $\quad 106 - 4n$

Fig.1: El lenguaje del álgebra. Fórmulas para contar. Matemática II pág. 42.

La secuencia analizada acuerda con la vía de entrada propuesta por Sessa (2005) ya que, se realiza por medio de la generalización desde la producción de fórmulas para contar colecciones. Las actividades cumplen con el principio de necesidad, básico para la autora, pues se presentan problemas que admiten más de una expresión algebraica para modelizar las relaciones entre los datos y las incógnitas, así el estudiante tendrá la posibilidad de tomar la responsabilidad de resolverlos y poder resignificar el concepto matemático tratado.

Los problemas planteados se pueden resolver por distintos caminos y en general se sostiene este trabajo en todo el proyecto de enseñanza de este libro. Un ejemplo de esto lo vemos en la Figura 2, donde se visualiza una secuencia de tareas de un capítulo posterior.



Teorema de Pitágoras

39. Alfre y Edu están haciendo la tarea de matemática. La profe pidió que ubiquen cuatro triángulos rectángulos de catetos A y B dentro de un cuadrado de lados A + B. Para ayudarlos, les dejó uno ubicado.

Los chicos hicieron sus tareas así:

a) La profe les dijo que ambos eran correctos y les pidió que compararan las áreas libres de triángulos (la parte amarilla). ¿Cómo son? (Pensá que los dos ubicaron cuatro triángulos iguales dentro de cuadrados iguales).

b) ¿Cómo podés expresar el área de la parte am... dibujo de Edu? ______

¿Y en el de Alfre? ______

Seguramente oíste hablar de Pitágoras, un matemático griego que vivió entre 572 a.C. y 497 a.C. Muchas cosas se dicen de él, pero se hizo famoso por realizar formulaciones abstractas de algunas propiedades que se observaban, especialmente, por medio de relaciones geométricas. De todas las propiedades que se le atribuyen a Pitágoras, es probable que la más famosa sea la siguiente:

En cualquier **triángulo rectángulo**, si se suman las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$, se obtiene un área equivalente a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa **H**.

Geométricamente:

Algebraicamente:

$$\boxed{H^2 = C_1^2 + C_2^2}$$

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Para verificar geométricamente esta propiedad, se debe comprobar la equivalencia de las áreas. Una forma sencilla de hacerlo consiste en superponer sobre el cuadrado más grande uno de los otros dos, y descomponer el tercero para cubrir lo que falta.

Hay muchísimas formas de comprobar geométricamente este teorema.

Fig. 2: Perímetro y área. Teorema de Pitágoras. Matemática II pág.

En la mayoría de los problemas del capítulo analizado, hay un trabajo exploratorio, de ensayos y errores, de ajustes, de intentos de explicar lo que está ocurriendo, de llegar a una o varias fórmulas con las cuales se cumpla lo establecido, llegando finalmente a la comprensión de la equivalencia entre expresiones, que se explica luego utilizando propiedades. Charnay (1994) asegura que es haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido.

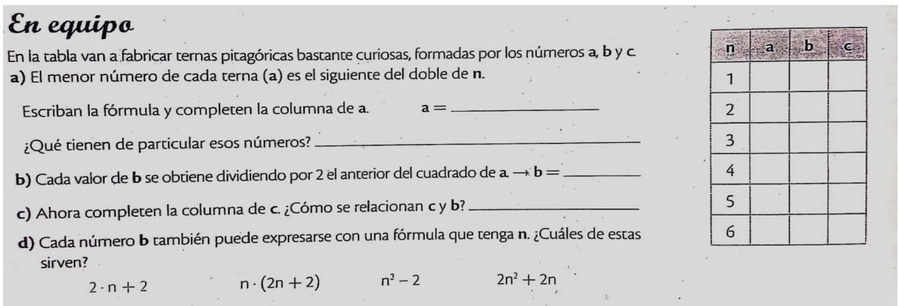
Los objetivos con los que se utiliza el álgebra escolar en el libro son: expresar generalizaciones, establecer relaciones, resolver problemas, explorar propiedades y calcular. Por tanto, se incluyen cinco de los seis objetivos planteados en la categoría. A lo largo del capítulo se utilizan letras para expresar patrones o relaciones entre objetos matemáticos. Se observan tareas que requieren establecer relaciones entre números por medio de palabras, fórmulas o tablas; es decir que los alumnos deben completar tablas de ciertas relaciones entre sus valores y vincularlo con una fórmula o deben conectar expresiones algebraicas con enunciados verbales. Se incluyen problemas de enunciados verbales en cuya resolución aparecen incógnitas que se relacionan formando ecuaciones.

Otro objetivo que aparece gracias a las operaciones definidas formalmente es la exploración de propiedades, como por ejemplo las diferentes propiedades de potencia y raíces. Por último, se pone en evidencia el objetivo de calcular, pues se muestran simbólicamente las relaciones generales del cálculo, como por ejemplo las actividades de resolver diferentes ecuaciones y verificar las soluciones.

También se analizan las acciones que podrían realizar los estudiantes al resolver las tareas propuestas por el libro examinado cuando “hacen álgebra”. Estas son: notar, describir, denotar y representar; analizar expresiones simbólicas; traducir símbolos y leer; conectar representaciones y crear expresiones algebraicas. En el capítulo estudiado se intenta que los estudiantes descubran qué permanece y qué cambia de una expresión algebraica a otra; qué se describe con éstas; qué se expresa por medio de lo descubierto; y qué se interpreta en una secuencia de búsqueda de patrones y regularidades, por medio de palabras, símbolos, tablas o gráficos. Se dan acciones comunes en álgebra por medio de tareas sobre resolución de ecuaciones; se trabaja con la conexión de distintas representaciones ya que se dan tareas en las que es necesario vincular el lenguaje coloquial con expresiones simbólicas y viceversa; finalmente se dan ciertas situaciones problemáticas en las que deben expresar de manera simbólica una situación y en ciertos casos resolverla. Esto último se relaciona con crear expresiones algebraicas equivalentes, pues los alumnos deben identificar la variable y luego crear una expresión apropiada para así llegar a la solución del problema modelado. Con las tareas de relacionar cada enunciado con la expresión simbólica que corresponda y buscar expresiones equivalentes se da la traducción de símbolos y la lectura de las expresiones algebraicas como medio de extraer información de ellas.

Por medio de los siguientes objetos se realizan las acciones para alcanzar los objetivos: símbolos (se utilizan a lo largo del capítulo analizado: = y (...)), expresiones algebraicas, ecuaciones y variables como número desconocido y como cantidad variable. Vemos un ejemplo de su uso en la Figura 3.

En términos de Puig (2012), se clasifica el capítulo analizado como de *resolución de problemas*, ya que se visualiza el álgebra a través de la traducción de problemas a ecuaciones. Mayormente las actividades del capítulo son de resolución algebraica de problemas de enunciados verbales lo que hace que las expresiones algebraicas sean el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas.



En equipo

En la tabla van a fabricar ternas pitagóricas bastante curiosas, formadas por los números **a**, **b** y **c**.

a) El menor número de cada terna (**a**) es el siguiente del doble de **n**.

Escriban la fórmula y completen la columna de a. a = ____________

¿Qué tienen de particular esos números? ____________

b) Cada valor de **b** se obtiene dividiendo por 2 el anterior del cuadrado de a. → b = ________

c) Ahora completen la columna de **c**. ¿Cómo se relacionan **c** y **b**? ____________

d) Cada número **b** también puede expresarse con una fórmula que tenga **n**. ¿Cuáles de estas sirven?

$2 \cdot n + 2$ $\quad n \cdot (2n + 2)$ $\quad n^2 - 2$ $\quad 2n^2 + 2n$

n	a	b	c
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Fig.3: El lenguaje del álgebra. Fórmulas para predecir. Matemática II pág.59.

Se concluye finalmente que el sentido del álgebra que prioriza el libro analizado es del tipo *modelización algebraica*, aunque la *aritmética generalizada* también aparece. Esto se debe a que la construcción del álgebra se produce en un contexto que permite la manipulación global de la estructura de los problemas. El proceso de *modelización algebraica* se observa como una herramienta potente para describir, generalizar y justificar procedimientos y propiedades de los sistemas estudiados (aunque en muchas ocasiones se deja de lado el justificar); por otra parte, se visualiza un trabajo en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números.

4.2. Análisis del texto B

El segundo libro analizado consta de nueve capítulos de los cuales el segundo, titulado "Ecuaciones", dedica una primera sección al trabajo con expresiones algebraicas, cuadrado y cubo de un binomio, y el resto de las secciones están destinadas al trabajo con ecuaciones e inecuaciones. Como introducción a la primera sección, el libro presenta una carilla de teoría en la que se definen: lenguaje simbólico, expresión algebraica (en la que al número que acompaña a la letra lo llama coeficiente, y a la letra la llama parte literal), monomio, operaciones con monomios, binomio, cuadrado de un binomio y cubo de un binomio. Para cada definición se presenta un ejemplo, como se ve en la parte superior de la Figura 4. Además, en el caso del cuadrado y cubo de un binomio, se presenta una forma de resolución.

Al final de la página hay un apartado que se llama "Test de comprensión", en el que tienen que responder preguntas "de aplicación" de la teoría presentada anteriormente. En las páginas siguientes se expone una gran cantidad de actividades de traducción de lenguaje coloquial a simbólico, y viceversa; operaciones algebraicas, desarrollos de cuadrado y cubo de un binomio, unión con flechas de expresiones equivalentes. Estas tareas, no cumplen con el principio de necesidad propuesto por Sessa (2005) puesto que al presentarse en un inicio las cuestiones teóricas, y al no proponer actividades en las que se vaya construyendo el concepto, se torna la resolución de tareas como aplicación de fórmulas. Aunque posiblemente se construya un sentido, este no se corresponde con la interpretación del álgebra como herramienta de modelización. En la segunda sección se incluyen nuevamente las cuestiones teóricas al inicio, definiendo en un primer lugar *ecuación como toda igualdad en la que aparece un valor desconocido llamado incógnita*. Y luego se establecen ejemplos de soluciones de ecuaciones. En las páginas siguientes se proponen meros ejercicios de resolución de ecuaciones.

Esta distribución de actividades se presenta en cada sección y en cada capítulo por igual: primero se exponen las cuestiones teóricas y luego se proponen los ejercicios. Al comienzo de cada capítulo hay una actividad llamada "Situación inicial de aprendizaje" en la que se propone a los alumnos que observen una imagen y respondan preguntas acerca de la misma. Es la única ocasión en la que se promueve el trabajo y el debate grupal en comparación al resto de las tareas del capítulo. Al terminar el capítulo hay ejercicios de integración y autoevaluación, y al final del libro hay una sección de trabajos prácticos sobre todos los capítulos.

Expresiones algebraicas. Cuadrado y cubo del binomio

INFOACTIVA

La matemática utiliza un lenguaje denominado **simbólico** formado por números, símbolos y letras. En este lenguaje, las letras representan números.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números relacionados entre sí por una o más operaciones.

$$5b$$

coeficiente — *parte literal*

Cuando una expresión está formada por un término, se denomina **monomio**; cuando está formada por dos términos, se denomina **binomio**.

$2x$ es un monomio. $x + 1$ es un binomio.

Para sumar o restar monomios semejantes (con la misma parte literal), se suman o restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal.	Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen los coeficientes y la parte literal.
$6a + 7a = 13a$ $a + 2a + 3b = 3a + 3b$	$5a^3 . 2a = 10a^4$ $9a^5 : 3a^3 = 3a^2$

El **cuadrado de un binomio** se puede resolver de la siguiente forma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 . x . 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ $\quad$ $(x - 3)^2 = x^2 + 2 . x . (-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

El **cubo de un binomio** se puede resolver de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(2 + y)^3 = 2^3 + 3 . 2^2 . y + 3 . 2 . y^2 + y^3 = 8 + 12y + 6y^2 + y^3$

$(2 - y)^3 = [2 + (-y)]^3 = 2^3 + 3 . 2^2 . (-y) + 3 . 2 . (-y)^2 + (-y)^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$

Fig.4: Expresiones algebraicas. Cuadrado y cubo del binomio. ActivAdos pág.41

Las actividades propuestas se contraponen en ciertos aspectos con los NAP y los diseños jurisdiccionales considerados puesto que, si bien hay una tarea en la cual se pide “unir con flechas las expresiones equivalentes”, no se promueve que los alumnos construyan dichas expresiones por medio de un proceso de generalización ni que se comparen con las propuestas por sus compañeros para verificar su equivalencia. No se presentan tareas en las que se promueva la resolución por medio de diferentes procedimientos y tampoco la posibilidad de que los problemas pueden admitir más de una solución o ninguna. Por lo tanto, al enunciar en un primer momento todas las definiciones, no abre espacio al avance de argumentaciones empíricas hacia las generales y, por ende, no se propicia el trabajo áulico en el que se problematice el contenido y en el que los estudiantes tengan oportunidades para interpretar la información, establecer conjeturas y relaciones, y que a partir de allí, puedan crear un modelo que les ayude a resolver otros problemas.

Sería deseable la presencia del docente en cada actividad, para evitar errores conceptuales al momento de resolverlas, más aún en aquellas de escritura en distintos lenguajes, y cuando se trabajan operaciones con expresiones algebraicas que involucran signos distintos en los coeficientes. Por ello, es de suma importancia que se permita la comunicación oral y escrita, argumentando la validez de los procedimientos y resultados, de modo que posibilite la producción de conocimientos. Se podría tener en cuenta este libro para resignificar los contenidos, luego de un trabajo previo en la construcción del concepto.

En este capítulo se pone de manifiesto que los objetivos con los que se utiliza el álgebra escolar son: establecer relaciones, resolver problemas, explorar propiedades y calcular. Hay una gran cantidad de tareas que tratan sobre: relacionar enunciados en lenguaje coloquial con expresiones simbólicas, relacionar expresiones equivalentes, escribir en lenguaje coloquial ciertas expresiones simbólicas; en todo momento se pide que se escriban los cálculos y se resuelvan; que resuelvan y verifiquen las ecuaciones. Luego se propone toda una sección del capítulo (dos hojas) sobre problemas con ecuaciones, dando distintos enunciados y pidiendo que planteen las ecuaciones y resuelvan, marquen la expresión correcta (ecuación correspondiente) dando un enunciado; algunos de los problemas a resolver son sobre la vida diaria, otros son de lógica matemática, otros de perímetro y área de ciertas figuras geométricas relacionando "forzosamente" el álgebra y la geometría. Otros problemas son expresiones matemáticas como: "El doble de un número más el triple del mismo aumentado en veinticinco es igual a cero". Se comprueba que los problemas planteados siempre tienen solución y es única, lo que restringe el trabajo algebraico pues no se les deja a los alumnos explorar ecuaciones donde la solución no sea única o donde el problema no tenga solución. Se observa la exploración de propiedades porque después de definir las reglas formales de las operaciones se dan ejercicios de aplicación.

Las acciones que se promueven para los estudiantes al resolver las actividades del libro examinado cuando "hacen álgebra" son: utilizar expresiones simbólicas, traducir símbolos y leer, conectar representaciones y crear expresiones algebraicas. En el capítulo estudiado se dan acciones comunes en álgebra por medio de tareas sobre resolución de ecuaciones en las que se debe simplificar y resolver; se trabaja con la conexión entre distintas representaciones para ciertas ideas y conceptos a través del vínculo del lenguaje coloquial con expresiones simbólicas y viceversa. Algunas situaciones problemáticas se deben expresar de manera simbólica. Este último caso se relaciona con la formulación de expresiones algebraicas, ya que se debe establecer la variable y crear una expresión apropiada para así llegar a la solución del problema modelado. Además, con las tareas de relacionar cada enunciado con la expresión simbólica que corresponda se da la traducción de símbolos y la lectura de las expresiones algebraicas como medio de extraer información de ellas.

Por medio de los siguientes objetos se realizan las acciones algebraicas para perseguir los objetivos: símbolos, expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y variables como números desconocidos, pues las letras se utilizan para denotar números desconocidos que debe ser encontrados siempre. Se utilizan distintos símbolos a lo largo del capítulo analizado como: $=, >, <, \geq, \leq, (\ldots)\ y\ |\ldots|$.

Desde el punto de vista de Puig (2012), el tratamiento propuesto se clasifica como de *resolución de problemas*, pues en el mismo se visualiza el álgebra como instrumento para la traducción de problemas a ecuaciones. Las actividades del capítulo son en su mayoría de resolución algebraica de problemas de enunciados verbales. Aquí las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas. Sin embargo, no se busca la solución de los problemas a través de un proceso de transformaciones algebraicas en el que los estudiantes deban volver al enunciado y llevar el resultado de la ecuación como la solución del problema, interpretando la situación.

Es posible concluir que el sentido del álgebra que prioriza el libro analizado por medio de los datos obtenidos es del tipo *aritmética generalizada*, pues la construcción del álgebra se produce en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción de expresiones numérico-verbales; además las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos.

4.3. Análisis del texto C

Este es un libro que cuenta con once unidades y el tema seleccionado se encuentra en la unidad 5, “Expresiones y fórmulas algebraicas”. Esta unidad consta de tres capítulos: el primero, trata las expresiones algebraicas; el segundo, las ecuaciones e inecuaciones y; el tercero, las funciones y fórmulas.

A lo largo del libro, las unidades se dividen en dos o tres capítulos. Cada capítulo se introduce con un ejemplo resuelto, luego se establece la teoría que utiliza ese ejemplo en relación con el tema seleccionado y después se dan distintas tareas de aplicación de esa teoría. Al final de cada capítulo se establece un apartado de “Más ejercicios” para afianzar conceptos y procedimientos. Como cierre de la unidad se incluye el apartado “Miscelánea”, el cual plantea el desafío de encontrar estrategias propias para resolver situaciones. En la unidad analizada, el primer capítulo trata sobre los comienzos del álgebra. A partir del epitafio de la tumba de Diofanto, se plantea una ecuación relacionando los datos conocidos para así saber cuántos años vivió, estableciendo que: “El álgebra nos proporciona claridad en el planteo de los datos mediante el empleo de un lenguaje adecuado y conocido”. También hay un apartado sobre el lenguaje algebraico, que se inicia relatando su historia, proponiendo luego cinco problemas para que los estudiantes los traduzcan al lenguaje algebraico y los resuelvan. En los diferentes incisos hay textos recuadrados que se utilizan para presentar conceptos y propiedades cuya aplicación facilita el trabajo. Se marcan con un símbolo en forma de rombo las situaciones en las que la colaboración entre compañeros es particularmente recomendable. Al final del libro hay una unidad extra denominada “Actividades Complementarias”, que está dividida por unidad y capítulo, donde cada uno cuenta con una hoja de actividades extra y al final se da una actividad de evaluación para toda la unidad.

El primer capítulo analizado, denominado “Expresiones algebraicas” comienza con el uso de lenguaje simbólico. El primer ejemplo es un juego donde se debe adivinar el número que piensa uno de los jugadores. Primero se da el enunciado, luego se pide al jugador que lo realice con el número elegido y luego se expresa simbólicamente el procedimiento, como se ve en la Figura 5.

A continuación “define” expresiones algebraicas y lenguaje simbólico y se enuncian cuatro ejercicios que se resuelven utilizando la teoría enunciada anteriormente; las tareas son del tipo escribir en lenguaje algebraico, expresar en lenguaje simbólico, relacionar un enunciado con una expresión algebraica y calcular el valor de cada expresión algebraica para ciertos valores dados. Lo enunciado se muestra en la Figura 6, a modo de ejemplo de introducción del capítulo, pues a lo largo de los demás se utiliza la misma metodología.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El lenguaje simbólico

Martín y Daniel juegan a las adivinanzas.
Martín: Elegí un número y sumále 5. Al resultado multiplicálo por 3. Restá 9 y, por último, dividí por 3. Decíme qué número obtuviste.
Daniel: 19.
Martín: Habías elegido el 17.

Para determinar el número elegido por Daniel escribimos en lenguaje simbólico cada uno de los pasos que efectuó.

• Elegir un número	x
• Sumar 5	$x + 5$
• Multiplicar por 3	$(x + 5) \cdot 3 = x \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 3x + 15$
• Restar 9	$3x + 15 - 9 = 3x + 6$
• Dividir por 3	$\frac{3x + 6}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{6}{3} = x + 2$

Fig.5: Expresiones y fórmulas algebraicas. Matemática 8vo pág. 124.

Luego, se ofrecen ejemplos de operaciones con expresiones algebraicas aplicando propiedades ya conocidas como supresión de paréntesis, asociación de términos semejantes, resolución de sumas o restas, aplicación de la propiedad distributiva, búsqueda de denominador común, asociación de factores de igual base, entre otras. A continuación, se dan dos tareas donde se busca que los alumnos efectúen las operaciones indicadas y expresen de la forma más simple posible cada expresión algebraica, esperando que justifiquen cada paso por medio de las propiedades aplicadas. Aunque no se lo pide explícitamente, pero se induce que la actividad se debe resolver como los ejemplos antes enunciados. Luego se presenta un apartado enunciando algunos productos notables, como el que se muestra en la Figura 7.

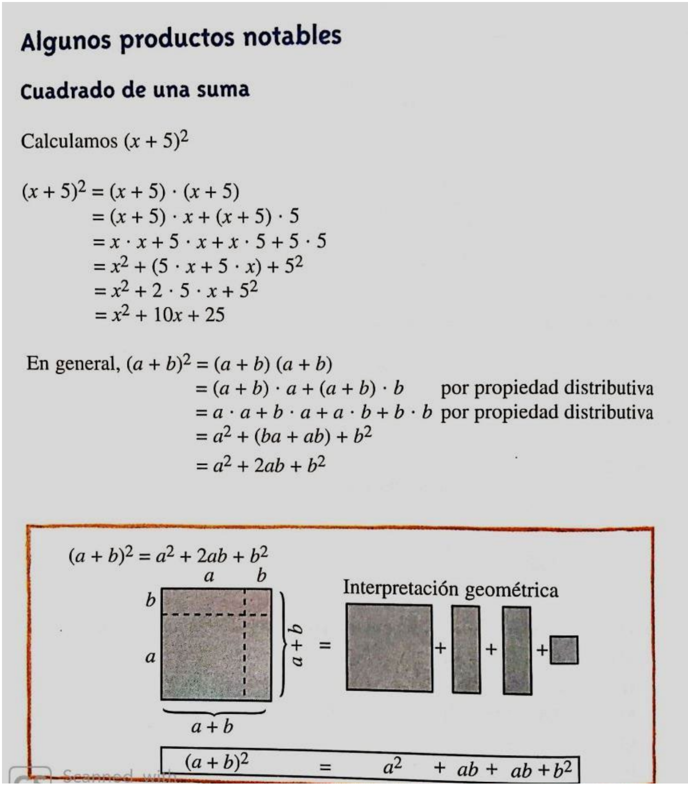
El último número obtenido por Daniel es $x + 2$
Si $x + 2 = 19$ entonces $x = 19 - 2$
El número que eligió Daniel es el 17.

- Las expresiones algebraicas indican relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas y se representan por letras.
- El lenguaje simbólico traduce los términos de un problema dado mediante un enunciado en expresiones algebraicas.

$3x + 6$
$x^2 - 9$
$a \cdot b = 18$
$x + y = 0$
$x + 2 = 19$
son *expresiones algebraicas.*

1. Escribí en lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones relativas a los números *a* y *b*.
a) *b* es el doble de *a*.
b) La diferencia entre *a* y *b* es 5.
c) La suma de *b* y el cuádruplo de *a* es 30.
d) El triple de *b* dividido *a* es 6.
e) *b* dividido el doble de *a* es 1.
f) El producto de *a* y *b* es 50.
g) El cuadrado de la diferencia entre *a* y *b* es 25.

Fig. 6: Expresiones y fórmulas algebraicas. Matemática 8vo pág. 125.



Algunos productos notables

Cuadrado de una suma

Calculamos $(x+5)^2$

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= (x+5)\cdot(x+5)\\ &= (x+5)\cdot x+(x+5)\cdot 5\\ &= x\cdot x+5\cdot x+x\cdot 5+5\cdot 5\\ &= x^2+(5\cdot x+5\cdot x)+5^2\\ &= x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2\\ &= x^2+10x+25\end{aligned}$$

En general,
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\,(a+b)\\ &= (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b \quad \text{por propiedad distributiva}\\ &= a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b \quad \text{por propiedad distributiva}\\ &= a^2+(ba+ab)+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Fig. 7: Expresiones y fórmulas algebraicas. Matemática 8vo pág. 128.

En primer lugar, se da un ejemplo de un producto notable, luego se enuncia lo observado de forma general en el ejemplo y por último se establece la interpretación geométrica del mismo. Se rescata esta manera de presentación porque relaciona el álgebra con la geometría, además se argumenta que verdaderamente se llega al mismo resultado a través de distintos procedimientos. Luego se dan tareas de calcular, expresar en forma más simple, completar con el término que falta para que el desarrollo sea correcto y dar una interpretación geométrica para los distintos productos notables propuestos en este apartado.

De la misma manera se trabaja en los siguientes dos capítulos de la unidad, destacándose en el segundo capítulo por medio de ejemplos que una ecuación puede tener una única solución, ninguna o varias. Esto es sumamente importante pues así los alumnos pueden conocer los distintos tipos de soluciones y no pensar que toda ecuación tiene siempre una única solución. Del último capítulo se destaca la relación que se establece entre una función y la descripción de la misma como fórmula. Se dan también las interpretaciones gráficas de las funciones trabajadas (lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa), mostrando por medio de la resolución de distintos ejemplos que la fórmula brinda más información al reemplazar en f(x), *x* por un valor cualquiera.

Las actividades propuestas de alguna manera se diferencian de los NAP y los diseños jurisdiccionales de la provincia pues no se trabaja con expresiones equivalentes, mucho menos con un proceso de generalización para validar la equivalencia de expresiones distintas a simple vista. Tampoco se presentan actividades donde se promueva la resolución por medio de diferentes procedimientos ni se pide explícitamente la justificación de los cálculos realizados. Interesa destacar que se trabaja la posibilidad de que las ecuaciones y problemas admitan más de una solución o ninguna. No obstante, esto se visualiza primero por medio de ejemplos, lo cual obstaculizaría la posibilidad de que los alumnos lo descubran por sí solos y puedan así crear un nuevo conocimiento en forma autónoma.

El libro se podría emplear para ejemplificar y como ejercitación para resignificar los contenidos, pero antes se debería construir el conocimiento de estos temas para que los alumnos noten que su compromiso con el estudio es central para obtener nuevos conocimientos.

Los objetivos con los que se utiliza el álgebra escolar en el libro son: establecer relaciones, resolver problemas, explorar propiedades y calcular. Hay una gran cantidad de tareas que tratan sobre relacionar enunciados en lenguaje coloquial con expresiones simbólicas y sobre escribir en lenguaje coloquial ciertas expresiones simbólicas; en todo momento se pide que se efectúen las operaciones indicadas y se expresen los resultados de la manera más simple posible. Luego todo un capítulo (cuatro hojas) trata sobre problemas y resolución en general con ecuaciones e inecuaciones, dando distintos enunciados de problemas y pidiendo que se planteen y resuelvan las ecuaciones; elegir la respuesta más precisa (ecuación correspondiente) dado un enunciado. Entre los problemas a resolver, algunos son de la vida diaria, otros son de lógica matemática, otros de perímetro y área de ciertas figuras geométricas y otros problemas son expresiones matemáticas como: “A un número se le suma tres y se obtienen la diferencia entre su doble y uno”. Se pone de manifiesto que los problemas planteados tienen una solución única, varias o ninguna, lo que fortalece el trabajo algebraico pues se deja a los alumnos el explorar ecuaciones donde la solución no sea única o donde el problema no tenga solución. Se observa la exploración de propiedades porque después de definir las reglas formales de las operaciones se dan ejercicios de aplicación.

Las acciones en las que se espera que los estudiantes se involucren al resolver las actividades propuestas por el libro explorando cuando “hacen álgebra”, son: manejar expresiones simbólicas, traducir símbolos y, leer y crear expresiones algebraicas. En el capítulo estudiado se dan acciones comunes en álgebra por medio de tareas sobre resolución de ecuaciones, inecuaciones y funciones, por lo que se sustituyen números por variables. Se debe simplificar y resolver; se dan actividades de vincular el lenguaje coloquial con expresiones simbólicas y viceversa, se dan situaciones problemáticas que deben expresarse de manera simbólica y en ciertos casos resolverse. Esto último se relaciona con crear expresiones algebraicas, pues deben establecer la variable y luego crear una expresión apropiada para así poder llegar a la solución del problema modelado. También se visualiza por medio de la traducción de símbolos y la lectura de las expresiones algebraicas, un medio de extraer información de ellas.

Por medio de los siguientes objetos se realizan las acciones algebraicas para perseguir los objetivos: símbolos, expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones, relaciones y funciones; pues se busca en el último capítulo indicar, producir, reproducir y manejar dependencias y correspondencias entre variables, además se permiten las soluciones gráficas de las ecuaciones y las variables aparecen como números desconocidos[1]. Se utilizan distintos símbolos a lo largo del capítulo analizado como: $=, >, <, \geq, \leq\ y\ (\ldots)$.

En términos de Puig (2012), el abordaje propuesto se clasifica como de *proceso de generalización*, pues en el mismo se visualiza el álgebra como medio para estudiar pautas en configuraciones geométricas o en conjuntos ordenados de números y elaborar conjeturas expresadas en el lenguaje del álgebra. Si bien no se pide que los alumnos demuestren esas conjeturas teniendo en cuenta el dominio de las transformaciones involucradas, se visualizan ejemplos donde el dominio de las transformaciones de las expresiones algebraicas es de suma importancia.

Se concluye que el sentido del álgebra que prioriza este último libro analizado es del tipo *aritmética generalizada*, pues la construcción del álgebra se produce en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción de expresiones numérico-verbales; además las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos, y no se explicita la demostración o justificación de los procedimientos realizados por los alumnos para llegar a los resultados obtenidos al resolver. Se advierte la falta de trabajo sobre expresiones algebraicas equivalentes y la ausencia de tareas donde una expresión algebraica se halle por medio de la generalización.

5. Conclusiones

Según Sessa (2005), cuando se considera en conjunto el sistema profesores y alumnos, se encuentra una fuerte tensión sobre lo que entiende cada uno por álgebra escolar. Para los profesores, el álgebra representa la herramienta por excelencia de la matemática. Desde el punto de vista de los alumnos, el álgebra se presenta como una fuente de pérdida de sentido y de dificultades operatorias, muchas veces, “muy difíciles” de superar.

Los autores consultados (Bolea, 2003; Puig, 2012; Sessa, 2005) postulan la consideración del álgebra escolar como instrumento de modelización, pues este modelo introduce al álgebra como una herramienta para discutir y justificar propiedades matemáticas generales y para resolver problemas, construyendo así un conocimiento más sólido y cargado de sentido. En contraposición a esta perspectiva, se presenta el modelo del álgebra como *aritmética generalizada*, que conduce a una simplificación de los objetos y a una algoritmización de las prácticas (Bolea, 2003).

El análisis de los libros de textos seleccionados pone en evidencia que el modelo institucional que predomina se sitúa próximo al de *aritmética generalizada*. Pese a sus limitaciones explicativas, ha sido aparentemente asumido acríticamente en la práctica, como es posible inferir de la consulta realizada a los docentes (quienes propusieron mayoritariamente los libros analizados), es decir, el modelo es aceptado sin mayor discusión.

Entre las principales características observadas en los textos que evidencian el predominio de este modelo, se puede mencionar que se toma la resolución de tareas

[1] Si bien excede los alcances de este artículo, es interesante la forma en que Arcavi y col. (2017) analizan las distintas facetas del concepto de variable: un marcador de posición para un número, un número desconocido, una cantidad variable, un número generalizado y un parámetro, como se describen en el inciso 3.1.

como una mera aplicación de fórmulas. Muchas de estas tareas son de traducción a símbolos y de lectura de expresiones algebraicas. La gran cantidad de ejercicios similares parece apuntar más a la mecanización de prácticas que a la adquisición de destrezas. Los problemas que se proponen apuntan indefectiblemente al planteo de una ecuación cuya solución siempre existe, es única y también es la solución del problema. No se trabaja con expresiones equivalentes ni se pide la justificación de los pasos. Las ecuaciones se expresan como una cuenta de la cual se desconoce un término. Se plantean problemas cuya resolución no hace necesario el uso de las mismas y donde los estudiantes utilizan esta herramienta por el simple hecho de estar en el tema “ecuaciones”. Por lo tanto, el sentido de las ecuaciones no puede ser construido por los estudiantes, sino que se tiende a memorizar las reglas de “despeje”. Se consideraría entonces, que la enseñanza para “introducir” a los alumnos en el álgebra, es por medio del aprendizaje de técnicas para “despejar la incógnita” de una ecuación.

El estudio de campo corrobora el hecho de que, pese a existir manuales escolares que siguen los lineamientos curriculares jurisdiccionales y los NAP, en un marco teórico adecuado y moderno, los docentes en su mayoría eligen aquellos que priorizan el modelo de *aritmética generalizada*.

No obstante lo anterior, en uno de los libros analizados se observan algunos rasgos propios del modelo que asume al álgebra escolar como *herramienta de modelización*. Entre las cuestiones que se ponen en evidencia en este texto, en línea con este modelo, es que se proponen actividades en las que los estudiantes pueden generalizar y justificar el porqué de la elección de las fórmulas. Los conocimientos son introducidos en relación directa con los problemas que se proponen y no de manera aislada o fragmentada. Dichos problemas se pueden resolver por distintos caminos, luego de un trabajo exploratorio, llegando a una o varias fórmulas cuya equivalencia se debe analizar. El tratamiento y validación de expresiones algebraicas equivalentes contribuye directamente a la construcción de sentido del álgebra.

En lo que refiere a las diferentes perspectivas relacionadas con la resolución de problemas según Puig (2012), se ha observado que en algunos materiales se busca que los procesos de resolución de problemas sean capaces de darle sentido a la manipulación algebraica, pues se visualiza el álgebra como medio para estudiar pautas en configuraciones (geométricas o de conjuntos ordenados de números) y para la elaboración de conjeturas expresadas en el lenguaje del álgebra. También se descontextualiza lo planteado en algunos problemas para discutir la matemática involucrada en ellos, para así poder utilizar y adaptar lo realizado en otros problemas de naturaleza similar. Por el contrario, cuando la resolución de tareas se realiza por medio de la ejecución de reglas de transformación, no da sentido a lo realizado. En estos casos las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado y la solución de los problemas no busca interpretar la situación, sino que es un simple resultado de la ecuación planteada para ese problema en particular.

A modo de cierre, cabe destacar que el estudio llevado a cabo pone en evidencia la necesidad de que la investigación en educación matemática estreche lazos más cercanos con la práctica docente. Si bien las recomendaciones provenientes de la investigación didáctica señalan la necesidad de asumir un modelo que interprete al álgebra escolar como herramienta de modelización, los libros de texto analizados apuntan al modelo más tradicional de aritmética generalizada. Se requieren ámbitos de discusión, tanto en la formación inicial como continua de los docentes, en los que se reflexione en torno a los criterios de selección de libros de texto, así como acerca de la necesidad de realizar una lectura crítica antes de tomar decisiones con respecto a la adopción del texto a utilizar en el aula.

6. Referencias bibliográficas

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of Algebra: Ideas, insights, and activities.* Londres: Routledge.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización en organizaciones matemáticas escolares*, Tesis de doctorado. Universidad de Zaragoza.http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Tesis-Pilar.pdf

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). *Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school?Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Charnay, R. (1994). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas.* En C. Parra e I. Saiz, *Didáctica de matemática. Aportes y reflexiones*. 51-63. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Editorial Horsoria.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penséehumaine: registres sémiotiques et apprentissageintellectuels*. Berne: Peter Lang.

Espinoza, R., Pochulu, M. y Jorge, M. J. (2013). *El análisis didáctico de textos escolares ¿qué herramientas proveen las diferentes líneas y enfoques en educación matemática?* VII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo.

Gascón, J. (1993).*Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, Recherches en didactique des mathematiques*, 13/3, 295-332.

Gascón, J. (1994).*Un nouveaumodèle de l'algèbreélémentairecommealternative à l'"arithmétiquegénéralisée", Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1999).*La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, Educación matemática,* 11/1, 77 - 88.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231. https://es.scribd.com/document/165322088/El-caso-del-algebra-Gascon

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnigt, M. (2000).*Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa.* (5° edición). Madrid: Pearson Addison Wesley.

Mercado, L. (2016). *Introducción al trabajo algebraico en la escuela secundaria: ¿qué actividades eligen los docentes?* Tesina para la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, Universidad Tecnológica Nacional. http://ria.utn.edu.ar/bitstream/handle/123456789/1431/tesinaLilianaMercado.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe*. Recuperado el 26 de julio de 2019 de: https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Ministerio de Educación. (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios.* CICLO BÁSICO EDUCACIÓN SECUNDARIA. 1º y 2º/2º y 3º Años. Recuperado el 26 de julio de 2019 de:https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-basico?coleccion=132584

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI,* anexo, 1-20. http://www.uv.es/puigl/2012seiem.pdf

Sessa, C. (2005).*Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sierra, M.; González, M. T.; López, C. (1999) Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, 1940-1995. *Enseñanza De Las Ciencias*: revista de investigación y experiencias didácticas, vol. 17, n° 3, 463-476. https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v17n3/02124521v17n3p463.pdf

Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 199-224. https://revistas.um.es/educatio/article/view/133031

Vargas J. (2003). La Construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Revista Ciencia y Tecnología*, 14. https://www.researchgate.net/publication/267376495_LA_CONSTRUCCION_DE_LOS_IRRACIONALES_DE_DEDEKIND_COMO_INSTRUMENTO_EN_UN_ANALISIS_DE_TEXTOS_DE_OCTAVO_GRADO

7. Libros de textos

Boccioni, M., Cabral, G., Mercado, L., y Vigione, Y. (2017). *ActivAdos 2. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos.

Berman, A.; Dacunti, D.; Pérez, M. M. y Veltri A. V. (2007). *Matemática II*. Buenos Aires. Argentina: Santillana S. A., *serie Nuevamente*

Ferrerini, G., Seveso, J. y Wykowski, A. (2000).*Matemática 8 E.G.B/1er Año*. Buenos Aires. Argentina: Kapelusz serie Vértices.

Aguirre Andrea Estefanía: Profesora de Matemática (Universidad Nacional del Litoral- UNL, Argentina), dicta clases en escuelas secundarias de la ciudad de Santa Fe (Argentina) y de los alrededores. Participa en proyectos de investigación en Educación Matemática. Dirección de correo electrónico: andreaaguirre.17@gmail.com

Cerati Eleonora: Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Matemática (UNL). Fue docente en diversas facultades de la UNL y de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (Argentina). Dirigió y participa en proyectos de investigación en Matemática y en Educación Matemática. Autora de publicaciones en temas de su especialidad. Dirección de correo electrónico: eleonoracerati@gmail.com