Estrategias de resolución de un problema combinatorio en estudiantes de noveno grado de básica secundaria

Luis Alejandro Bustos Mancera
lalejandrobustosm@gmail.com
Estudiante Maestría en Docencia de la Matemática UPN

Felipe Jorge Fernández Hernández
fjfernandez@pedagogica.edu.co
Profesor Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. En esta ponencia se reportan estrategias empleadas por estudiantes de noveno grado – con edades entre 14 y 16 años- cuando abordan la resolución de un problema combinatorio. El marco conceptual adoptado, aunque parte de las categorías propuestas por English (2007), sugiere su ampliación. Los resultados encontrados evidencian la necesidad de extender las categorías inicialmente propuestas, por razones como la pertinencia de dar cuenta de cuestiones asociadas al contexto usado en el problema propuesto. Finalmente, la reflexión acerca de los resultados motiva el hacer un llamado a considerar en las clases de matemáticas, más allá de la proposición de fórmulas y la realización de procedimientos rutinarios, los diferentes tipos de razonamiento que surgen de la actividad de los estudiantes al enfrentarse a estos problemas.

Palabras clave: Combinatoria, Razonamiento, Resolución y estrategias.

1. Introducción

Esta ponencia hace parte de los avances de un estudio[1] en el cual se pretenden analizar las estrategias usadas por estudiantes de grado noveno cuando abordan problemas combinatorios simples. La presentación se centra en las estrategias relacionadas con procedimientos sistemáticos propuestas por English (2007), sin embargo, en Bustos (2011) también se da cuenta de estrategias relacionadas con procesos aditivos y multiplicativos desde la perspectiva propuesta por Shin y Steffe (2008).

Inicialmente se presentan algunas consideraciones generales acerca de la importancia de la combinatoria a nivel curricular e investigativo y se sigue con un esbozo de los referentes teóricos y metodológicos adoptados; luego, se presentan los análisis de respuestas de cuatro

[1] Los análisis reportados en esta ponencia hacen parte de los avances del trabajo de grado para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

estudiantes en donde se destacan los casos de dos respuestas que merecen una atención especial. Finalmente, se presentan las conclusiones de dichos análisis.

2. Consideraciones sobre la combinatoria a nivel curricular e investigativo

De acuerdo a los documentos curriculares oficiales (MEN, 1998; 2003) la combinatoria aparece como componente del llamado “pensamiento aleatorio y sistemas de datos”. Aunque si bien no se menciona explícitamente, se da cuenta de ella al vincularla al cálculo de probabilidades en los estándares de grado octavo y noveno de educación básica secundaria donde se sugiere que las combinaciones y permutaciones posibilitan el cálculo de probabilidades desde un enfoque clásico (MEN, 2003). No obstante, en nuestro contexto escolar, estas sugerencias frecuentemente sólo se quedan en calidad de recomendaciones, ya que hay evidencias, por ejemplo, de que una buena proporción de profesores no dominan este tópico o no lo abordan en sus clases (Fernández, Sarmiento y Soler, 2008), y en consecuencia, muchos estudiantes heredan las dificultades que al respecto tienen los profesores.

La importancia de la combinatoria (Batanero, Godino y Navarro - Pelayo, 1996) radica en la fundamentación que le aporta a ideas estocásticas básicas (Batanero, 2004), ya que “más que ser algoritmos [las operaciones combinatorias] de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos [aleatorios]” (Batanero, 2004, p. 22). Varios estudios se han realizado para analizar el tratamiento de la combinatoria en el aula partiendo de este planteamiento (Roa y Navarro – Pelayo, 2001; Batanero y Godino, 1996), pero no obstante, los estudios de Roa, Batanero y Godino (Roa, 2000; Roa, Batanero y Godino, 2003) muestran que incluso estudiantes con alta preparación en matemáticas presentan dificultades para resolver problemas combinatorios simples, ubicando como una de las razones el manejo privilegiado y excesivo de definiciones y fórmulas en la enseñanza.

En esta última investigación (Roa, Batanero y Godino, 2003) se sugiere el desarrollo de una serie de estrategias que les permita a los estudiantes enfrentarse con éxito a los problemas combinatorios. Con este presupuesto, el estudio descrito a nivel general en esta ponencia intenta aproximarse al desarrollo de una de tales estrategias (“fijar variables”) en el transcurso de tres sesiones de clase de un grupo de grado noveno de educación básica secundaria, analizando las estrategias usadas por los estudiantes desde las categorías propuestas por English (2007).

3. Referentes teóricos

Este trabajo está basado en el modelo de problemas combinatorios de Dubois (citado en Roa, 2000), quien considera el modelo de selección como una de las configuraciones combinatorias simples (Roa, Batanero y Godino, 2000, p. 7). En el estudio de las estrategias se partió del estudio de Roa, Batanero y Godino (2000) quienes delimitan estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios, dentro de las cuales se hizo énfasis en la estrategia "fijar variables" que corresponde a la estrategia del patrón odómetro estudiada por English (2007), en la cual se basa el análisis propuesto en esta ponencia.

4. Metodología

Se llevaron a cabo tres sesiones de clase con un curso de grado noveno del Colegio Juana Escobar IED de Bogotá, D.C., en las cuales se recogió información de sus producciones escritas, grabaciones de audio y video, y las notas propias del profesor. En cada sesión se fijaron objetivos, procesos hipotéticos de aprendizaje, intenciones de cada tarea, presupuestos sobre las estrategias que usarían los estudiantes y preguntas para socialización con todo el grupo, las cuales se fueron discutiendo y ajustando sesión a sesión con el profesor asesor a partir de los resultados encontrados, en consonancia con la idea de trayectoria hipotética sugerida por Simon (1995). Los problemas combinatorios seleccionados se adaptaron de Batanero, Godino y Navarro – Pelayo (1996) y de Zapata, Quintero y Morales (2010). Para el análisis de los resultados presentados en esta ponencia se tuvieron en cuenta las categorías propuestas por English (2007) para resolución de problemas combinatorios en estudiantes de 7 a 12 años.

5. Análisis de datos

Tomando como base conceptual las categorías propuestas por English (2007), a continuación se analizan estrategias usadas por los niños al resolver problemas combinatorios, acompañadas de respuestas ilustrativas de cuatro estudiantes (llamados en adelante B, C, R e I). Para este análisis se tendrán en cuenta las categorías para problemas tridimensionales (English, 2007), ya que se acomodan mejor a las respuestas del problema propuesto a los estudiantes, el cual exige la permutación de cuatro elementos. Al finalizar, se presentarán otras dos soluciones (llamados A y K) que merecen especial atención y que se escapan de las categorías tenidas en cuenta.

El problema propuesto a los estudiantes fue:

> Laura, Bibiana, Carolina y Lucía deben llegar al banco cada una a pagar los servicios. Si al llegar al banco deben hacer una fila las cuatro personas, ¿de cuántas formas diferentes pueden hacer la fila?

Estrategia de ensayo y error.[2] Esta estrategia se caracteriza por procedimientos de ensayo y error, en la cual los niños no agotan todas las posibilidades (English, 2007). En la respuesta dada por B (ver Figura 1) al problema, se observa que tiene en cuenta la numeración "F_1", "F_2", etc. para llevar la cuenta de las filas que conforman las cuatro personas, ubicando en la primera fila los nombres de acuerdo al orden sintáctico en que se leen en el problema; para la segunda fila, B intercambia los dos primeros nombres de posición manteniendo los otros constantes; luego, en la tercera fila, cambia los tres primeros nombres de lugar, pareciendo que deja como elemento constante el último nombre (Lu), pero en la cuarta fila lo cambia al primer lugar para finalmente en la última fila volverlo a colocar en el cuarto lugar.

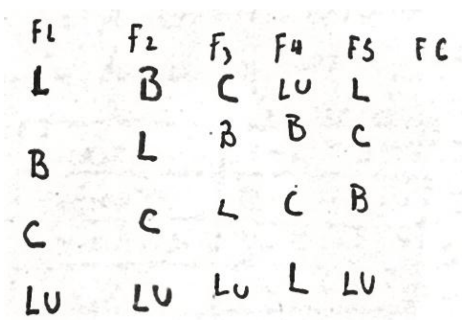

Figura 1. *Respuesta dada por B que caracteriza la estrategia de ensayo y error*

[2] El nombre sugerido en este escrito a cada estrategia obedece sólo a efectos del análisis y corresponde a las acciones que efectúan los estudiantes que caracterizan cada una de ellas. En English (2007) no se le da nombre a cada estrategia sino que se numeran consecutivamente.

Se evidencia, entonces, que este estudiante no mantiene un ítem constante hasta agotar todas las ordenaciones sino que indistintamente cambia los nombres de lugares, lo que puede dar evidencia de categorizarse en esta estrategia. Sin embargo, lo que hay que destacar en esta respuesta es que el estudiante pareciera adoptar una forma de encontrar todas las posibilidades de ordenar las personas en la fila teniendo en cuenta que el primer elemento a permutar (L) cambia de posición del primero al segundo en la segunda fila, al tercer puesto en la tercera y por último al cuarto lugar en la cuarta. Dicha estrategia parece coincidir con lo que llama English (2007) un ítem de carácter cíclico, por lo que la respuesta de este estudiante también se podría considerar dentro de la siguiente estrategia.

Estrategia de ensayo y error más procedimientos sistemáticos incipientes. Esta estrategia se caracteriza porque se observan en las respuestas de los estudiantes tanto procedimientos de ensayo y error como procedimientos sistemáticos incipientes. Los niños adoptan un ítem constante pero no es agotado completamente (English, 2007). En la respuesta de C (ver Figura 2 donde las líneas en color se trazaron deliberadamente para facilitar el análisis) parecieran distinguirse los dos procedimientos: por una parte, C comienza dejando fijo el último elemento y cambiando de lugar los restantes, los cuales se observan en la parte superior de su respuesta (las enumeradas del 1 hasta 12). Se observa que al dejar fijo el último ítem sólo obtiene tres ordenaciones diferentes para cada uno, ya que para los tres primeros lugares adopta un carácter cíclico, es decir, el nombre que consideró en el primer lugar cambia en la segunda al segundo y luego al tercero, y así mismo procede con los otros dos nombres.

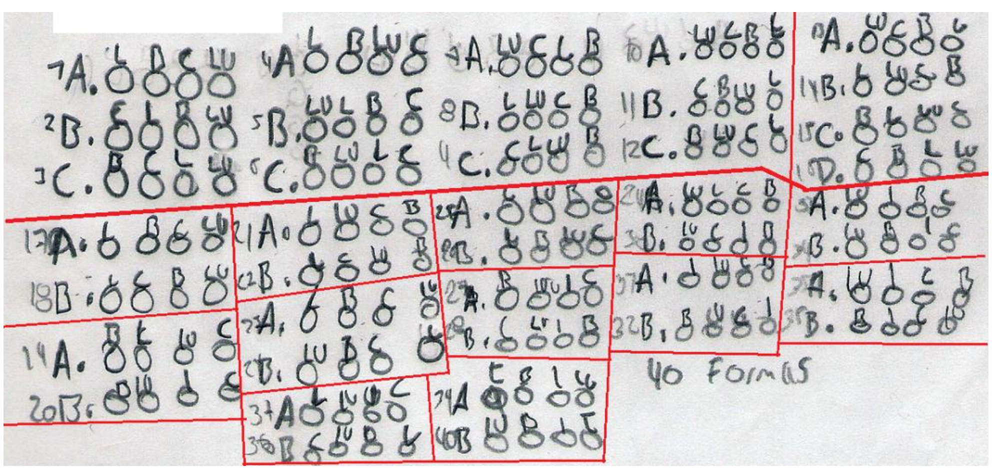

Figura 2. *Respuesta de C*

Luego, de las opciones 13 a la 16 aparece la misma estrategia analizada del ítem de carácter cíclico que caracteriza las respuestas de esta estrategia (English, 2007). Esto significa que el estudiante cambia de lugar el primer nombre (Lu) en la siguiente fila al segundo lugar, luego al tercero y finalmente a la cuarta, pero esto mismo lo hace paralelamente con los demás nombres a lo largo del arreglo (ver en la Figura 3 este detalle).

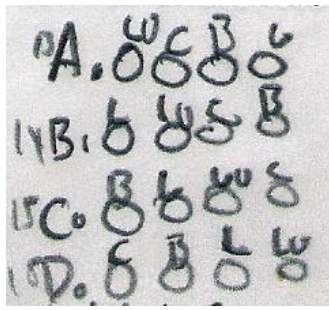

Figura 3. *Extracto de la respuesta de C donde se evidencia una estrategia de carácter cíclico*

En las siguientes ordenaciones, se observa que toma una ordenación cualquiera – que puede estar repetida – como la fila 17 e intercambia de lugar las posiciones centrales (B y C) para formar la fila 18, luego toma la fila 19 e intercambia de la misma manera las posiciones centrales para obtener la fila 20. De la misma forma procede con las otras diez parejas de filas, cambiando cada vez posiciones centrales o extremas.

Estrategia de patrón cíclico. Esta estrategia se caracteriza porque los estudiantes siguen un patrón cíclico consistente con un elemento seleccionado, pero no logran agotar un conjunto completo de elementos constantes, aunque posteriormente dan cuenta de las ordenaciones que faltan (English, 2007).

En la respuesta dada por R (ver Figura 4), se puede evidenciar que comienza la lista tomando un elemento constante (Laura) y escribe tres ordenaciones sin agotarlas todas. Estos elementos restantes (Bibiana, Carolina y Lucía) los ordena teniendo en cuenta el carácter cíclico descrito anteriormente, es decir, el último nombre (Lucía) que estaba en el último lugar pasa en la siguiente ordenación al tercer lugar y luego al segundo, y de la misma forma cambia los otros nombres; luego repite el mismo procedimiento para los nombres restantes. Finalmente, repite el mismo proceso nuevamente hasta agotar todas las ordenaciones pero teniendo en cuenta cambiar los elementos restantes de lugar para no repetir ordenaciones ya hechas en las primeras doce permutaciones.

Figura 4. *Respuesta de R que caracteriza la estrategia de patrón cíclico.*

Estrategia del patrón odómetro (completa). Esta estrategia se caracteriza porque los estudiantes toman un elemento constante con el que agotan completamente todas las ordenaciones y de igual manera proceden con cada elemento (English, 2007), el cual recibe el nombre de *odómetro* por relacionarse con el velocímetro de un automóvil al compararse con un diagrama de árbol. En English (2007) se diferencia una estrategia precedente a ésta, en la cual hay evidencia del patrón odómetro pero aplicado solo a algunos conjuntos y no a todos como en la respuesta de I (ver Figura 5); en la información recogida de este problema no se encuentra una respuesta que se caracterice dentro de esa estrategia.

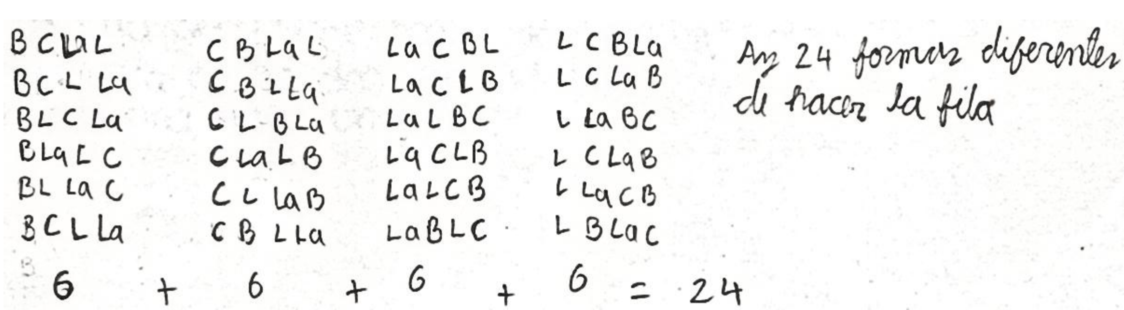

Figura 5. *Respuesta de I que caracteriza la estrategia del patrón odómetro.*

En la respuesta de I se observa que en la parte derecha dispone del primer nombre (B) y lo mantiene como ítem constante hasta formar todas las permutaciones posibles, en las cuales mantiene el carácter cíclico descrito anteriormente en la respuesta de C, es decir, el último nombre (L) pasa en la segunda ordenación al tercer lugar, y luego pasa al segundo en la tercera ordenación; en las siguientes tres permutaciones del mismo grupo, tiene ahora en cuenta el nombre (La) y el carácter cíclico es del segundo lugar hasta que llega al cuarto. Este mismo procedimiento se observa en los restantes tres grupos de ordenaciones propuestos por I.

Al igual que English (2007) en algunas de las respuestas dadas por los estudiantes se evidenció que para ellos lo que significa la condición “diferentes” del problema es diferente a lo que se espera den sentido al resolver el problema. Una de tales respuestas fue dada por A (ver Figura 6), en la cual “diferentes” significa que en las diferentes ordenaciones ninguno puede volver a ocupar una posición ya ocupada en otra ordenación.

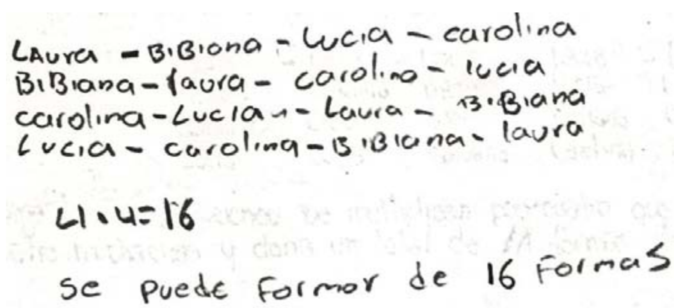

***Figura 6**. Respuesta de A que ejemplifica el significado dado a “diferentes”.*

Se puede observar en la respuesta que al ocupar Laura la primera posición en la fila (leyendo de izquierda a derecha) no volverá a ocupar esta misma posición en ninguna otra ordenación de las cuatro que propone. Al analizar la operación que usa el estudiante, se observa que también tiene en cuenta el orden de manera vertical, en el cual tampoco se repiten nombres en las posiciones que ocuparon en las columnas precedentes. Coincidiendo con English (2007), al parecer los estudiantes interpretan “diferentes” en el sentido de “diferentes de todas las maneras” (English, 2007, p. 144), y por lo tanto cada nueva ordenación es completamente diferente a todas las anteriores.

Otro aspecto que merece especial atención en las respuestas dadas por los estudiantes, es su relación explícita con el contexto del problema. En particular, algunas de las respuestas de los estudiantes (ver Figura 7) tuvieron en cuenta la disposición que hacen los clientes cuando hacen las filas en un banco.

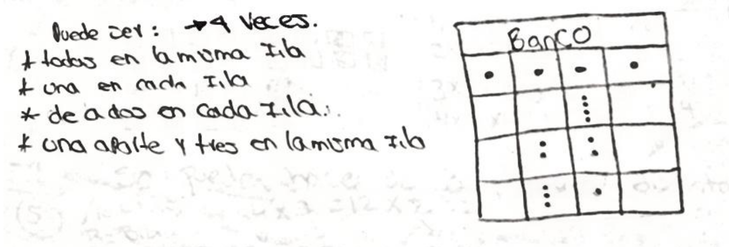

***Figura 7**. Respuesta de K contextualizada del problema*

En este caso, el estudiante K tuvo en cuenta la forma de ubicar las personas en los diferentes cajeros del banco, y la representación gráfica de la solución corresponde con cada una de las respuestas escritas en la parte izquierda. Esta respuesta se escapa de las categorías propuestas por English (2007) y abren la posibilidad a otros estudios sobre las estrategias empleadas por los estudiantes, en favor de la inclusión del modelo de colocación propuesto por Dubois (1984) que podría sugerir contextos más asequibles a los estudiantes.

6. Conclusiones

Las estrategias para resolver problemas combinatorios pueden ir desde métodos de ensayo y error, pasar por estrategias de comportamiento cíclico en la búsqueda de regularidades, hasta estrategias que permiten agotar todas las configuraciones solicitadas en el conteo, basados en las estrategias propuestas por English (2007). Además, aunque las edades de los estudiantes tomadas en cuenta en esta ponencia son de mayor rango que las analizadas por English (7 a 12 años) no se evidencian mayores diferencias en la estrategias usadas. El análisis propuesto pone de manifiesto la complejidad de los razonamientos combinatorios en los estudiantes, lo que implica para el profesor entrar a considerar las respuestas de los estudiantes para intervenir reflexivamente sobre la adecuación de métodos más precisos y eficientes. Además, la terminología que se usa con frecuencia en este tipo de problemas no demanda una única interpretación por parte de los estudiantes, lo que llama la atención acerca de la forma en que se redactan, presentan y discuten los problemas en las clases.

Finalmente, se cuestiona si aparte del modelo de selección – que privilegia el cálculo usual de combinaciones, permutaciones y variaciones- se puede entrar a considerar otro modelo como el de colocación, que puede resultar más familiar a situaciones de los estudiantes y que permitan que ellos puedan dotar de significado y se involucren en la resolución del problema, intentando superar el trabajo rutinario de fórmulas y procedimientos algorítmicos que caracteriza la enseñanza de la combinatoria.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Godino, J. & Navarro – Pelayo, V. (1996). Razonamiento combinatorio. Madrid, España: Síntesis.

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales: ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? Ensino e Aprendizagen de Probabilidades e Estadistica. Actas I Encontro Probabilidades e Estadistica na Escola. Centro de Investigacao e Psicologia. Universidade do Minho. Portugal.

Bustos. L. (2011). Análisis de estrategias de resolución de problemas combinatorios en estudiantes de noveno grado de básica secundaria. Documento de trabajo elaborado en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, UPN. (Documento borrador de circulación restringida).

English, L. (2007). Children's strategies for solving two – and – three – dimensional combinatorial problems. In: Leder, Gilah C. and Forgasz, Helen J., (Eds) Stepping stones for the century: Australasian mathematics education research. Sense Publishers, The Netherlands, pp. 139 – 156.

Fernández, F., Sarmiento, B. & Soler, N. (2008). Conocimiento estadístico y probabilístico de profesores de educación básica y media. Informe de Investigación DMA 014-06. Centro de Investigaciones (CIUP).

Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares curriculares en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá, Colombia. Gaia.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, *15* (002), 5 – 25

Roa, R & Navarro – Pelayo, V. (2001). Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. Recuperado el día 2 de marzo de 2010 dewww.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Roa-Navarro.doc

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114 – 145.

Shin, J. y Steffe, L. (2008). Seventh graders' use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. En Swars, S.L., Stinson, D.W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). (2009). Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University.

Zapata, L., Quintero, S. y Morales, S. La enseñanza de la combinatoria orientada bajo la teoría de las situaciones didácticas. Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (7 al 9 de octubre de 2010). Bogotá, Colombia.