Análisis epistemológico de un problema basado en el método de exhaución para contribuir los procesos de enseñanza de la integral

Erika Katherine Ariza
katatio@hotmail.com

Daniel Mauricio Cifuentes
danicimao@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Resumen. *Reconociendo la importancia que tiene el diseño de situaciones problema, se presenta el análisis epistemológico como una herramienta útil para el docente al momento de orientar el proceso de enseñanza - aprendizaje del objeto matemático integral, cuando el objetivo es generar comprensión sobre este, para ello se ejemplifica desde el análisis de una de las proposiciones en las que se aborda el método de exhaución, cuya importancia radica en ser fundamento de la integral, permitiendo rescatar elementos de la configuración del concepto y de allí determinar algunas ventajas e implicaciones que surgen en el trabajo en el aula cuando se tiene presente la relación entre las situaciones problema, el conocimiento del docente y el análisis epistemológico.*

Palabras clave: Epistemología, planteamiento de problemas, integración, geometría analítica, comprensión.

1. La integral: objeto matemático de enseñanza

Al realizar una mirada sobre la matemática escolar actual, se evidencia la tendencia por presentar el objeto matemático integral de una manera formal, conllevando a un aprendizaje memorístico, centrado en un conjunto de formulas asociadas con la derivada a tal punto que una de las definiciones otorgadas para la integración es la de antiderivada, mas no en su función misma, como recurso para encontrar el área de regiones irregulares y que tiene aplicaciones para el análisis de funciones, que por ejemplo describen fenómenos físicos, lo cual es necesario para resolver situaciones problema en el ámbito socio-cultural, pues existe una tendencia a abordar los conceptos de una manera formal, axiomatizada y cada vez más distante de la resolución de situaciones problema, sustituidas por la resolución de ejercicios cuya solución requiera de la aplicación de reglas o algoritmos únicos, que solo perduraran en el estudiante mientras la evaluación sea efectuada, y sin llegar a la comprensión del concepto.

Desde el marco legal que referencia la forma como se debe llevar a cabo los procesos de enseñanza de la integral , se identifica en los Estándares Básicos de Competencias (MEN) la necesidad de una serie de aprendizajes en cuanto a la variación y el cálculo diferencial e integral, para esto consideran preciso la modelación en distintos sistemas o registros, partiendo del estudio de conceptos, técnicas, métodos de estimación y de aproximación en contextos de medida, sin embargo, estos aspectos están descuidados en la enseñanza del objeto matemático y tienen consecuencias en la construcción del significado.

Si el interés de la educación se centra en que la matemática sea de utilidad y no una disciplina tediosa, debe existir una preocupación por el aprendizaje significativo de los estudiantes, al respecto Godino (2003) indica que el significado de la matemática resulta principalmente desde los problemas que se resuelven, más no de las definiciones y las fórmulas, pues así se limita la comprensión del concepto, al respecto Sierpinska (citado en Godino, 2003) menciona que:

> "comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado".

2. Una mirada teórica sobre la epistemología de la matemática en los procesos de enseñanza

Asumiendo la comprensión de los objetos matemáticos y la resolución de problemas como pauta principal para la educación, se deben buscar situaciones propicias, que contextualicen al estudiante en la resolución de un problema y permitan al docente ser guía que complejice y oriente de manera crítica la situación, para ello se debe reconocer elementos de la configuración del concepto a enseñar, que le permitan hacerse una idea sobre el significado que quiere que los estudiantes construyan, frente a esto se plantea "el análisis epistemológico" como herramienta, para tener en cuenta a la hora de plantear situaciones problema, ya que:

> "permite tomar elementos de la génesis de la historia y la epistemología para el aprovechamiento en la didáctica de las matemáticas" Filloy (citado en Godino 2003).

Frente a la problemática presentada en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, el análisis epistemológico facilita información sobre los distintos caminos, dificultades y obstáculos que tuvieron que afrontar los matemáticos, pues,

> "La historia permite evidenciar como aparecieron las teorías y procedimientos matemáticos, desde un contexto de resolución de problemas" Sierra (sf),

Los cuales pueden ayudar a superar los presentados en la enseñanza actual; de esta manera el análisis epistemológico se convierte en un recurso para que él docente determine la idea personal que tiene sobre las propias matemáticas, sirviendo de apoyo para la construcción de situaciones de enseñanza, pues el docente debe asumir un rol complejo, que involucra no solo orientar y explicar el concepto, sino también debe escoger adecuadamente un conjunto de situaciones que conlleven a su comprensión, pues cada situación debe ser coherente con el proceso y las características socio-culturales de los estudiantes.

Teniendo en cuenta esto, el presente documento es una propuesta entorno a la enseñanza de la integral desde la resolución de problemas, siendo la enseñanza de la matemática y las matemáticas mismas un proceso y una institución en constante cambio, producto de mediaciones y constructos socio-culturales, por lo cual se abre la posibilidad de incluir el análisis epistemológico como recurso para el docente desde la reflexión y claridad acerca del significado de los conceptos, los aprendizajes esperados y la forma como esto se puede lograr a la hora de planear sus prácticas docentes y como tal las situaciones problema, todo con el fin de promover en los estudiantes un aprendizaje significativo que admita no solo el lenguaje formal como evidencia del conocimiento, sino que se involucre con la funcionalidad, aplicación, significado, representaciones y otros aspectos similares de los objetos matemáticos.

3. Análisis epistemológico a problemas que fundamentaron la integral desde los elementos de significado para su enseñanza

Desde la postura de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), sí existe la preocupación por llegar a dar significado a un concepto matemático, conducirá a la indagación de su naturaleza, la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático. El estudio del significado permitirá dejar de hablar de los conceptos como entidades ideales, de ver las proposiciones como la descripción de tales objetos, sino como instrumentos que llevaron a la transformación de proposiciones empíricas, permitiendo reconocer que la matemática constituye un quehacer humano, sistemas de prácticas, resultado del tratamiento, procedimientos, reflexión, lenguaje simbólico y teoremas dados a situaciones problema de la realidad y la matemática, que a su vez han permitido la evolución del objeto matemático.

Las situaciones problema promueven y contextualizan la actividad matemática, el docente puede reconocer algunos de los problemas que históricamente se han abordado y a partir de allí reconocer la funcionalidad de los objetos matemáticos, razonamientos, estrategias, métodos, principales obstáculos, lenguaje, etc. Y con esto diseñar o seleccionar las situaciones eficaces para desarrollar el significado que él pretende de la integral, estas consideraciones llevan a pensar que hay distintos factores que permiten hablar del significado de algunos conceptos partiendo del desarrollo que ha tenido en la historia y que se formalizan en lo que en la actualidad se comprende de las matemáticas, para Godino (2003), estos factores se denominan elementos de significado (lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, argumentos y acciones), los cuales se tomarán como herramienta para hacer un análisis epistemológico de la proposición 2, del libro XII de los Elementos de Euclides, en donde se hace uso de este método y razonamientos mediante los cuales se aborda la cuadratura de figuras, lo cual fue fundamento en la construcción histórica del significado de la integral.

4. Recorrido histórico sobre los problemas que fundamentaron la integral y el método exhaución.

Un analisis historico-epistemológico permitirá identificar problemas y momentos en los que se ha denotado una evolución del concepto matemático, en un contexto cultural, para el caso de la integral, desde los tratamientos dados por Arquímedes, Siracusa y demás precursores, quienes se dieron a la tarea de estudiar problemas tales como la dicotomía de Zenón de Elea, la cuadratura de la parábola de Arquímedes, comparación de regiones triangulares inscritas por segmentos parabólicos, áreas y volúmenes de cicloides y sólidos de revolución, entre otras situaciones que históricamente han aportado al desarrollo del concepto. El tratamiento a dichos problemas se dio a partir de métodos heurísticos tales como *"método de exhausión y método de los indivisibles"*, cuya principal crítica era la falta de validez matemática para abordar y solucionar todos los problemas que hasta entonces habían surgido, esto generó la necesidad de un método unificado, formal y práctico, que se desarrolló por distintos matemáticos (como Riemann, Stieltjes, Lebesgue, Cauchy, entre otros), como lo indican Sarmiento (1991) y Esquivel (1995). Estos hechos, pueden servir de referencia a la hora de plantear situaciones problema que lleven al estudiante a un aprendizaje significativo, el cual sea de utilidad no solo para su vida escolar, sino también en su vida cotidiana y profesional.

4.1 Proposición (XII, 2) de los Elementos, una aplicación del método de exhaución

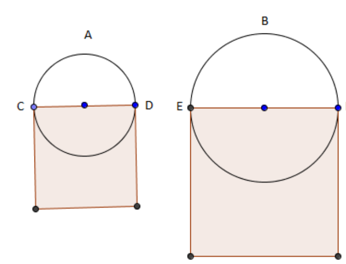
Atendiendo al esquema propuesto por Godino, se presentará el problema y el análisis desde los elementos de significado que configuran la integral dentro de la proposición, visto como un problema de demostración.

4.1.1 Situación – Problema: Para Godino (2003) las situaciones-problema son reconocidas como situaciones prototípicas de uso del objeto o problemas que hacen necesaria su aparición, de allí que al hacer un análisis epistemológico de los problemas que fundamentaron la integral, son varios los momentos históricos y situaciones que pueden resaltarse, un ejemplo, es el aporte realizado desde los *elementos* de Euclides, desde donde se proponen una serie de proposiciones, en las cuales se reconocen propiedades de los entes matemáticos o se explican construcciones de dichos objetos. Al centrar la mirada en el libro XII, cuyo objetivo principal es la obtención del área del circulo y volúmenes de algunos sólidos, resultan proposiciones, que consideradas como problemas, cumplen las condiciones que Godino indica, pues tienen en común propiedades o finalidades similares, en este caso, encontrar áreas y volúmenes desde cuadraturas.

En la proposición 2 del libro XII: *"los círculos son uno a uno como los cuadrados de sus diámetros",* buscando determinar una relación de proporcionalidad entre las magnitudes intervinientes, es decir áreas y longitudes, se pueden determinar los siguientes procedimientos:

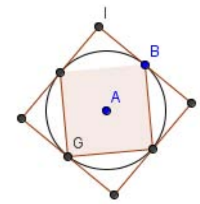
4.1.2 Procedimientos y algoritmos*:* Desde el enunciado se declara la intensión de demostrar la proporción entre el área del circulo y el cuadrado de su diámetro, para ello se apoyan adicionalmente en una representación grafica, mediante la cual concretan y denominan las magnitudes que serán estudiadas, enmarcando las proporciones que se van a garantizar:

1. Plantear que el cuadrado de los diámetros de ambos círculos guardan una razón equivalente a la razón que guardan los círculos respectivamente.

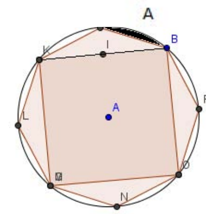


2. Se presenta una demostración indirecta, partiendo de la negación de la tesis, que *"si estas razones no guardan proporción, entonces los cuadrados de los diámetros serán entre sí como uno de los círculos (B) es a un área mayor o menor al área del segundo circulo (A)".*

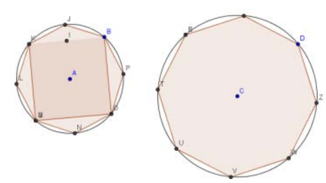
3. Asumiendo que la razón entre los cuadrados de los diámetros de los círculos, es igual a la razón entre el circulo B y un área menor al círculo A, se inscribe un cuadrado dentro del circulo A, que resulta ser mayor a la mitad del área del circulo.



3.1 Se inscriben y circunscriben cuadrados a un circulo (A), “el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito, y como el círculo es menor al cuadrado circunscrito, el cuadrado inscrito será mayor a la mitad del circulo”



4. Se construye un polígono inscrito en el círculo A, de forma que cada lado del cuadrado inscrito sea la base de un triangulo isósceles y su vértice este sobre el segmento circular (ver figura), este triangulo será mayor a la mitad del segmento circular resultante de inscribir un cuadrado en el circulo A.
5. De esta manera el exceso con el que el polígono (octágono) se diferencia del circulo, es menor a la mitad del exceso con la que el circulo difería del cuadrado inscrito en él.



6. Se inscribe un polígono semejante en el circulo B, de forma que guarde la misma razón con el cuadrado del diámetro donde está inscrito, así como la razón entre el polígono inscrito en el circulo A y el cuadrado de su diámetro.
7. Si $\bar{d}$ es el diámetro del circulo A, $\bar{D}$ es el diámetro del circulo B y P representa a los polígonos inscritos en A y B, se tiene que por la hipótesis asumida:

$$\frac{Cuadrado\ inscrito\ en\ A}{B} = \frac{d^2}{D^2} = \frac{P\ inscrito\ en\ A}{P\ inscrito\ en\ B}$$

Además $\frac{A}{P\ inscrito\ en\ A} = \frac{B}{P\ inscrito\ en\ B}$

8. Por la hipótesis expuesta en el paso 2, el círculo A es mayor que el cuadrado inscrito en él, además B es mayor que el polígono en él inscrito, y dado que la razón entre B y el polígono inscrito en él, es igual a la razón entre el cuadrado inscrito en A y el polígono inscrito en A, se llega a una contradicción, pues el cuadrado inscrito en A al ser mayor que el polígono inscrito (por la proporción expuesta en el paso 7), también resultaría ser menor de acuerdo a la construcción, pues al aplicar el método de exhaución, el exceso del circulo A sobre el polígono es menor a la mitad del exceso del circulo A sobre el cuadrado inscrito en él, en otras palabras, el polígono inscrito ocupa un área mayor que el cuadrado.

Por tanto resulta imposible que el cuadrado sea mayor y menor a la vez que el polígono inscrito, entonces la razón de los cuadrados de los diámetros, no es igual a la razón entre el circulo B y un área menor al círculo A.

De manera similar se prueba con un área mayor al círculo A, y como la razón entre los cuadrados de los diámetros de los círculos A y B, no es igual a la razón entre el circulo B y un área mayor o menor al círculo A, entonces la razón se cumple solo entre el circulo B y el circulo A, quedando así demostrada la proposición, por doble reducción al absurdo.

4.1.3 Los tipos de argumentos empleados en la comprobación: En las distintas proposiciones de los Elementos de Euclides se evidencia la justificación de los pasos, como etapas lógicas necesarias para deducir la proporción expuesta entre los cuadrados de los diámetros de los círculos y los círculos mismos. El hilo de la demostración para garantizar la proporción, se apoya en proposiciones anteriores, tales como (I, X), (I, XII) y la Def. IV, en las que se sustenta la aplicación del método de exhaución y el agotamiento del circulo desde la inscripción de polígonos.

El autor se basa en la proposición (1, XII) de los Elementos, en la que se garantiza que los polígonos inscritos en círculos, guardan razón con el cuadrado de los diámetros.

Se observa que si se inscriben en un círculo, primero cuadrados, luego octógonos, y se continúa duplicando el número de lados de los polígonos, el área comprendida entre el polígono y el círculo se va reduciendo en más de la mitad en cada paso (se agota el area del circulo). Se usa este argumento para poder generalizar la idea de que la diferencia entre el circulo y un área menor, puede ser tan pequeña como se quiera, es decir, menor a cualquier otra magnitud dada, por lo tanto el método de exhaución permite garantizar que cualquier polígono inscrito en un círculo, no puede guardar la misma razón con el cuadrado de su diámetro, como la razón entre el circulo y el cuadrado de su diámetro.

El argumento que en ultimas garantiza que la proporción se cumple entre la razón de los cuadrados de los diámetros y la razón entre los círculos, se basa en determinar que la proporción no se da con una magnitud mayor o menor a la magnitud dada, este procedimiento se define como doble reducción al absurdo, pues si la magnitud que satisface la proporción no es diferente al área círculo, entonces debe ser igual.

4.1.4 lenguaje matemático, propiedades y relaciones con otros objetos: Desde la proposición de los Elementos, se establece una serie de relaciones resultantes de la misma construcción acudiendo a los nombres de los entes geométricos, el lenguaje gira en torno a: letras que designan puntos, segmentos o figuras, las cuales permiten establecer razones, proporciones, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, y aspectos metodológicos de la demostración como contradicción, en acuerdo con hipótesis, representaciones de figuras, relaciones e inferencias sobre propiedades como el área, lo cual lleva a aclarar sobre la intencionalidad y significado de la situación, además, el agotamiento del área de un segmento circular a partir de polígonos inscritos, es evidencia de un antecedente al cálculo integral, visto en relación al área bajo la curva.

En cuanto al lenguaje utilizado, es válido analizar la importancia de las distintas representaciones, ya sean geométricas, graficas o verbales, incluyendo las descripciones formales o empíricas, dado que la comunicación es un proceso que permite no solo la transmisión de ideas, sino la comprensión de los objetos matemáticos desde la idea de signo y símbolo. Entre la comunidad académica circula la idea de las matemáticas como una disciplina formal, rígida, difícil y aburrida desde el propio lenguaje y cantidad de símbolos que se utilizan, muchas veces porque los docentes no privilegian las distintas representaciones a las que acuden los estudiantes.

5. Conclusiones: Herramientas para la enseñanza del objeto matemático

La educación matemática es un proceso que compete varios factores, entre ellos el papel que el docente desempeña dentro y fuera del aula, no podemos decir que es un proceso acabado y perfeccionado, pues claramente se pueden reconocer dificultades en las cuales el mismo docente puede interferir, sin embargo estas circunstancias se dan debido a factores tales como la tendencia educativa, la concepción que tiene el docente de las matemáticas, los recursos de los que se dispone y hasta el mismo significado de la matemática que se tiene dentro de la educación matemática, frente a algunos de estos factores es potencialmente útil vincular los fundamentos históricos que han aportado a la evolución del concepto, con el estudio de situaciones problema que promuevan la comprensión de un objeto matemático, así mismo,

> *"la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas" (Gómez, 2003).*

Al tener en cuenta esto, los docentes pueden orientar el diseño de actividades y situaciones problema, apropiándose de un significado de la matemática y así mismo fundamentando los objetivos y la comprensión de la integral que quiere que sus estudiantes desarrollen, obteniendo herramientas adecuadas para guiar, apoyar, hacer preguntas aclaratorias y problematizar las acciones del estudiante, quien logrará plantearse metas, cumplirlas e identificar fortalezas o debilidades que tienen para ese momento, admitiendo un anclaje en sus conocimientos previos con los nuevos y llegando a un aprendizaje significativo.

El proceso de enseñanza conduce al docente a conocer y analizar aspectos históricos y epistemológicos del objeto matemático, con varios fines, conocer acerca del mismo, los elementos importantes que deben tenerse en cuenta para comprenderlo, el lenguaje, procesos y métodos más apropiados y necesarios para llegar en ultimas a identificar el concepto, como emergente de la solución de situaciones problema (representaciones, razonamientos…) y

> "*poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto"* (Rojano, 1994 citado en Gómez, 2003)

Lo cual, permitirá al docente la selección de las situaciones problemas útiles y eficaces en pro de un ambiente enriquecedor para el aprendizaje. A partir del análisis epistemológico se puede reconocer aspectos relevantes que generan significado en el aprendizaje de la integral, al vincular el estudiante con la resolución de situaciones problema que prioricen su confrontación con problemas que en muchas ocasiones ocuparon a matemáticos en tiempos previos y que desde esta visión socio cultural de la matemática también permita abordar problemas de la realidad del estudiante, y conlleven la experimentación, socialización y validación de métodos que quizás son análogos a los utilizados y creados por los matemáticos que han fundamentado la idea moderna de Integral, no como un tópico aislado, sino como un recurso adicional que se relaciona con conceptos como la variación, continuidad, la derivada, geometría analítica, etc. Y que en conjunto tienen no solo una aplicabilidad sino que amplían el conocimiento lógico-matemático del estudiante.

La importancia de esta propuesta radica en la posibilidad de darle mayor protagonismo a la investigación e inclusión de la historia y la epistemología de la matemática a la hora de diseñar, planear, ejecutar, evaluar, etc. Las situaciones con las que el docente da a conocer los objetos matemáticos, así mismo la integral puede abordarse acudiendo a su amplia trayectoria a lo largo de la historia, un proceso incluso más antiguo que el objeto matemático derivada, pero que en la enseñanza actual es de manera contraria, hecho que deja en evidencia que el significado de la integral ha dejado de ser el resultado de su historia y proceso, para pasar a depender de la noción de derivada, dejándolo como un algoritmo, mas no desde su significado original.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* [Versión electrónica]. Bogotá D.C.: Ministerio de Educación Nacional.
- Carrillo, J. & Contreras, C. (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* España: Andaluza, España.
- Gascón, J. (1989) *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes* [Versión electrónica].
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas* [Versión electrónica], Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, España.
- Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-85). Granada, España, Universidad de Granada. Recuperado el 28 de mayo de 2011 en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=12300
- Guzmán, J. (2005). *Elementos del uso de la historia para los procesos de enseñanza de la derivada en contextos escolares*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Leithold, L. (2005). *El cálculo.* México: OXFORD, University Press, México S.A.
- Muñeton, M. (2000). Desarrollo histórico de la matemática infinitesimal en el cálculo. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C
- Sierra, M. (sf). Papel que juega la historia de la matemática en la enseñanza. [Versión electrónica].
- Vergnaud, G. (1990). Epistemológia y Psicologia de la educación matemática. En P. y. Nesher, *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the international group for the psichology of mathematics education* [Version electrónica]. Cambridge, university. Inglaterra.

Volver al índice
Comunicaciones Breves