
La Problematización de la Definición en Estudiantes para Profesor de Matemáticas

Liseth Arévalo
arevalinlj@gmail.com

Fabián Rojas
fbrojasg@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. El trabajo presentado está fundamentado en la elaboración del significado de curva diferenciable, apoyado para ello en la resolución de problemas y la metodología propuesta por Mason, Burton y Stacey (1989); respecto del proceso metacognitivo desarrollado por los estudiantes para profesor que integran una comunidad de aprendizaje.

Para lo que se propone una investigación en diseño (Collins, 2004) en cuanto a las fases del estudio a elaborar, teniendo en cuenta la importancia de la elaboración de una conjetura, la recolección de datos y el posterior análisis de los mismos entorno de la conjetura planteada, a partir de la elaboración de viñetas de acuerdo a Gavilán, García y Llinares (2007)

Palabras Claves

Desarrollo del pensamiento matemático, resolución y estrategias, metacognición, teoría social del aprendizaje, investigación de diseño.

1. Presentación del problema

Este proyecto pretende reflexionar sobre la manera de resolver problemas de matemáticas; con el fin de que los estudiantes para profesor y sus futuros estudiantes logren *pensar matemáticamente*, a través de procesos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar; y tres fases de trabajo las cuales son de abordaje, de ataque y de revisión (Mason, Burton & Stacey, 1989).

Igualmente este trabajo busca dotar de sentido de acuerdo a la idea de Radford los objetos conceptuales que encuentran en la cultura, teniendo en cuenta que el aprendizaje es visto como un proceso de elaboración activa de significados, proceso que se concibe como el “*paso al objeto*” u objetivación.

En este sentido la resolución de problemas se lleva a cabo de manera grupal, teniendo en cuenta la relevancia de la actividad colectiva como necesidad en la construcción de significados, para ello atendiendo a que la objetivación no se puede llevar a cabo individualmente, sino que por el contrario es un proceso social, donde se ejerza el saber-con-

otros, dado que el individuo es un agente en tanto es ser-con-otros, reflexionando sobre su aprendizaje y compartiéndolo con la comunidad educativa (Radford, 2006).

Un problema en matemáticas, usualmente se considera como un enunciado que debe ser demostrado o que tiene algo por encontrar (Polya, 1945). No obstante, se puede considerar como problema entender o usar una definición formal en matemáticas (Tall, 1988). Particularmente se puede considerar como problema el dotar de sentido a una definición formal en matemáticas (Gómez, 2009, 2009a, 2009b).

Con las consideraciones anteriores se propone la siguiente pregunta que orientará nuestro trabajo:

¿Cómo elabora significados una comunidad de aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de la definición formal de curva diferenciable?

2. Marco de referencia conceptual

Se parte de la premisa que una sola teoría o un solo enfoque no es suficiente para explicar un fenómeno complejo como lo es el aprendizaje (Morín, 2000, Vasco, 2009). De hecho, explicar el aprendizaje requiere de elementos teóricos soportados en la interacción social y elementos teóricos soportados en la cognición humana (Morín, 2000). Por esta razón para describir cómo se da el desarrollo de la elaboración de significados en una comunidad de aprendizaje, se utilizarán las teorías que en nuestro criterio permiten explicar el aprendizaje, siendo estas de orden sociocultural y cognitivo.

Para la exposición del marco teórico, desarrollaremos en primer lugar lo que se asume por aprendizaje desde una perspectiva antropológica, luego se expondrá el grupo de teorías de orden cognitivo a usar; estas son resolución de problemas cognitiva-clásica (Santos, 2007 y Mason, Burton & Stacey, 1989) y resolución de problemas desde la perspectiva del pensamiento matemático avanzado (Tall, 1988).

Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje

En torno a la perspectiva sociocultural del aprendizaje, nos referiremos únicamente a la perspectiva de Radford (2006) respecto a la teoría cultural de la objetivación.

Radford (2006) identifica la naturaleza reflexiva del pensamiento, destacando que el aprendizaje es producto de la reflexión, mencionando que el pensamiento del individuo no es asimilación de la realidad externa, sino por el contrario es una construcción que relaciona el entorno y el individuo que lo modifica según su sentido subjetivo.

De modo tal, que para que el estudiante aprenda las matemáticas, éste debe aprenderlas en relación con el medio, comprendiendo la utilidad del objeto puesto en juego en la realidad cultural que le rodea; ya que como bien lo expresa D'Amore (2006)

el conocimiento (...) es el resultado entre el sujeto que aprende y sus experiencias sensoriales (p. 302).

Por otra parte, Radford (2006) habla respecto de la postura epistemológica como la manera en que los objetos pueden llegar a ser conocidos, destacando como problema epistemológico la abstracción de los objetos relacionados con la aplicación de las matemáticas al mundo real.

Desde el punto de vista ontogénético el problema está dado por cómo se da la adquisición de dicho saber depositado en la cultura; de manera que el aprendizaje desde esta perspectiva es producto de la interacción con el medio y con otros sujetos.

Adoptando así la idea de la construcción del saber elaborada por Kant (como se cita en Radford, 2006) donde el pensador como es denominado, no es un ser ensimismado que produce conocimiento desde su actividad individual, ni tampoco un ser pasivo que recibe información de otros, sino que por el contrario es un ser en acción que construye su propio pensamiento.

Desde la perspectiva de Radford en la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un determinado conocimiento, sino que se trata de dotar de sentido los objetos conceptuales que se encuentran depositados en la cultural, por lo que constituye un proceso activo de elaboración de significados. Para lo cual siguiendo a Radford (2006) las

fuentes de adquisición del saber resultan de la interacción social y del contacto con el mundo material.

Radford (2006) expresa que las interacciones sociales que deben darse en torno de un aprendizaje, no pueden ser vistas como un espacio cerrado donde se negocian las normas del saber, ni tampoco como un ambiente en el cual un individuo se adapta, sino que la interacción social es consustancial al aprendizaje.

Los artefactos constituyen los instrumentos, objetos, sistemas de signos, entre otros, en los que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas, en la medida en que no son ayudas al pensamiento, sino partes constitutivas y consustanciales de este.

De modo que la interacción con estos es un elemento importante en la cognición humana, dado que el ser humano es afectado por los artefactos en la medida que las acciones del individuo son mediatizadas por los mismos, puesto que el individuo reestructura sus movimientos al contacto con estos.

Para hacer referencia a comunidad de aprendizaje, resulta apropiado hacer claridad en lo que refiere al término comunidad basándonos para ello en Wegner (1998), quien caracteriza una comunidad a partir de:

- Existencia de un compromiso mutuo a partir de acciones compartidas mediante prácticas socioculturales
- La formación de una empresa conjunta como resultado de un proceso cognitivo de negociación; además del
- Uso de un repertorio compartido el cual corresponde a las palabras que son usadas en la comunidad

Así mismo, Llinares y Olivero (2009) se refieren a una comunidad de aprendizaje como un grupo de personas que se involucran en un proceso social de aprendizaje para realizar el análisis de la enseñanza en términos de aprendizaje, como puede serlo el desarrollo de la

elaboración de significados. Ante lo cual destacan tres procesos propios de la elaboración de significados, que corresponden a:

- Participación: Como mediadora en la construcción de significados en estudiantes para profesor
- Cosificación: Corresponde al proceso de dar forma a la experiencia produciendo objetos que plasman la experiencia en “cosa” (Sanjuán, 2008); e
- Interacción social: Es mediada cuando se es miembro de una comunidad por, comprensión mutua y el compartir puntos de vista diferentes.

Por otra parte, desde esta la perspectiva el aprendizaje esta mediado por la participación en procesos sociales a partir de la construcción del conocimiento social por artefactos o herramientas; además el aprendizaje constituye la intencionalidad explicita del trabajo en comunidad, donde el interés compartido hace parte del proceso de convertirse en profesor a partir de la reflexión sobre las experiencias.

De forma que el trabajo en comunidad se basa en la realización personal de cada individuo, mediante la asimilación de los objetivos de la comunidad como propios, las implicaciones en las acciones de la comunidad y la comunicación

Perspectiva cognitiva del aprendizaje

Para hablar de resolución de problemas es necesario clarificar qué se entiende por cada uno de los términos que lo componen. Problema para Schoenfeld (1985) (como se cita en Santos, 2007) hace referencia a una tarea que genera conflicto para quien trata de hacerla, y por otra parte reconoceremos el termino resolución asociado a los procesos que se llevan a cabo para dar solución y mostrar el resultado en un problema; los cuales son procesos desarrollados por el resolutor.

Ahora bien, la resolución de problemas es definida por Tall (1991) como una actividad creativa, la cual involucra varios procesos en su resolución como lo son: la formulación de una probable conjetura, una secuencia de actividades de pruebas que puede ser modificada y finalmente la producción de una prueba formal de un teorema.

A su vez es posible dar a entender que la resolución de problemas de acuerdo a Radford constituye el medio para alcanzar el pensamiento matemático, que en un sentido más preciso quiere decir, que el solucionar problemas, no es el objetivo último en nuestro proceso, sino que son estrategias y herramientas de las cuales se sule el estudiante para dotar de sentido al objeto matemático.

Sin embargo, la resolución de problemas no solo enfatiza en los procesos que debe llevar a cabo el estudiante para resolver el problema, sino que además hace relevancia a lo que Schoenfeld (como se cita en Santos, 2007) denomina “*metacognición*”, la cual refiere a la comprensión del propio conocimiento cognitivo, mediante un monitoreo activo y constante regulación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de problemas.

La metodología que empleada para registrar el proceso como resolutores desde las ideas ya expuestas, corresponden a la metodología propuesta por Mason et al. (1989), debido a que dicha metodología da pauta para saber cómo resolver un problema, mediante una serie de procesos posibles de relacionar con la resolución de problemas.

Resaltando para ello la regulación de los procesos realizados por el resolutor en su metacognición mediante un registro, para lo que se utilizan los rótulos sugeridos por Mason et al. (1989). Así como, las fases que deben desarrollarse para que se dé la resolución de un problema, estas son fase de abordaje, fase de ataque y fase de revisión.

El pensamiento matemático avanzado (PMA) es visto como la forma de desarrollar un determinado conocimiento mediante la abstracción, donde se busca que un individuo construya un conocimiento, lo comunique a su grupo, sea capaz de presentarlo en diferentes representaciones y además lo trasmita a otras personas fuera de su comunidad.

Por otra parte, Tall & Vinner (1981) mencionan dos estructuras cognitivas respecto del concepto en Matemática Avanzada, que corresponden a:

- La imagen del concepto, como la estructura cognitiva en su totalidad que se asocia al concepto; y

o La definición del concepto, como la forma de palabras que son usadas para la explicación de la imagen del concepto, la cual es propia de elaboración de significados; donde esta puede ser aprendida de forma mecánica o de manera significativa, importando de nuestra parte la segunda forma la adquisición de dicha definición, dado que la construcción significativa de un concepto se asocia a la idea de entender la matemática en un contexto real.

3. Metodología

La metodología que orienta nuestro trabajo es fundamentada en la propuesta de Collins (2004), respecto de la Investigación en Diseño. Este enfoque metodológico se caracteriza por ser una estrategia de investigación propia para la educación, en la que un grupo de investigadores observa el comportamiento de comunidades alrededor del estudio de una situación diseñada con el propósito de desarrollar aprendizaje. En ese sentido, el trabajo desarrollado observó una comunidad que estudio su proceso a través del ejercicio de metacognición y sistematización.

En este estudio se consideran dos momentos discriminados en los cuales se asumió dos tipos de roles claramente diferenciados:

1. Investigación: Hace referencia a los espacios en los cuales se elabora un diseño y se analiza de acuerdo con las fases propuestas por Collins (2004)
2. Ambiente de Aprendizaje: Hace referencia a los espacios, recursos, artefactos, heurísticas y otros aspectos que caracterizan la resolución del problema

Inicialmente se plantea un diseño, que podrá ser modificado en alguno de sus elementos si este no cumple con los requerimientos para hacer seguimiento de la investigación. Posteriormente se tomarán datos de la actividad de los resolutores con instrumentos definidos, finalmente se realizará un análisis de datos a partir de la noción de viñeta presentada por Gavilán, García y Llinares (2007) que permita caracterizar el ambiente de aprendizaje propiciados para la resolución del problema.

El proceso de investigación estará soportado en las fases propuestas por Collins (2004) de la siguiente manera:

Fase 1: Diseño del experimento

Teniendo en cuenta que el trabajo a desarrollar está basado en la investigación en diseño (Collins, 2004), como forma de investigación en educación, resulta pertinente hacer énfasis en la disposición de un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas; considerando para ello un grupo conformado por dos estudiantes quienes darán respuesta al problema planteado, y el profesor quien tendrá como función ser catalizador en el sentido de Radford (2006) entre el objeto matemático y los acercamientos que los resolutores tengan con tal objeto.

Fase 2: Modificación del diseño

Esta fase se da cuando algunos de los elementos críticos del diseño no cumplen con los requerimientos necesarios para hacer un seguimiento de la investigación.

Fase 3: Vías e Instrumentos para analizar el diseño

En esta fase se tienen en cuenta la disposición de los instrumentos que registran el proceso de resolución en torno a la elaboración de significados, dichos instrumentos son: video-grabaciones, grabaciones de voz y cuaderno resolutor

Fase 4: Análisis de los datos

El análisis de los datos se efectúa desde la idea de viñeta como

Un informe sobre aspectos de la práctica que integra información de diferentes fuentes y la descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza (Gavilán et al., 2007, pp. 161)

La elaboración de las distintas viñetas como unidades de análisis permite además una triangulación, que proviene del análisis de cada segmento de enseñanza, los cuales deben ordenarse cronológicamente para que posteriormente se describa e intérprete lo que sucede en dichos segmentos. De esta manera, la información proveniente de las viñetas permite caracterizar las diferentes prácticas del EPPM.

4. Análisis de datos

Para el análisis de datos se toma como referencia la estrategia empleada por los resolutores para la comprensión de la definición formal de curva diferenciable que consistía en dividir la definición en conceptos y determinar lo que se conocía y lo que no, para posteriormente hacer un estudio respecto de lo que no se tenía idea empleando como recursos textos de geometría diferencial, artículos en internet sobre el tema a estudiar y la ejemplificación mediante uso de los software geogebra y derive.

Mediante la elaboración de la viñeta se tomo registro de los segmentos del proceso que evidenciaban la negociación respecto de la estrategia a utilizar (como comunidad de aprendizaje), las ideas expuestas por los resolutores en torno a la utilidad e importancia del proceso de resolución registrado y la pertinencia de la manera de abordar el problema.

Se destaca además la viabilidad de dividir la definición puesto que permite ahondar en los temas que no se conocen y establecer relaciones adecuadas entre los conceptos que se involucran en la definición lo que conduce a comprender la definición permitiendo así que esta sea dotada de sentido.

Por otra parte, se registra como la comunidad se apropia de la estrategia trazada y la emplea para la comprensión de otras definiciones formales que se asocian a la definición de curva diferenciable, destacando su pertinencia puesto que permite comprender una definición formal en matemáticas en general.

Finalmente, se evidencia cómo el comprender una definición formal implica el poder cambiar de registro la misma y de igual modo entenderla, sin importar el orden de las ideas que se expongan en la definición ya que esta siempre estará compuesta por los mismos conceptos.

5. Conclusiones

La resolución de problemas permite mediante la regulación que un resolutor tenga conocimiento sobre su aprendizaje evidenciado en el proceso llevado a cabo para resolver un

problema, lo que permite que se haga un estudio metacognitivo teniendo en cuenta la idea que el pensamiento es evidenciable.

El estudio de una definición permite entender la matemática desde lo que se cree más simple pero que desarrolla un conocimiento complejo.

6. Bibliografía

Bonilla, Romero & Sanjuán (2009). La Negociación de Significado de la Definición del Concepto de Convergencia: Un Estudio de un Grupo de Estudiantes para Profesor de Matemáticas. Bogotá: Universidad Distrital, Grupo Mescud.

D' Amore, B. (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. México: *Relime*. (Número especial) pp. 301-306.

Gómez, J. (2009). El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un Estudio de Caso. Tesis de grado obtenida no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Mason, J., Burton, L. & Stacey (1989). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Ed. Labor S.A.

Morin (2000) *Introducción al pensamiento complejo*. Edición española a cargo de Marcelo Pakman Barcelona: Gedisa.

Radford, L. (2006). Elementos de Una Teoría Cultural de la Objetivación. México: *Relime*. (Número especial) pp. 103-129.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Tall, D. (1988). The Nature of advanced mathematical thinking: a discussion paper for PME. Hungría.

Tall, D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. Inglaterra: Universidad de Warwick, Mathematics Education Research Centre.

Vasco, C. (2009). ¿Son las perspectivas socioculturales de las matemáticas y de las pedagogías de las matemáticas incompatibles con las perspectivas cognitivas? Pasto: *Décimo encuentro colombiano de matemática educativa*

Wegner, E. (1998) *Communities of Practice*, recuperado el 5 de Enero de 2010. Disponible en: <http://www.ewenger.com/theory/index.htm>

Volver al índice
Comunicaciones Breves