Elementos de análisis y reflexión para la formación matemática en la transición Álgebra Cálculo

Gloria Inés Neira Sanabria[*]

RESUMEN

Lo que se encuentra generalmente en los escenarios del trabajo inicial del cálculo es repitencia, deserción escolar, incomprensión de conceptos, inadecuado manejo de los razonamientos, una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas; los cursos se desarrollan en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Se plantea que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, la alternancia de cuantificadores y el tratamiento de los signos usados en el cálculo, entre otros, plantean una "ruptura" con lo que se hace usualmente en álgebra.

Palabras clave: dificultades, cálculo diferencial, algebra, transición, ruptura

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica:gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Las principales dificultades que encuentran los estudiante de primeros semestres de universidad para comprender los conceptos fundamentales del cálculo, Artigue las clasifica en tres grupos: las que tienen que ver con la conceptualización de la noción de límite; las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo -que dan lugar al estudio de los obstáculos: epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos,- y las vinculadas con las rupturas necesarias en relación con los modos de pensamiento puramente algebraicos.

Sierpinska (1994), por su parte, respecto a las dificultades con que tropiezan los estudiantes al acceder al cálculo plantea cinco categorías: el rechazo al estatus operacional que permite el paso al límite, el referente al principio de continuidad, los obstáculos relacionados con la noción de función, los obstáculos geométricos, los obstáculos lógicos, y los obstáculos simbólicos.

Y es que, en efecto, el tratamiento de igualdades e inecuaciones, los razonamientos, la alternancia de cuantificadores, las aproximaciones, el simbolismo, el lenguaje, las demostraciones rompen con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar. Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: una ruptura, frente a la cual se debe emprender una investigación, que es precisamente la que ha sido abordada por la autora de este escrito en su tesis doctoral.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Al preguntarnos: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿Sobre qué predica el cálculo?, o, ¿Qué requiero para acceder al cálculo? las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como: funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, conceptos que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación.

Con respecto a las funciones, para referenciar solo un ejemplo, vale la pena anotar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representaciones semióticas (Duval 1992) y reconocer en todos el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma y=4, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x; o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación recta= función se presentan menos errores.

Y es que curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional es dos cursos de Álgebra en 8º y 9º grado y un curso de Cálculo en grado 11, es decir, se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como pre-requisito para entrar a él posteriormente. En la universidad, por ejemplo, en primer semestre de Ingeniería, el estudiante debe tomar un curso de Cálculo Diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de Matemática o Matemáticas Básicas, repaso del álgebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de Cálculo.

Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que en esta postura, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que se da más por razones de tradición que por alguna razón matemática o pedagógica. Interesa la transición del álgebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente, para el estudiante, una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo. Voy a decir paso, ni curricular, ni cognitivo, sino entendiendo que curricularmente se pone primero álgebra y después cálculo, que el álgebra se considera pre-requisito para el cálculo, que para compartir las prácticas del cálculo se requiere en gran medida manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos lo dan de una vez, otros se devuelven, otros permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que está bien llamado también transición. Esa transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero no se está abordando ni desde el punto de vista antropológico, ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

ANÁLISIS

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (–1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por "$y = \ldots$" como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como "lnx"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado, ¿cuándo vieron x^2 o x^3?, y ¿el resultado es x^5 o y^6? Son pues muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (en el interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso. Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada".

La x se considera como incógnita, como variable, o como indeterminada, pero no como función.

No es conveniente confundir la función, (Neira, 2010), tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial y función totalmente definida, ni entre función en versus función sobre o sobreyectiva. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: por ejemplo, la noción de tangente. En la enseñanza del bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio. Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común.

Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas. Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Conclusiones

Tener en cuenta la transición o ruptura cognitiva, didáctica, curricular, semiótica,… que se da en el tránsito del álgebra escolar al cálculo diferencial y tomar plena conciencia de las dificultades y posibles obstáculos que pueden emerger, ha de dotar de herramientas teóricas, epistemológicas y metodológicas a formadores de profesores, profesores y estudiantes para el mejoramiento de su práctica docente y de su aprendizaje en el cálculo diferencial en diferentes niveles de escolaridad. La investigación en este sentido pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., Duoady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica

Duval, R. (1992). *"Gráficas y ecuaciones". Antología de la Educación Matemática.* (Trad. Parra, M del original en francés: *"Graphiques et equations" L'Articulation de deux registres"*, 1988). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 125-139. México: Cinvestav-IPN.

Neira, G. (2000). *El paso del Algebra al Cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista Ingeniería, (*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*). 1*, 87-92

Neira, G (2010*) Algunas dificultades detectadas en la transición del álgebra escolar al cálculo diferencial*, Memorias IX ENEMES Paipa-Boyacá 2010

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* [Studies in Mathematics Education Series]. London: The Falmer Press.