Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA

Trabajo de Investigación Tutelada

MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO

Septiembre, 2002

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADA

María Consuelo Cañadas Santiago

Tutora: Encarnación Castro Martínez

Septiembre, 2002

María Consuelo Cañadas Santiago
Depósito Legal GR-1844-2002
ISBN 84-932510-6-2
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA

Trabajo de Investigación Tutelada
Presentado por
Dña. M. Consuelo Cañadas Santiago
Para la obtención de la
Suficiencia investigadora

Tutora: Dra. Dña. Encarnación Castro

Septiembre, 2002

Este trabajo ha sido realizado dentro del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193). Bienio 2000-2002.

Mi más sincero agradecimiento a la tutora de este trabajo, la Dra. Encarnación Castro Martínez, por su dedicación y ayuda constantes.

A mi familia, que me apoyó en todo momento.

A mis amigos, que me animaron.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que han contribuido a mi formación.

A Francisco Fernández, José María Llamas y Antonio Fernández, profesores y director del I.E.S. Padre Manjón de Granada, por su colaboración.

A los niños que participaron en la actividad.

… Las matemáticas crecen
a través de la mejora permanente de conjeturas,
por especulación y crítica,
por la lógica de la demostración
y las refutaciones.
(Lakatos)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este documento hemos querido dejar constancia del desarrollo del trabajo que hemos realizado durante el curso 2001-2002, en el que hemos llevado a cabo la investigación tutelada. Presentemos, por tanto, el documento, como un informe que da cuenta de dicho trabajo de investigación. El presente curso es el segundo del bienio 2000-2002 del programa de doctorado del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La normativa sobre estudios de tercer ciclo de la Universidad de Granada, en su artículo 6, apartado b) establece lo siguiente:

> "En el periodo de investigación tutelada (el doctorando) deberá completar un mínimo de doce créditos que se invertirán necesariamente en el desarrollo de uno o varios trabajos de investigación tutelados a realizar dentro del Departamento o de uno de los Departamentos que desarrollen el programa al que esté adscrito el doctorando" (p.14).

Con la elaboración de este documento pretendemos poner de manifiesto que hemos cumplido la normativa anteriormente expuesta.

El trabajo está enmarcado en el grupo de investigación Pensamiento Numérico y corresponde a un estudio "piloto" o, mejor podemos decir, es un estudio de iniciación mediante el cual pretendemos alcanzar cierto grado de autonomía en el proceso de investigación que nos permita poder continuar un trabajo de tesis en el mismo tema. El tema que hemos tomado para iniciarnos en la investigación en educación matemática ha sido el **razonamiento inductivo** y los sujetos con los que hemos trabajado en el estudio empírico han sido alumnos de Secundaria de los cursos 3º y 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y 1º y 2º de Bachillerato. El título de este trabajo es: **Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.**

Nuestra intención al escribir este informe de investigación es poner de manifiesto los aprendizajes realizados durante el bienio del doctorado y, sobre todo, en el último curso del mismo. El documento lo hemos organizado en capítulos. Esto permite, por una parte presentar la información de manera ordenada y, por otra, recorrer los distintos apartados en los que consideramos que se ha basado nuestra formación. Los capítulos que vamos a considerar son los siguientes:

Capítulo I. Problema a estudiar. En el primer capítulo se introduce la perspectiva constructivista del aprendizaje y se presentan el objetivo general y las preguntas de investigación sobre las que gira el presente trabajo.

Capítulo II. Marco teórico. La finalidad principal de este capítulo es especificar el significado de los términos que se emplean en esta memoria. Presentamos inicialmente la búsqueda bibliográfica que se ha llevado a cabo. Además se hace un breve recorrido histórico que ayuda a seguir la evolución de los términos y expresiones utilizado. Se concluye con el estado de la cuestión objeto de estudio.

Capítulo III. Metodología. En este capítulo se tratan cuestiones relativas al diseño de la investigación, los instrumentos de recogida de datos, los elementos relacionados con el estudio empírico, el instrumento empleado en el análisis de datos y las categorías definidas según las preguntas de investigación.

Capítulo IV. Análisis de los datos. En el capítulo cuarto se presenta el análisis de los datos organizado según las categorías definidas en el capítulo III.

Capítulo V. Conclusiones. En el último capítulo se presentan las respuestas encontradas a las preguntas de investigación después del estudio realizado y se comentan algunas reflexiones que se desprenden del trabajo llevado a cabo.

Capítulo I. Problema a estudiar

I.1 Nuestro punto de vista sobre la enseñanza/aprendizaje

Al comenzar a escribir esta memoria de investigación, sentimos la necesidad de dejar constancia de la corriente epistemológica a la que nos sentimos más cercanas en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que hacer explícitas nuestras creencias sobre lo que consideramos que debe de ser el aprendizaje de las matemáticas, clarificará en gran medida el porqué de esta investigación y la forma de llevarla a cabo. Declaramos que nuestra postura sobre lo que debe ser el aprendizaje de las matemáticas está más próxima al constructivismo que a otra teoría del aprendizaje.

Algunos autores sitúan el inicio del constructivismo en la concepción epistemológica de Kant (1724-1804). De forma resumida, Kant consideraba que conocer quiere decir crear partiendo de ciertos a prioris, el sujeto percibe y crea los objetos matemáticos en términos de su propio conocimiento anterior. Posteriormente, Piaget elaboró la epistemología genética tomando como base la teoría de Kant. Piaget toma como categoría básica inicial la acción del sujeto. El desarrollo de esta idea se convirtió en el pilar básico sobre el que se construyó el constructivismo epistemológico. La construcción del conocimiento desde esta perspectiva constructivista se fundamenta en una relación indisociable entre el sujeto y el objeto. El proceso cognoscitivo básico es la asimilación de objetos a los esquemas de acción y, posteriormente, a los esquemas conceptuales (García, 2000).

Los dos procesos elementales en la construcción del conocimiento que considera el constructivismo son la abstracción y la generalización. Piaget distingue dos tipos de abstracción: la empírica y la reflexiva. La abstracción empírica hace referencia a las propiedades que se constatan en los objetos. La abstracción reflexiva está referida a las relaciones que el sujeto establece entre los objetos. En correspondencia con los dos tipos de abstracciones, Piaget considera dos tipos de generalizaciones: la generalización inductiva o extensional y la generalización constructiva o completiva. La generalización inductiva es un proceso que conduce de la constatación de hechos singulares repetidos a nociones, conceptos o leyes generales. La generalización constructiva consiste en un progresivo reemplazo de constataciones de hechos y de sus resultados, obtenidos a través de abstracciones empíricas, por reconstrucciones que implican inferencias y ponen en juego nuevas formas de organización que concluyen en un conjunto de relaciones encadenadas deductivamente. La reconstrucción exige una reflexión en un nivel superior (representativo o conceptual) al del dato empírico. De aquí que no haya generalización constructiva sin abstracción reflexiva (García, 2000).

Los objetos con los que interactúan los sujetos de edades tempranas que les proporcionarán información son objetos reales. La abstracción reflexiva de las relaciones que entre ellos establezca el sujeto y del comportamiento de dichos objetos, surgirán los primeros conocimientos matemáticos. En edades más avanzadas los objetos sobre los que los sujetos reflexionan son acciones interiorizadas por lo que se tratará de estructuras conceptuales, "el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" el objeto de cierta manera y extraer de él cierta información" (Moreno & Waldegg, 1992, p. 11). Las observaciones que realiza el sujeto sobre el objeto se irán modificando conforme vayan cambiando sus estructuras cognoscitivas y darán lugar a la construcción del objeto matemático que se irá modificando hacia una mayor coherencia y riqueza de significados.

De acuerdo con la teoría constructivista, consideramos que el binomio enseñanza-aprendizaje no es indisociable ni tienen la misma importancia los dos elementos. De este binomio, el aprendizaje es lo más importante y el artífice del mismo es el propio sujeto. Por tanto, el conocimiento no está separado del sujeto. La enseñanza ocupa un lugar secundario: el acto de "enseñar", como acción de transmitir conocimiento, queda relegado frente al acto de aprender como acción de descubrir. No quiere esto decir que la figura del profesor como principal agente en la acción de enseñar quede devaluada. Para esta teoría, por el contrario, el profesor tiene un papel relevante como guía del estudiante y su tarea fundamental es preparar cuidadosamente las situaciones adecuadas que lleven a los alumnos a adquirir el conocimiento programado. El alumno ha de ser un agente activo en esta concepción del aprendizaje. En esta misma línea está la idea expresada en el Diseño Curricular Base de Educación Secundaria que indica: "Consideramos que el aprendizaje es fruto de una intensa actividad del alumno. Actividad de orden intelectual, la cual se puede ejercer de distintas formas: cuando el alumno observa, hace preguntas, formula hipótesis, relaciona conocimiento nuevo con lo que ya sabía, entre otras acciones" (MEC, 1989, p. 522).

I.2 Objetivo general y preguntas de investigación

De acuerdo con el punto de vista sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje que hemos expuesto en el apartado anterior, nos planteamos un objetivo general para nuestro trabajo de investigación:

Objetivo general

> Estudiar la utilización que hacen los individuos del razonamiento inductivo cuando se enfrentan a la realización de unas tareas matemáticas no rutinarias

Para hacer operativo el objetivo general anterior, lo hemos desglosado en elementos más concretos: interrogantes o preguntas de investigación a las que pretendemos dar respuesta una vez llevado a cabo nuestro trabajo.

Preguntas de investigación

Cuando los sujetos realizan una tarea matemática en la que el razonamiento inductivo está involucrado:

1. ¿Comprenden los entrevistados la tarea que se les propone?
2. ¿Aparece dicho razonamiento de manera espontánea?
3. ¿Trabajan con casos particulares? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿hasta cuando los utilizan?
4. ¿Se llega a una generalización en todos los casos o se hace un razonamiento parcial?
5. Si se llega a una generalización, ¿es por medio de los casos particulares? ¿Lo hacen intuitivamente? ¿Formulan conjeturas?
6. Si formulan conjeturas, ¿las prueban con nuevos casos particulares?
7. ¿Qué criterios utilizan los estudiantes para validar las conclusiones a las que llegan?
8. ¿Quedan convencidos los alumnos con sus propios razonamientos?
9. ¿Qué tipo de representación utilizan?
10. ¿Qué dificultades encuentran los alumnos en las tareas que se les proponen? ¿Hay sistematicidad en esas dificultades?
11. ¿Qué errores cometen al realizar las actividades propuestas? ¿Hay regularidad en dichos errores?
12. ¿Se pueden establecer niveles o etapas en el proceso de razonamiento inductivo?

En los interrogantes anteriores distinguimos el primero, que está referido al planteamiento de la tarea, del resto, que se relacionan con el trabajo que llevan a cabo los sujetos y están centrados en el proceso inductivo y en los razonamientos que siguen los alumnos al realizar las tareas propuestas. El último trata de hacer un avance hacia lo que podría ser nuestro futuro trabajo de investigación.

I.3 Justificación del interés del trabajo

Consideramos que el tema que hemos elegido para trabajar es de gran interés para la educación matemática. Con objeto de explicar este interés, vamos a presentar algunos argumentos obtenidos de la lectura y el análisis de documentos relacionados con nuestro tema de investigación. Estos documentos tienen procedencia y campos de influencia distintos, por lo que las posturas que se recogen en los mismos se realizan desde diferentes enfoques: unos hacen referencia a la posición curricular, otros reflejan la opinión de distintos investigadores en educación matemática y otros consideran la perspectiva sociocultural. Al producirse una confluencia de las posturas tomadas desde distintas perspectivas, creemos que nuestra justificación resulta más potente.

I.3.1 Perspectiva curricular

Para examinar la posición curricular, nos hemos basado en dos documentos que consideramos básicos e imprescindibles para obtener información en relación con este apartado. Los documentos son El Diseño Curricular Base de Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989) y Los Estándares Curriculares (NCTM, 1991). En ellos se recoge la postura actual sobre lo que debe contemplar el currículo de matemáticas en los distintos niveles educativos.

Diseño Curricular Base

La perspectiva del Diseño Curricular Base es esencialmente didáctica. Tiene carácter prescriptivo en todo el territorio español, dejando la tarea de desarrollarlo y completarlo a las comunidades autónomas con competencias educativas.

Los principios básicos del Diseño Curricular Base consideran la necesidad de partir del nivel de desarrollo del alumno. La intervención educativa tiene que partir de las posibilidades de razonamiento y de aprendizaje que posean los alumnos en los distintos niveles de su desarrollo evolutivo. Por tanto, hay que conocer las capacidades que caracterizan al alumno de cada nivel. En la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas hay que tener en cuenta la naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad.

Desde esta perspectiva epistemológica, el documento aconseja tomar ejemplo del proceso histórico en la enseñanza de las matemáticas, seguir los descubrimientos y considerar que el razonamiento empírico-inductivo ha jugado un papel tan importante o incluso mucho más activo que el razonamiento deductivo en la creación de nuevos conceptos. La enseñanza debe seguir la misma secuencia de trabajo que los investigadores matemáticos, quienes actúan por tanteo, toman ejemplos y contra-ejemplos, buscan soluciones particulares etc.

Los objetivos generales para Secundaria (MEC, 1989), que es la etapa que hemos tenido en cuenta en nuestro trabajo, consideran que los alumnos:

- Habrán incorporado al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica) con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa.

- Mostrarán actitudes propias de la actividad matemática tales como la exploración sistemática de alternativas, tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad para cambiar de punto de vista, gusto por la precisión del lenguaje, etc.) percibiendo el papel que juegan como lenguaje e instrumento en situaciones muy diversas.

- Utilizarán las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

Estándares curriculares

En los estándares curriculares (NCTM, 1991) se evidencian la necesidad y la importancia del razonamiento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pone de manifiesto que la educación matemática en la Enseñanza Secundaria debe adoptar fines muy amplios y para todos los estudiantes. Se establecen cinco fines generales:

1. Que aprendan a valorar la matemática.
2. Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas.
3. Que lleguen a resolver problemas matemáticos.
4. Que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas.
5. Que aprendan a razonar matemáticamente.

La noción de matemáticas que trabajan se basa en la idea de que la matemática es algo más que un conjunto de destrezas que hay que dominar, también "comporta métodos de investigación y razonamiento, medios de comunicación y nociones sobre su contexto" (NCTM, p. 5).

Los objetivos generales implican que los estudiantes desarrollen hábitos mentales matemáticos. Por tanto, debe animárseles a explorar, predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza. Deben leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de una hipótesis. El razonamiento matemático está presente en los fines generales para todos los estudiantes. Consideran que para trabajar con matemáticas es fundamental formular hipótesis, recopilar evidencias y elaborar un argumento que apoye estas nociones. El documento al que estamos haciendo referencia recomienda animar a los profesores a guiar a los estudiantes en un proceso de aprendizaje autodirigido ocupándose con regularidad de construir, simbolizar, aplicar y generalizar ideas matemáticas. Éstas son acciones propias del razonamiento inductivo.

Uno de los estándares para la Educación Secundaria presenta las matemáticas como razonamiento. Se afirma que en este nivel educativo, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de:

- Elaborar y comprobar conjeturas.
- Formular contraejemplos.
- Seguir argumentos lógicos.
- Juzgar la validez de un argumento.
- Construir argumentos sencillos válidos.

Y para que, además, los futuros universitarios sean capaces de:

- Construir demostraciones para enunciados matemáticos, incluyendo demostraciones indirectas y demostraciones usando el principio de inducción.

Este estándar plantea varios objetivos. El primero es que todos los estudiantes tengan una experiencia con actividades para que lleguen a apreciar el papel que cumplen los modos de razonamiento inductivo y deductivo, tanto en las matemáticas como en otras situaciones fuera de ellas. Un segundo objetivo es ampliar el papel del razonamiento para que se subraye su importancia en todos los cursos de matemáticas y para todos los estudiantes. El tercer objetivo propone prestarle una mayor atención a la demostración por inducción.

Los estudiantes de los últimos cursos de Primaria y primeros cursos de Secundaria experimentan con el razonamiento inductivo y con la evaluación y construcción de argumentos deductivos sencillos en diversos contextos de resolución de problemas. En Secundaria, a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, “debe mantenerse este énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva” (NCTM, p. 148).

Se aprecia en estas líneas el principio siguiente: “La matemática presentada con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva” (Polya, 1979, p.114).

I.3.2 Perspectiva desde la investigación en educación matemática

La investigación en educación matemática pone de manifiesto, a través de los trabajos de distintos investigadores del ramo, el interés que tiene para los profesores y para la enseñanza en general, conocer los razonamientos que siguen los alumnos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo Balacheff (2000) defiende la necesidad de tomar conciencia de la etapa evolutiva en la que se encuentran los alumnos. Esto ayudaría a los educadores a avanzar en los razonamientos de sus alumnos y a ejercer con mayor éxito su papel de guías en el proceso educativo.

Los autores que hemos consultado coinciden en la idea de que son necesarias más investigaciones que centren su interés sobre los procesos de razonamiento que llevan a cabo los estudiantes. En sus trabajos hacen referencia a la gran importancia que tiene para el aprendizaje de los sujetos el hecho de que el profesor o educador en matemáticas conozca cómo razonan sus alumnos. Santos (1992) resalta algunas ideas que dan importancia al razonamiento, a la autonomía de los alumnos y, como consecuencia, a un trabajo de investigación que trate de esos temas. DeGroot (2001) manifiesta la importancia, sobre todo en los grados medios, de considerar los niveles de razonamiento para apoyar el desarrollo del pensamiento matemático. Esto permitiría avanzar más rápido y seguro sobre el razonamiento que los propios alumnos sacan a la luz. Estos autores justifican así la necesidad de hacer investigaciones centradas en los procesos de transición de una forma de razonamiento a otra y de estudios basados en los procesos de instrucción.

Por lo que al razonamiento inductivo se refiere, Miyazaki (2000) señala que los alumnos deberían ser introducidos en las demostraciones inductivas antes de aprender las demostraciones formales deductivas. Este autor establece estadios, como pasos desde una prueba inductiva hasta la demostración algebraica en matemáticas. Se centra en los niveles inferiores a Secundaria. Estos estadios proporcionan a los profesores una manera útil y fiable de ayudar a desarrollar y de poder evaluar las habilidades de los alumnos en lo que a la prueba se refiere.

Relativo a los niveles educativos que nos interesan para nuestra investigación, Neubert & Binko (1992) destacan tres metas que se pueden conseguir trabajando el razonamiento inductivo en Secundaria:

1. "Aprender el contenido de la disciplina.
2. Practicar estrategias de razonamiento.
3. Desarrollar la seguridad en la habilidad de razonamiento" (p. 20).

Fernández, M. L. & Anhalt, C. O. (2001) defienden que el principal foco de atención deberían ser discusiones e investigaciones que posibiliten a los alumnos de Secundaria construir, describir, representar patrones, desarrollar y aplicar las relaciones, hacer y verificar reglas o generalizaciones, y explorar propiedades matemáticas; que son acciones relacionadas con el razonamiento inductivo.

La mayoría de los profesores de Secundaria se sitúan a favor de los razonamientos inductivos. Sus argumentos, a pesar de los inconvenientes que puedan encontrar, se agrupan en dos categorías:

- Los que apuntan a los procesos de pensamiento asociados al razonamiento inductivo.
- Los que se fijan en las inquietudes del estudiante.

I.3.3 Comentarios desde la sociología

Desde la perspectiva sociocultural sobre la educación matemática, se da una visión que muestra la gran importancia que se da a la formación de los individuos como parte integrante de la sociedad. Hay autores que abogan por una educación matemática crítica. Esta educación debe facilitar el desarrollo de una alfabetización matemática que ayude a los ciudadanos a ejercer una competencia democrática. Esta alfabetización incluye el conocimiento matemático, referido a las habilidades matemáticas; el conocimiento tecnológico como habilidad para aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos; y el conocimiento reflexivo como evaluación y discusión de las consecuencias de lograr un fin tecnológico (Skovsmose, 1999; Almeida, 2001).

Si consideramos a la sociedad como un ente que está en continuo cambio y que lo que se pretende con la educación es orientar a los jóvenes y prepararlos para el futuro como miembros de una comunidad, el hecho de educar tiene que ir modificándose a la vez que lo hace la sociedad. La educación matemática en la Enseñanza Secundaria tiene asignados fines muy amplios para todos los alumnos, continúen sus estudios en la universidad o no. El sistema educativo debe satisfacer las necesidades económicas, sociales y políticas de la sociedad en que se encuentran los individuos. Por tanto, la educación matemática tiene entre sus objetivos preparar a los alumnos para ser capaces de razonar matemáticamente.

Según Skovmose, las matemáticas dan forma a nuestra sociedad. Por tanto se deberá pensar en una alfabetización matemática que considere las reflexiones individuales y colectivas para conseguir el desarrollo de una educación matemática crítica en el contexto social, político y económico. Se trata de considerar el papel de las matemáticas en la sociedad y aprovechar su potencial formativo.

Basándose en las ideas de Skovsmose sobre una educación matemática crítica en una sociedad democrática, Almeida (2001) parte de tres axiomas básicos en la enseñanza de las matemáticas y considera que:

- "Matemáticas y pensamiento crítico son inseparables.
- La enseñanza de las matemáticas tiene que animar el pensamiento crítico.
- El pensamiento crítico y la democracia son inseparables" (p. 104).

Este autor considera las formulaciones teóricas generales en relación con sus posibilidades prácticas. Relaciona la posición filosófica con la práctica educativa y defiende que los alumnos deben considerar todas las alternativas frente a un problema antes de tomar una decisión. Se sitúa en el constructivismo, donde los alumnos tengan la oportunidad de preguntar y conversar, teniendo como objetivo desarrollar un cierto nivel de pensamiento crítico. Que los alumnos construyan su conocimiento significa que presenten ideas, que se les dé la oportunidad de argumentar, de experimentar sus propias conjeturas, de aceptarlas por verdaderas o de rechazarlas por falsas. Esta construcción del conocimiento se puede abordar desde el trabajo con el razonamiento inductivo.

Finalmente recogemos unos comentarios de Polya que refuerzan nuestro argumento a favor del interés del trabajo. Según este autor, en la ciencia es necesaria la actitud inductiva. Esto requiere una cierta preferencia por las cuestiones de hecho y también requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones y descender de las generalizaciones más altas a las más concretas observaciones. Así se establece un ir y venir entre lo particular y lo general.

Hemos expuesto algunas posturas a favor del trabajo de los alumnos en razonamiento inductivo que apuestan por un tipo de trabajo en el que los alumnos formulen conjeturas y posteriormente las justifiquen. Creemos que esto proporciona criterios que aseguran que el trabajo que realizamos tiene interés para la comunidad educativa.

Capítulo II. Marco teórico

II.1 Introducción

En este apartado vamos a fijar el significado con el que vamos a utilizar los términos clave que aparecen en nuestro trabajo. Aunque podríamos ceñirnos al término *inducción* y a la expresión *razonamiento inductivo*, por ser ambos los elementos teóricos centrales de nuestra investigación, no lo vamos a hacer así ya que hay otras expresiones y otros términos estrechamente relacionados con ellos que también utilizaremos. Para ello hemos consultado diccionarios, enciclopedias y autores que han escrito sobre los significados de estos términos. Además, hemos establecido conexiones entre las ideas más relevantes encontradas y hemos llegado a establecer los significados que consideramos más apropiados para el trabajo que estamos realizando.

II.2 Búsqueda bibliográfica

Hemos realizado una búsqueda bibliográfica en las tres bibliotecas que a continuación indicamos:

Biblioteca especializada del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Biblioteca particular de Don Luis Rico.

También hemos hecho una búsqueda bibliográfica en Internet con los términos que consideramos clave para nuestro trabajo. El primer intento lo hicimos con el buscador *Google*. Probamos con el término *razonamiento inductivo* (o *inductive reasoning* para los textos que pudieran aparecer en inglés) y obtuvimos 2870 entradas. Tratamos de afinar más en nuestra búsqueda y probamos teniendo en cuenta otros términos (además de razonamiento inductivo) como *estudiantes*, *Secundaria* y *Bachillerato* (*students* o *Secondary School*) pero esto no nos ayudó. Finalmente hicimos una búsqueda por *razonamiento inductivo* y *educación matemática*, y conseguimos 344 entradas, un número significativamente inferior a lo que tuvimos en principio. Sin embargo, no consideramos esta búsqueda satisfactoria porque no nos proporcionó referencias distintas a las que ya habíamos leído o encontrado en las bibliografías de otros trabajos y que fueran significativos para nuestra investigación.

Accediendo desde la dirección electrónica de la Universidad de Granada, conseguimos los trabajos presentados en los últimos congresos de la Sociedad Española en Investigación y Educación Matemática (SEIEM).

La búsqueda en Internet que resultó más provechosa fue la que llevamos a cabo mediante *Kluwer on line*. En ella revisamos algunas de las revistas internacionales especializadas que citamos en el siguiente apartado.

II.2.1 Revistas internacionales

Journal of Mathematical Imaging and Vision fue revisada desde enero de 1997 (vol. 7, n. 1) y *Research on Higher Education. Journal of the association for institutional research* desde febrero de 1998 (vol. 39, n. 1) hasta la actualidad. En ninguna encontramos nada interesante para nuestro trabajo. La mayoría de los artículos están relacionados con matemáticas de niveles superiores a los de Secundaria y Bachillerato.

Journal of Mathematics Teacher Education fue revisada desde 1998 (vol. 1, n. 1) hasta la actualidad. Encontramos un trabajo de Eric J. Knuth (Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics). Se trata de un artículo que no trata el tema desde nuestro mismo punto de vista pero que pudiera ser interesante para tratar de dar explicación a algunas de las situaciones que se producen en las aulas de Secundaria y Bachillerato cuando se trabaja con el razonamiento inductivo.

Educational Studies in Mathematics fue revisada desde 1993 (vol. 24, n. 1) hasta la actualidad. En esta revista hemos encontrado una serie de artículos que hemos utilizado en nuestra investigación y que se comentarán a lo largo de este capítulo. Nos referimos a Avital & Hansen (1976), Hanna (1989, 2000), Simon (1996), Dreyfus (1999), Lithner (2000), Marrades & Gutiérrez (2000) y Miyazaki (2000).

En las bibliotecas mencionadas anteriormente consultamos también otras revistas internacionales:

En *Journal for Research in Mathematics Education*, revisada desde 1995, obtuvimos el trabajo de Maher & Martino (1996).

Mathematics in School, que ha sido revisada desde 1975 hasta la actualidad, nos ha proporcionado un artículo (Pitts, J., 1979) sobre los patrones numéricos.

En otras revistas, la búsqueda fue menos sistemática y nos limitamos a los artículos que teníamos constancia que podían ser relevantes para nuestra investigación. En *Mathematics Teaching in the Middle School* (2001) encontramos dos artículos que guardan relación con el razonamiento inductivo. El primero es de Fernández & Anhalt. En él se presenta un proyecto en el que se trata que los alumnos construyan, describan, representen patrones, desarrollen y apliquen las relaciones, hagan y verifiquen reglas o generalizaciones, y exploren propiedades matemáticas. El segundo artículo es de deGroot y en él se trabajan dos actividades con los estudiantes. Se ilustra cómo se puede guiar a los alumnos hacia el razonamiento matemático formal a través del discurso estudiante-estudiante y con apoyo del profesor.

En *Educación Matemática* hemos encontrado algunos trabajos que han sido utilizados para la presente investigación. Estos artículos son los de Moreno & Waldegg (1992), Santos (1992), Radford (1994) y Flores (2002).

II.2.2 Revistas nacionales

Hemos realizado una búsqueda sistemática en las revistas españolas *SUMA* y *Epsilon*.

En *SUMA* hemos revisado los números 27 (1998), 34 (2000), 35 (2000), 36 (2001), 37 (2001), 38 (2001), 39 (2002) y 40 (2002). En *Epsilon* han sido revisados los números 45 (1999), 46 (2000), 48 (2000) y 49 (2001). De estas revistas destacamos los trabajos de Fernández (1998) y de deVilliers (1993) respectivamente.

II.2.3 Congresos nacionales

Hemos tenido acceso a las actas de los Simposios I (Zamora, 1997), II (Pamplona, 1998), III (Valladolid, 1999), IV (Huelva, 2000) y V (Almería, 2001) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Destacamos aquí el *Seminario de investigación de prueba y demostración: razonamiento matemático* (Almería, 2001).

Consultamos las actas Jornadas Thales de investigación en el aula de matemáticas de 1998, 1999, 2000-2001 y 2001-2002. De estas jornadas hemos utilizado los trabajos de Cañadas, M. C., Nieto, E. & Pizarro, A. (2001) y Cañadas, M. C. (2001).

II.2.4 Congresos internacionales

La búsqueda bibliográfica en las actas de los congresos internacionales la centramos en dos de los eventos más significativos en educación matemática:

En el *8th International Congress on Mathematical Education* (ICME8), destacamos los trabajos de Jones (1996) y Maher , Steencken & Deming (1996).

Han sido revisadas las actas del *International Meeting for the Psychology of Mathematics Education* (PME) correspondientes a 1986, 1989, 1992, 1997, 1998, 2001 y 2002. Mencionamos como trabajos más relacionados con nuestra investigación, los de Hanna (1989), Cañadas, Castro & Gómez (2002), Miyakawa (2002) y Nasser & Tinoco (2002).

II.3.5 Tesis

En general, todas las tesis consultadas nos han ayudado a conocer cuál es el estado actual de la investigación en nuestro tema. Sus referencias bibliográficas han sido una de las fuentes más utilizadas para obtener nuevas referencias.

Las tesis realizadas dentro del grupo de investigación de Pensamiento Numérico y que han sido de interés para nuestro trabajo son las de Castro (1995) y Ortiz (1997). Castro trabaja sobre patrones numéricos y generalizaciones con distintos sistemas de representación. Muestra las capacidades de alumnos de Secundaria en una situación de enseñanza/aprendizaje especialmente preparada. La tesis de Ortiz trata sobre razonamiento inductivo numérico. Presenta distintos niveles en la comprensión de estudiantes de Primaria al continuar secuencias numéricas.

Las tesis de Martínez (2000) e Ibañes (2001) nos han aportado información acerca de la demostración matemática y su aprendizaje. Hemos conocido algunos aspectos cognitivos relativos a los razonamientos inductivo y deductivo implicados en el proceso de la demostración.

Goetting (1995), con un marco general más filosófico que las mencionadas hasta el momento, se centra en analizar las argumentaciones que los estudiantes universitarios encuentran convincentes. Entre las preguntas de investigación que plantea, hay algunas relativas a la convicción de las argumentaciones inductivas y a la generalización.

II.3.6 Handbooks

Hemos revisado los siguientes *handbooks*:

- Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (NCTM, 1992).
- International handbook of Mathematics Education. (Kluwer Academic Publisher, 1996).
- Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. (LEA, 1999)

Aunque no hemos encontrado ningún artículo relevante para nuestro interés investigador.

Toda la bibliografía consultada ha sido de gran utilidad no sólo por los documentos que nos han aportado interesantes por su contenido en sí, sino también por las nuevas referencias a las que nos han remitido.

II.3 Aportaciones de los documentos analizados

El análisis de los documentos analizados en relación con nuestro trabajo nos ha permitido conocer cuál ha sido la evolución histórica de algunos significados con los que trabajaremos más adelante, fijar el significado de los términos clave que vamos a utilizar, establecer qué se ha trabajado sobre este tema, cómo se ha realizado el trabajo, qué resultados se han obtenido, a qué conclusiones se han llegado, etc. O sea, establecer el estado de la cuestión a investigar. A continuación tratamos esos aspectos.

II.3.1 La inducción a través del tiempo según la filosofía de la ciencia

En este apartado hacemos un breve recorrido histórico tratando de relacionar las distintas corrientes filosóficas con la concepción o concepciones de los términos claves que aparecen en nuestro trabajo de investigación. La finalidad es conocer algunas ideas que sobre la inducción y el razonamiento inductivo se han considerado a lo largo de la historia de la filosofía. Para este apartado hemos consultado a Ferrater (1988), Duval (1999), Vega (1990), Rivadulla (1991) y Bakker & Clark (1998), fundamentalmente.

La organización de las distintas corrientes filosóficas y los autores más relevantes se han llevado a cabo mediante una separación en el tiempo. Hemos establecido los siguientes periodos, que consideramos que cumplen nuestras expectativas actuales:

- La cultura griega.
- Siglos XI-XVIII.
- Siglos XIX y XX.
- La actualidad.

La cultura griega

Se cree que el origen de una actitud discursiva y racional estuvo en la cultura griega, hacia el siglo VI antes de nuestra era. Esta tendencia representó la aparición de unos modos de considerar la realidad natural y social en los que se pueden ver las raíces del pensamiento filosófico y científico de Occidente, y dio lugar a variadas formas de argüir, probar o debatir creencias u opiniones a la luz de las razones aducidas. (Vega, 1990) Sócrates (c. 470-c. 399 a.C.), filósofo y maestro griego, ha tenido gran peso en la filosofía occidental por su influencia sobre Platón. Sócrates se basaba en el principio que presupone que toda persona posee conocimiento pleno de la verdad última dentro del alma, y que ésta necesita ser estimulada por reflejos conscientes para darse cuenta de ella. Creía en la superioridad de la discusión sobre la escritura. En su discurso lógico se hacía hincapié en la discusión racional y en la búsqueda de definiciones generales.

Uno de los filósofos más conocidos de la antigua Grecia, Platón (c. 428-c. 347 a.C.) se proclamó discípulo de Sócrates y trasmitió sus enseñanzas en sus escritos dialécticos, donde plasmó su estilo propio de debate: la obtención de la verdad mediante preguntas, respuestas y más preguntas. Platón fue un remoto precursor del idealismo. De él cabe destacar su teoría del conocimiento y su teoría de las ideas. La teoría de las ideas está destinada a explicar el camino por el que uno alcanza el conocimiento y también cómo las cosas han llegado a ser lo que son. Al igual que su maestro, Platón estaba convencido de que el conocimiento se puede alcanzar. Se vislumbra aquí cierta apariencia de inducción, en el sentido de conducir al individuo a saber sobre lo ignorado. Para Platón, el conocimiento debe tener como objeto lo que es en verdad real, y lo real es lo fijo, lo permanente, lo inmutable. Por tanto, no puede tener como objeto lo que percibimos a nuestro alrededor por medio de los sentidos, ya que estos nos pueden conducir a engaño.

Una consecuencia de esto es el rechazo, por parte de Platón, del empirismo desde el que se afirma que todo conocimiento se deriva de la experiencia. Los objetos de la experiencia tienen para Platón, a lo sumo, un grado de probabilidad, pero no son objetos propios del conocimiento. Las observaciones y las opiniones de la ciencia, aunque estén bien fundamentadas, no cuentan como conocimiento verdadero.

Aristóteles (384-322 a.C.) se considera uno de los pensadores más destacados de la antigua filosofía griega y uno de los más influyentes en el conjunto de toda la filosofía occidental. Aristóteles fue el alumno más destacado de Platón. Centró su interés, principalmente, en la biología, frente a la importancia que Platón concedía a las matemáticas. Aunque la ciencia estudia los tipos generales, éstos, según Aristóteles, encuentran su existencia en individuos específicos. Por tanto, la ciencia y la filosofía deben equilibrar las afirmaciones del empirismo (observación y experiencia sensorial) y el formalismo (deducción racional).

Para los platónicos, la dialéctica era el único método válido y eficaz tanto en la ciencia como en la filosofía. En este sentido, Aristóteles, a pesar de ser discípulo de Platón, protagoniza una ruptura con la academia de su maestro y distingue entre lógica dialéctica y analítica. La lógica dialéctica sólo comprueba las opiniones por su consistencia lógica. La lógica analítica comprueba de forma deductiva a partir de principios basados en la experiencia y una observación precisa. Considera razonamiento válido al razonamiento cuya organización de las proposiciones entre sí, produce necesariamente una y sólo una conclusión (Duval, 1999).

Aristóteles fue, según Rivadulla (1991), el primer pensador que habló de la inducción con una significación precisa. Estableció la diferencia entre silogismo e inducción. El silogismo va de lo más universal a lo menos universal, y la inducción de lo menos universal a lo más universal. Consideraba la inducción intuitiva como el proceso por el que aprendemos lo universal en lo particular, observando un caso único de la ley.

Tuvo en cuenta dos formas de razonamiento inductivo:

1. El *razonamiento inductivo perfecto* como el caso límite del razonamiento inductivo general. Sólo es posible con objetos que pueden ser enumerados por entero y con

propiedades fácilmente obtenibles por abstracción. Se establece una conexión racional efectiva entre un concepto y otro inferido por este concepto.

2. El *razonamiento inductivo imperfecto*, que expresa los razonamientos inductivos habituales. Opera a base de una especie de "mediación psicológica" hecha posible por una "revisión de los casos particulares".

Según lo expresado, llegar a una inducción perfecta presupone una inducción imperfecta previa.

Siglos XI-XVIII

Para la escolástica medieval, que consideraba a Aristóteles la máxima autoridad filosófica, el proceso inductivo parte de entes singulares para llegar a lo universal. El realismo consideraba las formas platónicas o conceptos universales como reales. Este concepto de universal en la abstracción muestra cierta relación entre la inducción aristotélica interpretada por la escolástica medieval y el proceso que se parecía identificar en Platón con el razonamiento inductivo.

El inglés Roger Bacon (c. 1214-1294) cuestiona el tipo de enumeración que debía considerarse propio del proceso inductivo científico. Está en contra de Aristóteles, quien estableció analogías entre la inducción y la abstracción (inducción positiva) y anticipó algunas de las conclusiones que más tarde se recogerían en el empirismo, acentuando la necesidad de complementar la metodología inductiva por medio de la experimentación activa.

En el siglo XIII el debate público se convirtió en un instrumento educativo flexible para estimular, probar y comunicar el progreso del pensamiento en la filosofía y teología. A mediados del siglo XIV, sin embargo, la vitalidad del debate público decayó y se convirtió en un rígido formalismo.

El nominalismo fue la escuela filosófica dominante del siglo XIV, cuando la escolástica empezó a declinar. El nominalismo fue una doctrina desde la que las abstracciones carecen de una realidad esencial o sustantiva, sólo los objetos individuales tienen una existencia real. Estos universales eran considerados sólo nombres. Una teoría intermedia entre el nominalismo y el realismo es el conceptualismo. El conceptualismo mantiene que aunque los universales (abstracciones o ideas abstractas) no tienen existencia en el mundo externo, existen sin embargo como ideas o conceptos en la mente y que allí implican algo más que meras palabras.

El empirismo fue la corriente filosófica sistematizada por Locke (1632-1704). Según esta corriente se afirma que todo conocimiento se basa en la experiencia y se niega la posibilidad de ideas espontáneas o del pensamiento a priori. La teoría de Berkeley (fenomenalismo) está de acuerdo en que de lo único de lo que somos concientes son las percepciones, pero argumenta que no necesitamos hacer afirmaciones ontológicas respecto a la supuesta fuente de nuestras percepciones. El fenomenalismo es una variedad del idealismo que depende de las percepciones sensoriales. Berkeley (1685-1753) es considerado el fundador de la moderna escuela del idealismo. El relativismo resulta ser la principal amenaza para el fenomenalismo.

La crítica más contundente del conocimiento causal predominante es la de David Hume (1711-1776), quien influyó en el desarrollo del escepticismo y el empirismo. Hume defiende que todo nuestro conocimiento procede de impresiones recibidas por nuestros sentidos o que surgen internamente en nosotros en forma de sentimientos, argumentando "que la razón nunca podrá mostrarnos la conexión entre un objeto y otro si no es ayudada por la experiencia y por la observación de su relación con situaciones del pasado" (Encarta´99). El punto de vista escéptico de Hume duda de la capacidad del hombre para conocer las causas de una manera racional, estaba convencido de que nuestro pensamiento es más un sentimiento que una fuente de conocimiento.

La historia de la filosofía llama racionalistas a los que se oponen a los empiristas. Los racionalistas afirman que la mente es capaz de reconocer la realidad mediante su capacidad para razonar, una facultad que existe independiente de la experiencia. En respuesta al escepticismo de Hume, Kant (1724-1804) construyó un sistema de filosofía en el que combinó el principio empirista de que *todo conocimiento tiene su fuente en la experiencia*, con la creencia racionalista en el conocimiento conseguido por la deducción. Diferenció los modos de pensar en proposiciones analíticas y sintéticas. Una proposición analítica es aquella en la que el predicado está contenido en el sujeto. La verdad de este tipo de proposiciones es evidente y se descubre por el análisis del concepto en sí mismo. Las proposiciones sintéticas son aquellas a las que no se puede llegar por análisis puro. Todas las proposiciones comunes que resultan de la experiencia del mundo son sintéticas.

Resumiendo, destacamos las principales concepciones relacionadas con la inducción en este periodo.

- "Concepciones basadas en ideas baconianas adoptadas por algunos autores de tendencia empirista.
- Concepciones fundadas en las ideas aristotélicas, adoptadas por la mayor parte de autores escolásticos y por otros de tendencia realista moderada y conceptualista.
- Concepciones que insisten en la noción "positiva" de la inducción, adoptadas por varios racionalistas.
- Concepciones en las que el razonamiento inductivo se basa en la observación de ciertos acontecimientos que siguen normalmente a otros, de modo que puede predecirse. El pionero de estas teorías fue Hume.
- Concepciones según las cuales juicios inductivos se explican por la estructura de conciencia trascendental. El padre de esta teoría fue Kant" (Ferrater, p. 1673).

Siglos XIX y XX

Durante el S. XIX destacan varias teorías de la inducción. A continuación exponemos algunos de los autores influyentes en este periodo y sus ideas.

A. Gratry (1805-1872) fue un sacerdote francés que se opuso al idealismo alemán. Pregonó la necesidad de usar ideas metafísicas de Platón y Aristóteles, entre otros. El Padre Gratry contrapone la inducción a la deducción. Considera que la deducción no permite alcanzar otras consecuencias que las contenidas en un principio dado. La inducción, sin embargo, se funda en una percepción y se desarrolla hasta alcanzar el proceso dialéctico en sentido propio. El paso de lo finito a lo infinito es algo que la mera deducción no permite. Según este autor, la inducción da por resultado verdades "íntegras" o "integrales".

W. Whewell (1794-1866) propuso la noción de *coligación*, que define como "acto intelectual por medio del cual se establece una conexión precisa entre los fenómenos dados a nuestros sentidos" (Ferrater, p. 534). Habla de coligación de los hechos y la concibe como algo que se forma en el proceso de la actividad del científico. Cree que la marcha misma de la ciencia debe proporcionar instrumentos apropiados para el perfeccionamiento de su actividad. Posteriormente, A. Lalande (1867-1963) advierte que, a veces, se ha entendido la inducción de Whewell como inducción completa, pero que éste no es el sentido que él consideraba.

John Stuart Mill (1806-1873) desarrolló un sistema de lógica inductiva. Es considerado figura puente entre la inquietud del siglo XVIII por la libertad, la razón y la exaltación del ideal científico; y la tendencia del XIX hacia el empirismo y el colectivismo. También investigó la causalidad, buscando una explicación en términos de principios empíricos. Mill examinó a fondo las ideas de Whewell. El desacuerdo entre estos dos autores se produce porque Mill no considera que los principios de inducción sean los principios de la mera coligación. Mill aboga porque toda sucesión de acontecimientos constituye un test de la misma que acaba en su confirmación (Ferrater, 1988; Rivadulla, 1991).

Otras ideas importantes sobre la inducción en el S. XIX se deben a Peirce y a Lachelier.

Peirce, C. S. (1839-1914) es un filósofo y físico estadounidense conocido por su sistema filosófico llamado, posteriormente, pragmatismo. El pragmatismo considera que la explicación científica debe tener en cuenta que la ciencia pretende resolver problemas prácticos. El punto de partida es *el hecho*. Este concepto ha sido ampliado por los filósofos estadounidenses William James y John Dewey. En los últimos años, el pensamiento de Peirce ha dado lugar a distintas interpretaciones, incluso contrapuestas.

Lachelier, J. (1832-1918) es uno de los representantes de la tradición espiritualista e idealista francesa del siglo XIX y de la corriente llamada a veces "positivismo espiritualista". La inducción radica para Lachelier en el principio de las causas eficientes y de las causas finales. La ley de las causas eficientes fundamenta la inducción pero para que sea completa, exige la presencia de la finalidad. Lachelier afirma que *la ley de las causas finales es, tanto como la de las causas eficientes, un elemento indispensable del principio de la inducción*. Hay varias opciones de pensar en la realidad: podemos concebirla como algo "sentido" o "experimentado", con lo cuál nos estamos adhiriendo al empirismo. Y también podemos pensar en la realidad como algo "intelectualmente intuido", adoptando así la postura platonista (Ferrater, p. 1897).

Tratando de evitar o acabar con algunos de los problemas que presentaban el empirismo y el racionalismo en su búsqueda de la causalidad, aparece el positivismo. El positivismo se basa en la experiencia y el conocimiento empírico de los fenómenos naturales. El término fue utilizado por primera vez por un filósofo y matemático francés del siglo XIX, Auguste Comte. Los seguidores de esta corriente filosófica se ciñen a la realidad a la que tenemos acceso y siguen un enfoque descriptivo de la explicación. Consideran la explicación como una descripción generalizada; y la predicción como una descripción de un acontecimiento futuro (Bakker & Clark, 1998).

En el siglo XX se ha producido una nueva apreciación del método aristotélico y de su relevancia para la educación, el análisis de las acciones humanas, la crítica literaria y el análisis político. Se han propuesto varias teorías sobre la naturaleza y las formas de inducción.

Hasta ahora, todo lo referido a la explicación se centraba en su contenido. En los últimos decenios se ha centrado más en las estructuras lógicas de las teorías. Al estudiar las relaciones lógicas, se consideran dos formas alternativas de argumentación: la inducción y la deducción. La inducción procede de lo particular a lo general, y la deducción procede en el sentido contrario. Las inducciones implican un salto, no se pueden observar todos los detalles. Las deducciones son necesarias desde el punto de vista lógico. Su único punto débil es que las premisas de las que se parte sean falsas (Bakker y Clark, 1998).

A principios del siglo XX, un grupo de filósofos interesados en la evolución de la ciencia moderna rechazaró las ideas positivistas tradicionales que creían en la experiencia personal como base del verdadero conocimiento y resaltaron la importancia de la comprobación científica. Este grupo fue conocido como el de los positivistas lógicos y entre ellos se encontraban el austriaco Ludwig Wittgenstein y los filósofos británicos Bertrand Russell y George Edward Moore.

Lalande (1867-1963) considera que hay varios tipos de inducción. Distingue entre un concepto amplio y otro más estricto. El concepto amplio de inducción es una operación que se realiza cuando se llega a una conclusión sobre un hecho, partiendo de otro hecho y la llama *inducción reconstructiva*. El concepto estricto es un proceso de razonamiento que va de lo particular a lo universal. Este concepto lo subdivide en dos: la *inducción amplificadora* o *inducción ordinaria*, que consiste en "enunciar un juicio universal sobre una serie de objetos cuya reunión permitiría solamente un aserto particular con el mismo sujeto y el mismo predicado." Y la *inducción completa* o *inducción formal*, "consistente en enunciar en una sola fórmula, relativa a una clase o a un conjunto, una propiedad que ha sido afirmada separadamente de cada uno de los términos que abarca esta clase o de los elementos que componen este conjunto." Lleva a la práctica un racionalismo que puede ser considerado radical. (Ferrater, 1988, pp. 1674 y 1903)

Jan Łukasiewicz (1878-1956) ha definido la inducción como un tipo de reducción y la ha llamado *reducción inductiva*. Se puede ver en "Si p, entonces q. Q, entonces p". La lógica proposicional cree que este razonamiento es una falacia. Pero para Łukasiewicz esta falacia constituye la base del razonamiento inductivo. La definición de inducción de este autor excluye algunos razonamientos que otros autores consideran inductivos como la *inducción matemática.*

En el siglo XX la inducción se vincula con la estadística, más en concreto, en el campo de la probabilidad y la inferencia. El problema de la justificación de la inducción tratado por Hume, fue retomado por Reichenbach, Carnap y Popper en los mismos términos que Hume.

<u>En la actualidad</u>

Actualmente, las teorías sobre la inducción son muy diversas. Nelson Goodman distingue entre "el viejo problema de la inducción" y el "nuevo enigma de la inducción". El primero es el problema de la "justificación de la inducción". En él se preguntan por qué algunas de las llamadas "inferencias inductivas" son aceptadas como válidas. El problema es cómo justificar las predicciones. Se le trató de dar respuesta con la ley de uniformidad de la Naturaleza (si dos ejemplos concuerdan en algunos respectos, concordarán en todos). Se han agregado otros principios como el de continuidad espacio-temporal. Poincaré, afirmó que "es tan difícil justificar el principio de inducción como prescindir de él" (Ferrater, 1988, p. 1675).

Para terminar, tomamos unas ideas sobre tres tendencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que en la actualidad están en la base de las distintas y variadas posturas filosóficas que tratan de explicar el razonamiento inductivo: el empirismo, el realismo y el relativismo.

El empirismo actual trata de evitar la dependencia de entidades teóricas abstractas e intenta que se proporcione una base para aplicar el conocimiento científico a los problemas prácticos insistiendo en la experiencia.

Los empiristas dividen el proceso de descubrimiento en dos elementos:

1. Generalización legítima de experiencia pasada.
2. Extensión imaginativa de dicha experiencia.

Ningún procedimiento que no sea la generalización (entendida como inducción completa) puede proclamar su validez hasta que se haya sometido al control de la experiencia.

Los realistas defienden que la ciencia llega hasta la realidad. La observación no es aquí el punto crucial de comienzo de toda explicación científica. Se puede contar con la experiencia para reforzar nuestra convicción de que tenemos una explicación en un área determinada (Bakker y Clark, 1998).

Desde el relativismo, para construir una teoría de la explicación hay que estudiar el trabajo de los científicos en detalle. Según Khun, un cambio de paradigma constituye una revolución. La explicación científica puede definirse, desde esta perspectiva, en función de aquello para lo que los científicos encuentran que resulta útil.

También hemos de anotar que actualmente la inducción aparece fuertemente vinculada con la probabilidad. Existen dos escuelas: para una de ellas, el problema de la inducción debe tratarse desde el punto de vista de la teoría frecuencial de la probabilidad y las inferencias inductivas son inferencias estadísticas. Para la otra, a la que pertenecen la mayor parte de los autores (Keynes, Carnap, Hempel y Goodman, entre otros), la probabilidad no es más que un grado de confirmación.

II.3.2 Significado de los términos fundamentales

Para llevar a cabo la tarea de fijar el significado de los términos fundamentales de este trabajo, hemos tenido en cuenta aquellos trabajos de autores que han dedicado tiempo y esfuerzo en clarificar estos términos. También hemos consultado varios diccionarios y enciclopedias con objeto de comparar la consideración que hacen de los términos que nos ocupan desde una visión ajena a la investigación en educación. Los diccionarios consultados son: Diccionario María Moliner (1986), Diccionario de Filosofía de Francisco José Fernández Ferrater (1988), Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990) y Diccionario de la Real Academia Española (1992). Las enciclopedias consultadas han sido: Gran Larousse Universal (1987) y la enciclopedia electrónica Encarta'99. Al hacer referencia a ellos en este apartado y para simplificar la escritura, no les vamos a poner la fecha en lo sucesivo.

Argumento/Argumentación

María Moliner define la argumentación como la acción por la que se aducen argumentos para sostener una opinión. Considera argumentación como sinónimo de argüir y por este término entiende que es "probar o hacer ver con claridad una cosa, exponer una justificación".

El Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales no incluye ninguna entrada para los términos argumento o argumentación relacionados con nuestro tema de investigación.

Argumento y argumentación como la acción de argumentar, están relacionadas directamente con el razonamiento, el cual permitirá llegar a probar o rechazar una conjetura. Ferrater considera como sinónimos los términos *argumento* y *argumentación*. Este autor afirma que "la diferencia establecida, a veces, entre argumento y argumentación es para nuestro caso poco pertinente".

El Diccionario de la Real Academia Española considera que el argumento es "el razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a otro de aquello que se afirma o se niega". Y por argumentación entiende que es la "acción de probar o poner argumentos".

Rivadulla (1991) asegura que el argumento es el "razonamiento en el que se pretende apoyar una afirmación determinada" (p. 20). Duval (1999) añade a lo anterior, la condición de que la justificación o refutación sea espontánea ya que define argumentación como "toda justificación o refutación espontánea de una declaración en una discusión o debate" (p. 144). Además, mediante la argumentación, la persona que realiza el argumento trata de convencer a otra persona de algo de lo que ella está totalmente convencida. En este sentido, para Ferrater el argumento es el razonamiento mediante el cual se intenta probar o refutar una tesis, convenciendo a alguien sobre la verdad o falsedad de la misma. Según Lithner (2000), la argumentación es la confirmación, la parte del razonamiento que pretende convencer a uno mismo o a alguien más de que el razonamiento es apropiado.

En las explicaciones de estos autores sobre la argumentación, encontramos la equivalencia entre la acepción de justificación espontánea de Duval y la de razonamiento de Rivadulla. También involucrando la convicción, Duval afirma que la argumentación se realiza cuando se trata de convencer a alguien, expresándonos en la lengua natural, de la aceptabilidad de nuestra declaración o la insostenibilidad de la suya. Según este autor, en una argumentación se debe respetar la continuidad temática entre los pasos del razonamiento. El encadenamiento de los pasos debe permitir la confrontación de puntos de vista opuestos sobre una misma cuestión. Aparece la función de convicción, asociada a la argumentación, que señalan algunos autores como Fetísov (1980), Tall (1989), Hanna, (1989) y Volmik, (1990) como una de las funciones más importantes que cumple la argumentación.

La argumentación en los términos expuestos es equivalente a lo que Balacheff (2000) llama explicación. En la explicación es el sujeto locutor quien garantiza la validez de una proposición. La base de la explicación es esencialmente la lengua natural. Hay que hacer la aclaración de que Balacheff considera que no hay argumentación matemática, en el sentido de práctica argumentativa que esté libre de algunas restricciones que sí existen para la demostración, pero que sí hay argumentación en matemáticas. Desde el nivel del sujeto locutor, en el que se sitúa Balacheff, Miéville dice de la explicación que "tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad. Estos objetos se encuentran, se armonizan y en su afinidad determinan la organización de una explicación que se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber..." (Miéville, citado por Balacheff, 2000, p. 12).

Algunos autores distinguen entre diferentes tipos de argumentación. Díez & Moulines (1997) hablan de argumentación deductiva y argumentación inductiva. La diferencia entre ambas es intencional: en los argumentos deductivos se pretende que la verdad de las premisas haga segura la verdad de la conclusión. En la argumentación inductiva sólo se persigue este apoyo en cierto grado. Los argumentos inductivos son aumentativos, esto es, la conclusión contiene más información que las premisas. Aunque la distinción entre deductivo e inductivo es la más habitual, se pueden encontrar casos en los que esa clasificación no es tan simple. Pedemonte (2000) distingue tres tipos de argumentación: argumentación deductiva, argumentación abductiva y argumentación inductiva. Para este autor, en la argumentación deductiva se deduce una afirmación de unos datos, aplicando un principio que permite la reafirmación de éste mediante los datos. En la argumentación abductiva, la afirmación se deduce antes de que se identifiquen los datos. El principio permite la reafirmación de una sentencia aunque todos los datos no estén disponibles. Y en la argumentación inductiva, la afirmación se deduce como caso genérico a partir de casos específicos. En estas aproximaciones de argumento y argumentación se ven reflejadas dos ideas fundamentales que vamos a considerar asociadas a argumento / argumentación. En primer lugar, la finalidad que persigue la argumentación como forma de razonamiento es la de probar o refutar una afirmación determinada. Y en segundo lugar, el proceso que se lleva a cabo para conseguir este objetivo: convencer a alguien.

Conjetura

El diccionario de Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales presenta dos entradas para conjetura, tomamos aquella que tiene relación con este trabajo y que la considera como la "proposición que se prevé verdadera, pero que se encuentra todavía pendiente de una demostración que la confirme o que, por el contrario, la rechace o modifique".

El Diccionario de la Real Academia Española considera que la conjetura es "el juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones."

Demostración

Algunas acepciones del verbo demostrar son como sigue:

Según el Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, "demostrar es un proceso lógico que conduce a una proposición a partir de otras tomadas como hipótesis".

En el Diccionario de uso del español María Moliner se puede leer "demostrar es seguir cierto razonamiento que produce la certeza sobre una afirmación".

El Diccionario de la Real Academia Española incluye varias entradas para el término demostración:

1. "Señalamiento, manifestación.
2. Prueba de una cosa, partiendo de verdades universales y equivalentes.
3. Comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría.
4. Fin o procedimiento del proceso deductivo.
5. Ostentación o manifestación pública de fuerza, poder, riqueza, habilidad, etc".

Solow (1987) considera que las matemáticas son un lenguaje universal, el lenguaje de todos los matemáticos y atribuye a los matemáticos como misión fundamental descubrir y comunicar ciertas verdades. Afirma que una demostración es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma, el idioma de los matemáticos, o sea, las matemáticas.

Fetísov (1980) define la demostración como "sistema de razonamientos por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y de verdades antes demostradas" (p. 10). Basándose en la misma idea, Marrades & Gutiérrez (2000) consideran la demostración como "cualquier justificación que satisfaga los requisitos de abstracción, rigor, lenguaje, etc, demandados por los matemáticos profesionales para aceptar una afirmación matemática como válida en un sistema axiomático" (p. 89). Al analizar las acepciones consideradas por estos autores, se vuelve a encontrar una equivalencia entre el sistema de razonamientos de Fetísov y la justificación con unas determinadas características de Marrades & Gutiérrez. Ésta es la misma equivalencia que notamos anteriormente entre Rivadulla y Duval, en el apartado dedicado a la argumentación.

La convicción es una de las funciones que Hanna (1989), basándose en el trabajo de deVilliers (1993), atribuye a la demostración. Se apoya precisamente en este carácter convictivo para considerar que una demostración es un razonamiento necesario para dar validez a una afirmación y que una argumentación puede asumir formas diferentes, mientras sea convincente. Por otra parte, siguiendo el trabajo de esta investigadora (Hanna, 2000), deVilliers se centra en la función de explicación de la demostración y distingue entre demostraciones explicativas y demostraciones no explicativas. Este autor considera la inducción matemática como demostración no explicativa. A pesar de que los matemáticos presentan opiniones enfrentadas sobre la demostración, todos están de acuerdo en que hay que distinguir claramente entre una prueba correcta y una argumentación heurística, y que la validez de los resultados matemáticos dependen finalmente de la demostración. La validez de una afirmación recae, en último término, sobre la demostración.

Hay autores que han considerado distintos tipos de demostraciones. La división más amplia es la que distingue entre dos grandes grupos: las demostraciones deductivas y las demostraciones no deductivas (Radford, 1994). En general, los investigadores consideran dos caminos empleados en cualquier demostración: inducción (se parte de conocimientos o verdades para obtener una verdad más general o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica) y deducción (se aplican leyes generales a un caso particular).

Inducción e inducción completa

Vamos a hacer una distinción entre los términos inducción e inducción completa (o inducción matemática). Para ello vamos a considerar las reflexiones que sobre esta distinción hacen varios autores como Polya (1979), Fetísov (1980), Ferrater (1988), Rivadulla (1991) y Díez & Moulines (1997). A diferencia del planteamiento de estos autores, que tratan los dos términos a la vez y estableciendo sus diferencias, en este trabajo se va a hacer separadamente ya que consideramos que ambos términos tienen entidad propia como para hacerlo así y que, además, se verán más claramente las diferencias que existen. Adelantamos que consideramos la inducción como la forma común que todas las ciencias utilizan para descubrir leyes generales partiendo de evidencias particulares. La inducción matemática es considerada como una forma de demostrar propiedades matemáticas y, por tanto, sólo se utiliza en la ciencia matemática. Según Polya (1979), la coincidencia en el nombre se debe a que, a menudo, la propiedad a demostrar matemáticamente por inducción completa se ha encontrado y enunciado después de un proceso de inducción. Por ello se emplean los dos procedimientos en los mismos problemas matemáticos: la inducción para establecer la generalidad de la evidencia empírica y la inducción matemática para probar la veracidad de la misma.

Inducción

En el Diccionario de la Real Academia Española no hemos encontrado ninguna entrada que haga referencia al tema que es de nuestro interés. Sin embargo, de inducir, nos dice que es "ascender lógicamente el entendimiento desde el conocimiento de los fenómenos, hechos o casos, a la ley o principio que virtualmente los contiene o que se efectúa en todos ellos uniformemente".

En esta misma línea Fetísov (1980) llama inducción al "razonamiento que parte de los conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad más general o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica" (p. 9). La misma idea de ampliación considerada por Rivadulla, es retomada por Díez & Moulines (1997). Cuando estos autores hablan de inducción se refieren a todo tipo de inferencia ampliativa, entendiendo que esta inferencia se produce cuando la hipótesis excede al contenido de los datos. Ellos señalan que la caracterización que frecuentemente se hace de la inducción como "paso de lo particular a lo general" expresa sólo que la conclusión contiene información nueva con respecto a las premisas.

Rivadulla (1991) considera la inducción como el procedimiento que permite reconocer como válidos los principios explicativos. Conduce de casos particulares de la ley general a la ley misma. Por medio de la inducción intuitiva aprendemos lo universal en lo particular, observando un caso único de la ley.

La explicación de Polya (1979) está más cercana a la realidad y afirma que se suele llamar inducción al procedimiento que usan los científicos para tratar con la experiencia. La inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. La inducción empieza frecuentemente con alguna observación. Los pasos dados en un proceso inductivo son:

a) Observar alguna semejanza.
b) Hacer alguna generalización, esto es, una conjetura o juicio tentativo. La conjetura se formula cuando se observa alguna evidencia que la sugiere, esta viene apoyada por casos particulares esto es, encontrada por inducción.

La inducción se apoya, según Polya (1966), en acciones visibles como son la generalización, la particularización y la analogía. Se comenta algo sobre las dos primeras, que son las que utilizaremos:

Generalización

La generalización se refiere al paso de un objeto particular a una clase que lo contenga. Así, se generaliza cuando se pasa de una serie determinada de objetos a una serie mayor que la contiene. Un ejemplo es cuando se pasa desde la consideración de los triángulos a los polígonos de un número arbitrario de lados.

A partir de una regularidad en los hechos observados, se trata de generalizar en un intento por sistematizar dicha regularidad. En numerosas ocasiones se utilizará la analogía para llegar a hacer la generalización. A su vez la generalización se pone a prueba viendo si funciona para nuevos casos particulares.

Ejemplo (tomado de Polya 1979)

Casualmente se puede descubrir una propiedad sumando números naturales elevados al cubo, como $1^3+ 2^3+ 3^3+4^3 = 10^2$.

La pregunta inmediata es: ¿sucede en otras ocasiones que la suma de números naturales consecutivos elevados al cubo sea el cuadrado de un número? O sea ¿será cierto que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 +\ldots..+ n^3$ es un número natural elevado al cuadrado? ¿Cuál es dicho número?

Vemos con otros casos particulares sencillos, los casos n = 2 y n = 3:

$$1^3 + 2^3 = 3^2 \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

La propiedad se observa que se cumple para estos dos valores también. Además parece que en el segundo miembro de la igualdad va a aparecer la suma de las bases que aparecen elevadas al cubo en el primer miembro de la igualdad, elevada al cuadrado.

Luego hay ya muchas posibilidades de que sea cierta la siguiente igualdad, que constituye la generalización para las expresiones anteriores:

$$1^3+ 2^3+ 3^3+ 4^3+ 5^3\ldots\ n^3 = (1+ 2+ 3+ 4+ 5\ldots\ n)^2$$

Particularización

La particularización es el paso de una clase total a un objeto contenido en la misma. Es el caso de pasar de la consideración de una serie determinada a una serie menor contenida en la anterior. Siguiendo el ejemplo tomado anteriormente, la particularización es pasar de los polígonos regulares de n lados al triángulo equilátero o al cuadrado, o dar una propiedad de todos los triángulos y comprobarla para un triángulo concreto. Por ejemplo, se conoce que para cualquier triángulo, la suma de la medida de dos de sus lados ha de ser mayor que la medida del tercero, ver que esto pasa para un triángulo cuyos lados sean 3,8cm; 2,3cm y 1,6cm. Según el ejemplo de Polya, particularizar es dar una propiedad de los números pares y comprobar dicha propiedad con algunos pares,

Inducción matemática o inducción completa

La inducción matemática es una demostración. Inducción e inducción matemática o inducción completa están frecuentemente relacionadas. Como ya indicamos anteriormente, Polya considera desafortunado el hecho de que las dos situaciones compartan la misma palabra *inducción*. La explicación a esta situación se da en términos de que las propiedades matemáticas descubiertas por un proceso de inducción se pueden demostrar por inducción completa. “La inducción matemática es un procedimiento útil, a menudo, para verificar conjeturas matemáticas, a las que hemos llegado por algún procedimiento inductivo” (1966, p. 159). Se situaría así la inducción matemática como el último grado o la fase final de una investigación inductiva. Esta última fase, con frecuencia, utiliza sugerencias que habían aparecido en fases precedentes.

Rivadulla (1991) distingue la inducción completa de la inducción por enumeración. Considera que la inducción completa se lleva a cabo cuando no son conocidos todos y cada uno de los datos de una clase dada. La inducción por enumeración es un tipo particular de inducción completa. Asegura que la inducción por enumeración es la que ha jugado el papel más importante en la historia y constituye la justificación de la metodología inductiva.

En el Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales se afirma que la inducción es un "método de demostración consistente en comprobar que una propiedad la cumple el primer elemento, o elemento mínimo, de un conjunto bien ordenado y que también la tiene un elemento del conjunto si la tienen todos los que le preceden: entonces tienen esa propiedad todos los elementos del conjunto". Esta acepción se refiere a lo que consideramos inducción matemática. Ferrater, que también incide en diferenciar inducción de inducción matemática, expresa la misma idea en unos términos más matemáticos. Este autor señala que la inducción matemática fue elaborada por Peano y por Poincaré como un principio, el principio de inducción matemática, y apoyada en otro principio, el principio de razonamiento por recurrencia. "Se trata de un modo de inferencia que afecta a todos los individuos de una clase, C –donde C puede ser la serie de números naturales-. El primer paso de la inferencia constituye el paso O, y en él se afirma que O tiene la propiedad P. Dado un número natural cualquiera, la inferencia permite afirmar que el sucesor de N tiene la propiedad P. Puesto que todo número natural tiene un sucesor, se concluye que todo número natural tiene la propiedad P" (p. 1677).

Desde el punto de vista matemático, la demostración por inducción matemática se basa en dos lemas y se presenta de la siguiente forma: sea una proposición P(n) en donde n indica que la proposición toma valores para un número infinito de casos, todos ellos ordenados. El primer lema indica que la proposición es verdad para el primero de dichos casos. Si n hace referencia al conjunto de los números naturales, el primer caso es cuando n=1. Este lema tiene una comprobación fácil. El segundo lema afirma que si la proposición es verdad para un elemento cualquiera de dichos casos, ha de ser verdad para el valor siguiente. En la situación de los números naturales que estamos considerando, si suponemos que la proposición es cierta para n, ha de ser cierta para n+1. Este lema requiere apoyarse en propiedades matemáticas que lleven a su comprobación. A veces hay que realizar un razonamiento deductivo basado en propiedades que no son evidentes. Polya considera que el razonamiento en la demostración por inducción matemática puede ser simplificado. Es suficiente saber dos cosas sobre la conjetura:

1. "Es cierta para n=1.
2. Siendo cierta para n, lo es igualmente para n+1" (Polya, 1966, p. 156).

La inducción matemática se considera una forma muy potente cuando se trata de demostrar propiedades en las que interviene el conjunto de los números naturales u otro de características similares. Esto se debe a que permite conocer el comportamiento de los infinitos elementos de dicho conjunto utilizando un "aparato" poco sofisticado en cuanto a los elementos implicados, si bien es cierto que se deben tener en cuenta dos observaciones. La primera es que la comprobación del segundo lema se puede dificultar. La segunda es que se deben cumplir una serie de condiciones para que una propiedad matemática se pueda demostrar por inducción completa:

- La propiedad a demostrar se ha de conocer de antemano de una forma precisa.
- La propiedad debe depender de un número entero.
- Debe estar explicitada de tal manera que permita verificar que permanece cierta cuando se pasa de un número entero n al siguiente n+1.

Justificación

Ferrater entiende el término justificación en dos sentidos. Por un lado considera la "serie de operaciones que se llevan a cabo para reconstruir lógicamente teorías científicas". Por otro lado considera que son los razonamientos que, obedeciendo leyes lógicas, se producen cuando se dan razones –las llamadas a menudo "buenas razones"– para demostrar que la norma o el imperativo moral son aceptables o plausibles.

El término justificación aparece cuando se quieren analizar otros términos como argumentación, demostración o prueba. Por ejemplo, en la entrada que el Diccionario de la Real Academia Española proporciona se dice que es "la prueba convincente de una cosa".

La convicción vuelve a aparecer en la noción de justificación según la concepción de Moliner, para quien justificar consiste en "encontrar qué cosa es la causa o el motivo de otra, o la explicación que hace que otra no sea o parezca extraña, inadecuada, inoportuna, censurable o culpable". En este mismo sentido, Marrades & Gutiérrez (2000) consideran que una justificación es cualquier razón dada para convencer a la gente (profesor a alumnos, estudiante a otros estudiantes, etc) de la verdad de una afirmación.

Una clasificación de la justificación la realizan Marrades & Gutiérrez (2000), quienes distinguen entre las justificaciones empíricas y las justificaciones deductivas. Las justificaciones empíricas usan los ejemplos como el principal (puede que el único) elemento de convicción. En las justificaciones deductivas la validación de las conjeturas se hace de un modo genérico y los ejemplos, cuando se usan, es para ayudar a organizar las argumentaciones.

Prueba

El Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales no considera ninguna entrada de prueba que sea de interés para nuestro trabajo de investigación. La que más se aproxima, la hace equivalente a un ensayo experimental de naturaleza física, química o biológica.

En el diccionario de María Moliner se considera probar como sinónimo de demostrar (p. 873) y, en una de las entradas que el Diccionario de la Real Academia Española se considera demostración equivalente a prueba (p. 679).

Balacheff (1999), sin embargo, distingue entre explicación, prueba y demostración. Sitúa la explicación al nivel del sujeto locutor, quien garantiza la validez de una proposición. En este sentido, explicación es equivalente al razonamiento considerado por Rivadulla (1991) o a la justificación de Duval (1999). El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posición no es definitiva y una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. No ocurre así con la demostración que, una vez realizada, es aceptada por todas las comunidades ante las que se presenta (Balacheff, 1999).

Debido precisamente a las diferencias en el lenguaje, en los trabajos en inglés consultados no hemos encontrado dos términos que sigan un paralelismo similar al que siguen demostración y la prueba en la mayoría de los trabajos consultados escritos en español. En la lengua inglesa existen los vocablos *proof* y *demonstration* y podrían ser los equivalentes a los términos prueba y demostración respectivamente. Sin embargo, en ninguno de los textos en inglés consultados aparece esa terminología. Hemos encontrado que usan adjetivos que añaden al término *proof* –que hemos traducido como demostración– para diferenciar o relacionar la prueba y la demostración. El rigor será la característica que permitirá diferenciar el significado que se le da a la demostración, a la prueba y a otros términos relacionados con éstos pero diferentes a ellos. Sobre esta cuestión incidiremos más adelante.

Razonamiento

Duval asegura (1999) que se nota la falta de una reflexión teórica sobre lo que es el razonamiento en los estudios psicológicos y didácticos que tratan, precisamente, del razonamiento. Indica que se supone, por lo general, que la lógica y la práctica de las matemáticas proporcionarán respuestas evidentes a esta pregunta. No vamos en este trabajo a entrar en dicha reflexión teórica, a pesar de que la consideramos importante y necesaria, pues hacerlo desbordaría nuestras posibilidades debido al margen de tiempo del que disponemos. Pero sí vamos a hacer un intento de aproximación a este término:

El Diccionario de la Real Academia Española define razonamiento como la "sección de conceptos encaminados a demostrar una cosa o a persuadir o mover a oyentes o lectores".

María Moliner considera que el razonamiento es la "serie de ideas encadenadas que conducen a una conclusión". Considera que razonar es "deducir unas ideas de otras para llegar a cierta conclusión, dar las razones o motivos de cierta cosa, justificar algo".

Aunque en las explicaciones de los diccionarios no se haga referencia a ello, el razonamiento está ligado al pensamiento humano. La habilidad de razonar se relaciona con el pensamiento, es propia de los seres humanos. Razonar es un don que se distribuye desigualmente entre las personas (Santamaría, 1995). Al razonamiento se le asignan procesos del pensamiento diferentes. Por una parte, los procesos que conllevan una inferencia explícita, que son aquellos en los que de una o varias proposiciones se infiere otra. Estos procesos están intrínsecamente ligados a un lenguaje. Por otra parte, los procesos inherentes a un acto de exploración. Estos últimos se efectúan con objeto de adaptar una situación nueva, se trata de problemas para cuya solución es suficiente una manipulación, bien de objetos o de instrumentos (Duval, 1999).

Ferrater da al término razonamiento dos sentidos, el sentido psicológico y el lógico. Desde el punto de vista psicológico, el razonamiento es estudiado en la teoría del pensamiento. Desde el punto de vista lógico, el razonamiento es un proceso formal. El razonamiento se aplica a toda clase de procesos formales y, por lo tanto, puede designar tanto las operaciones lógicas deductivas como las inductivas. En este sentido, se califica igualmente de razonamiento un proceso formal correcto como uno incorrecto.

Desde la psicología del pensamiento, el razonamiento se considera como una acción del pensamiento. Si entendemos la psicología del pensamiento como el estudio del proceso de inferencias, éste comprendería muchos aspectos del campo de la investigación psicológica como el razonamiento, el aprendizaje, la memoria, la comprensión, el lenguaje. Sin embargo, en una psicología cada vez más especializada, cuando se alude a los procesos de pensamiento se hace referencia generalmente a los procesos de inferencia en tareas de razonamiento deductivo e inductivo y al marco más global en el que se insertan estas inferencias como son la toma de decisiones y la resolución de problemas (González, p.40). Esta misma autora asegura que se suelen identificar como estudios sobre razonamiento, aquellos que se basan en tareas bien definidas dentro de un sistema de lógica formal. Mientras que tareas no definidas tan rígidamente, se utilizan en estudios de toma de decisiones y resolución de problemas.

Dewey (1989) considera que el razonamiento es el modo de encadenar conceptos, habla del pensamiento reflexivo y le asigna la función de "transformar una situación en la que se experimenta oscuridad, duda, conflicto o algún tipo de perturbación, en una situación clara, coherente, estable y armoniosa" (p. 98). Menciona cinco fases del pensamiento reflexivo que son: sugerencia, intelectualización, hipótesis, razonamiento y comprobación de hipótesis por la acción.

Lithner (2000) llama razonamiento a la forma de pensar adoptada para producir afirmaciones y alcanzar conclusiones. Basándose en la distinción que hace Polya entre razonamiento estricto y razonamiento plausible, Lithner tiene en cuenta dos tipos de razonamiento: el razonamiento plausible y el razonamiento basado en experiencias previas. Considera razonamiento plausible a toda argumentación que verifique las dos condiciones siguientes:

- "Se basa en propiedades matemáticas de las componentes involucradas en el razonamiento.
- Pretende dirigirse hacia lo que probablemente es verdad, sin que necesariamente sea completa o correcta" (p.166).

La demostración está incluida como caso particular del razonamiento plausible. Requiere un grado de certeza en ii).

Lithner define el razonamiento basado en experiencias previas como la argumentación que verifica dos condiciones:

- “Se basa en nociones y procedimientos de experiencias individuales previas.
- Pretende dirigirse hacia lo que probablemente es verdad, sin que necesariamente sea completa o correcta.

No se trata de aprender algo de memoria, si no de relacionar la elección de una estrategia y su implementación a algo familiar” (p. 167).

En el caso particular de que las tareas matemáticas propuestas sean no-rutinarias, este autor considera una estructura de cuatro pasos para describir el razonamiento que se sigue:

1. Encuentro de una situación problemática donde no es obvio cómo actuar.
2. Elección de estrategia. Aquí se usa la argumentación predictiva para tratar de predecir si la elección resolverá la dificultad.
3. Implementación de estrategia. Con la argumentación verificadora se comprueba si la estrategia resolvió el problema.
4. Conclusión. Se obtiene un resultado.

Tipos de razonamiento

La división clásica de razonamiento, seguramente heredada de la filosofía, es entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo (González, 1998; Santamaría 1995). El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas. En términos gráficos, es un proceso “hacia abajo”. El razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión que está, en mayor o menor grado, apoyada por unas premisas. En este caso, el proceso es “hacia arriba”. Sin embargo, hay otras clasificaciones expuestas por algunos autores. Simon (1996) defiende en un artículo la existencia de un tercer tipo de razonamiento añadido a la clasificación tradicional y lo llama razonamiento transformacional. Por razonamiento transformacional considera las promulgaciones mentales o físicas de una operación o conjunto de operaciones sobre un objeto o conjunto de objetos. Estas operaciones le permiten a uno prever las transformaciones que esos objetos sufren y el conjunto de resultados de esas operaciones. Lo central de este razonamiento es la habilidad de considerar el razonamiento, no como un estado estático, sino como un proceso dinámico por el que se genera un estado nuevo por estados continuos. Encontramos aquí cierta similitud con el trabajo de Pedemonte (2000), quien distingue tres tipos de argumentación: inductiva, deductiva y abductiva. Añade la argumentación abductiva a la tradicional división en argumentación inductiva y deductiva. Cualquiera de estos dos trabajos nos advierte de que no es posible hacer una clara distinción entre ambos tipos de argumentación o razonamiento, que los límites entre lo deductivo y lo inductivo no están claramente definidos cuando se analiza el trabajo de los estudiantes.

Duval (1999) habla de los razonamientos discursivos como aquellos que consideran que de una o varias proposiciones se deriva otra proposición y los que se vinculan más a las acciones. Distingue varios tipos de formas de razonamiento vinculadas intrínsecamente al lenguaje, ya sea éste natural o formal. Las formas de razonamiento que menciona son: el silogismo aristotélico, la deducción a partir de axiomas y definiciones, el razonamiento por reducción al absurdo, las inferencias semánticas y la argumentación. Si bien aclara que esta última se entiende como justificación o refutación en un debate. En todas ellas se trata de movilizar proposiciones. Hace notar que no incluye la inducción, ya que ésta se basa en experiencias con los objetos a los cuales hacen referencia las proposiciones. La observación de dichas experiencias proporcionan regularidades, constataciones perceptivas y anticipaciones. Duval, en el documento al que hacemos referencia, trabaja todos los tipos de razonamiento discursivos y deja de lado la inducción.

Razonamiento inductivo

No resulta fácil hablar de razonamiento inductivo sin que aparezca unido al razonamiento deductivo. Los dos son para muchos autores los únicos tipos de razonamiento, como hemos visto en el apartado anterior (Santamaría, 1995; González, 1998). Apoyándose en la filosofía clásica, la distinción entre razonamiento deductivo y razonamiento inductivo se hace teniendo en cuenta el tipo de conclusión que se alcanza. Si en la conclusión queda incluida la información que viene dada, la inferencia será deductiva y la conclusión tendrá valor de verdad. Si la conclusión va más allá de lo dado, la inferencia es inductiva y su conclusión será probable. Se sostiene que un razonamiento deductivo es válido sólo si es imposible que su conclusión sea falsa mientras que sus premisas sean verdaderas. Un razonamiento inductivo es fuerte solo si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas. Por tanto el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión.

En términos de la información que contienen las premisas y la conclusión de un resultado determinado la utilizan Díez & Moulines (1997). Estos autores afirman que el carácter de los argumentos deductivos es sólo explicativo. Sin embargo, los argumentos inductivos son aumentativos, esto es, la conclusión contiene más información que las premisas. Sólo se pretende que la verdad de las premisas haga "probable" la conclusión. La caracterización de la inducción como "paso de lo particular a lo general" expresa sólo que la conclusión contiene información nueva con respecto a las premisas.

No obstante, existen dudas con relación a una separación drástica de estos dos tipos de razonamiento mencionados. Así Duval (1999), desde un punto de vista que aúna lo psicológico y lo didáctico, apunta la posibilidad de que los dos tipos de razonamiento participen de procesos cognitivos comunes. Santamaría (1995) considera que, aún cuando pudieran establecerse fronteras filosóficas claras, desde el punto de vista funcional bien podría suceder que las manifestaciones etiquetadas como inductiva o deductiva respondieran a procesos subyacentes análogos. En este mismo sentido y desde la investigación en educación matemática, Ibáñes (2001) señala la imposibilidad práctica de separar los esquemas de trabajo inductivos y deductivos. Este autor muestra que, frecuentemente, se trata de diferenciar y separar claramente entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo y, tal y como algunos resultados indican, los esquemas inductivos y deductivos existen simultáneamente en muchos estudiantes.

Desde un punto de vista ligado a la educación matemática, con Polya (1967), el razonamiento inductivo aparece como un tipo de razonamiento en el que se parte de hechos particulares y se busca la generalidad de los hechos que acontecen. Señala los pasos a seguir en un proceso de razonamiento inductivo.

- Se observa alguna semejanza en los casos particulares.
- Se generaliza. Se establece una regla general esta es un juicio general claramente formulado pero que es meramente conjetural o tentativo, es sólo un intento de alcanzar la verdad.
- Se prueba la conjetura con nuevos ejemplos particulares.

Posterior a la comprobación con ejemplos de la conjetura, se busca un examen más justo de la misma y, si es oportuno, se procederá a la demostración de la conjetura. Neubert & Binko (1992) también proponen un esquema que se sigue en el razonamiento inductivo y que es similar al de Polya: observación, surgimiento de preguntas, desarrollo de generalizaciones y aplicaciones de éstas a nuevas situaciones para ver si se mantienen. Estos autores consideran el razonamiento inductivo como el razonamiento natural por el cual se llega al conocimiento científico. Distinguen entre el razonamiento inductivo en distintos contextos: razonamiento inductivo en matemáticas, razonamiento inductivo en ciencias y razonamiento inductivo en ciencias sociales. En matemáticas, el reconocimiento de patrones y su aplicación a conjuntos de números, símbolos o figuras es parte de la disciplina. Este fenómeno aparece en la habilidad para generalizar. Neubert & Binko indican que el razonamiento inductivo es el apropiado para los estudios sociales porque estos estudios son un caso particular de formas de centrarse en patrones de comportamientos y actitudes. Estos patrones se trasladan a conceptos y principios de disciplinas específicas como la historia, la geografía, la economía, la sociología, la antropología, la psicología, la política y campos relacionados.

Errores en el razonamiento

Los errores en el razonamiento se pueden clasificar en formales e informales. Los errores formales son aquellos en los que se viola alguna regla de inferencia. Los errores informales son aquellos que no dependen de las formas del argumento sino del contenido, se deben a un uso o a una interpretación inadecuada del contenido del argumento. Los sesgos pueden ser:

- Sesgo en la selección de información
- Sesgo de confirmación
- Sesgo de contenido y de contexto

(Evans, citado por González,1998)

El mismo autor citado indica que estos sesgos aparecen muy relacionados por lo que se hace muy difícil su identificación.

Recurrencia

El Diccionario de la Real Academia Española considera que la recurrencia es la “propiedad de aquellas secuencias en las que cualquier término se puede calcular conociendo los precedentes”.

El modelo fundamental de la recurrencia consiste en una secuencia totalmente ordenada, (S_1,S_2,S_3,S_4...S_k...) en la que es posible conocer cada uno de los términos de dicha secuencia en función de los anteriores. Para esto son necesarias dos cosas. Una, el primer término de la secuencia debe ser conocido. Otra, debe haber una cierta relación genérica que ligue cualquier término con los términos precedentes. Se pueden entonces obtener los términos uno después del otro, sucesivamente, por recurrencia (Polya, 1967).

Relación entre distintos términos

Como se puede observar, hay distintas acepciones para los términos analizados hasta el momento. A su vez, hay similitudes y diferencias entre ellos y en el uso que le han dado los autores en sus trabajos. Resulta complicado hablar sobre uno de los términos sin hacer referencia a uno o varios de los otros. Hay autores que consideran similares e incluso equivalentes algunos de los términos que hemos tratado.

En cuanto a las clasificaciones de algunos de los términos, hemos encontrado dos grandes grupos de investigadores que usan el rigor para proponerlas, usando y combinando algunos de ellos. Hemos organizado los significados dados a los distintos términos encontrados en los trabajos de diferentes autores. Los recogemos en la tabla que se muestra a continuación. Todos los autores que aparecen en la tabla basan sus trabajos en criterios similares para hacer sus particulares clasificaciones en términos de rigor. El análisis del significado que cada autor da a los distintos términos y las relaciones que entre ellos establecen, nos va a ayudar a tomar una decisión sobre los significados que vamos a adoptar en nuestro caso.

<table>
<tr><td rowspan="5">-
R
I
G
O
R
+</td><td colspan="4">DOS NIVELES</td><td colspan="4">TRES NIVELES</td></tr>
<tr><td>Jaffe & Quinn</td><td>Movshovitz-Hadar</td><td>Martínez</td><td>Gutiérrez</td><td>VanDormolen</td><td>Blum & Kirsch</td><td>VanAsch</td><td>Balacheff</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Argument. heurística</td><td rowspan="2">Dem. Informal</td><td rowspan="2">Argument. informal</td><td rowspan="2">Dem. Empírica</td><td>Level 0</td><td>Dem.</td><td>Dem. con dibujos o ejemplos</td><td>Explicación</td></tr>
<tr><td>Level 1</td><td>Dem. Pre-formal</td><td>Dem. Pre-formal</td><td>Prueba</td></tr>
<tr><td>Dem. Fomal</td><td>Dem. Formal</td><td>Argument. Matemática</td><td>Dem. Deductiva</td><td>Level 2</td><td>Dem. Formal</td><td>Dem. Formal</td><td>Dem.</td></tr>
</table>

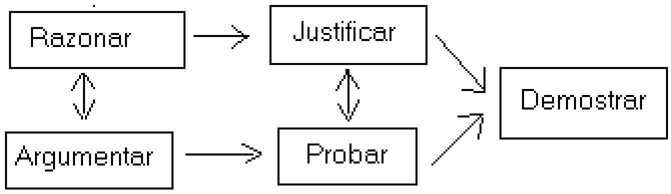
(Cañadas, Castro & Gómez, 2002)

Como ya hemos dicho, estas clasificaciones han utilizado el rigor como criterio. Después de las lecturas realizadas para la elaboración del marco teórico, hemos llegado a la conclusión de que habría sido equivalente haber hecho estas clasificaciones basándonos en el modo de razonamiento empleado. La relación la hemos establecido al considerar que cuanto más rigurosa es una justificación, más razonamiento deductivo involucra; y cuanto menos rigurosa, más razonamiento inductivo se emplea. En términos matemáticos, se podría decir que el rigor guarda una relación directa con el razonamiento deductivo e inversa con razonamiento inductivo. El análisis de la tabla muestra que se considera la demostración como un caso particular de razonamiento deductivo.

Algunos autores consideran que estar en un nivel facilita el paso al nivel siguiente. Sin embargo, otros autores consideran que la metodología a emplear en la enseñanza ha de ser distinta y, por tanto, el aprendizaje de una forma de razonamiento no va a favorecer el aprendizaje de otra forma que se encuentre en un nivel superior. En este sentido, Balacheff (1999) se cuestiona la existencia de un posible eslabón entre la argumentación y la prueba desde el análisis del discurso. Y Duval (1999) apunta que la argumentación no ayuda a llegar al aprendizaje de la demostración y defiende que la demostración requiere un aprendizaje específico e independiente.

Hasta aquí hemos recogido algunos puntos de vista y los significados de los términos que vamos a utilizar en nuestra investigación. Hemos visto que algunos de ellos son equivalentes porque se utilizan para hacer referencia a las mismas situaciones. Es necesaria una anotación final sobre la postura en la que nos vamos a situar y la relación que vamos a tener en cuenta entre algunos de esos términos.

Vamos a considerar equivalentes en su significado los verbos *argumentar* y *razonar*, en ambos casos se trata de dar razones que expliquen un hecho. Así mismo, *argumento* y *razonamiento* harán referencia a las acciones indicadas por los verbos anteriores. En este trabajo se empleará, en la mayoría de los casos, razonamiento. También *justificar* y *probar* los vamos a tomar como equivalentes. Consideramos que comparten la misma situación anterior de dar razones para explicar un hecho, pero además añadimos que se hace con intención de convencer a otra persona de lo que uno cree, mediante la utilización de dichas razones. De estos dos términos vamos a emplear *justificar* en casi todas las ocasiones. Por *demostración* entenderemos una justificación que satisfaga los requisitos exigidos por la comunidad de matemáticos profesionales, de tal forma que dé a tal justificación carácter general. Hemos querido establecer una escala entre tres de estos términos: razonar, justificar y demostrar; o sus equivalentes, argumentar, probar y demostrar. La idea es que, al avanzar en dicha escala, las exigencias sean cada vez mayores. El esquema siguiente muestra las ideas expuestas en este párrafo.



II.3.3 Estado de la cuestión a investigar

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados sobre el razonamiento y, en particular sobre el razonamiento inductivo, lo relacionan con la demostración. Hay trabajos sobre demostración que se realizan desde una aproximación psicológica al tema y se centran en los procesos de razonamiento y comprensión. Otros trabajos están dirigidos al estudio teórico del razonamiento inductivo. Aunque ésta es una distinción un tanto difusa, dado que hay trabajos que comparten los dos enfoques, nos fijaremos en el enfoque al que den mayor importancia.

Los trabajos que consideramos que tienen más carga teórica son los que mencionamos a continuación. DeVilliers (1993) trabaja para delimitar el papel y la función de la demostración en matemáticas. Tradicionalmente, la función de la demostración se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación de enunciados matemáticos. En el artículo se critica duramente esta posición por ser completamente parcial y, en su lugar, propone un modelo que distingue entre cinco funciones de la demostración en matemáticas.

Los trabajos de Hanna (1989; 2000) también están en este grupo. Ella llega a la conclusión de que una de las principales funciones de la demostración refleja una de las principales funciones de las matemáticas en sí mismas: el fomento de la comprensión.

El papel de la demostración y otras características como el rigor o el modo de razonamiento están fuertemente vinculados. Se ha observado que cuanto mayor razonamiento inductivo involucra una justificación, menos rigurosa es considerada; y cuanto más razonamiento deductivo involucra, más rigurosa y formal es considerada (Cañadas, Castro & Gómez, 2002). Así, los modos de razonamiento permitieron comprender, diferenciar y relacionar términos como la demostración, la argumentación, la prueba, la explicación o el razonamiento. En este apartado consideramos los trabajos de VanDormolen (1977), Blum & Kirsch (1991), VanAsch (1993), Jaffe & Quinn (1993), Movshovitz-Hadar (1996), Martínez (2000), Balacheff (2000) y Gutiérrez (2002).

Neubert, G. A. & Binko, J. B. (1992) ofrecen una visión general del razonamiento inductivo y de su diferencia con el deductivo. Tratan de la aplicación del razonamiento inductivo a las matemáticas, las ciencias y los estudios sociales. Además, hacen una reflexión sobre la importancia del razonamiento inductivo en Educación Secundaria.

En la posible comparación y en el interés por establecer ventajas y desventajas del empleo del razonamiento inductivo con los estudiantes, están los trabajos de Neubert & Binko (1992) y de Fernández (1998).

En la clasificación de tipos de razonamiento diferente a la tradicional, que distingue entre razonamiento inductivo y deductivo, Simon (1996) considera el razonamiento transformacional; y Pedemonte (2000) considera la argumentación abductiva entre las argumentaciones inductiva y deductiva.

Los siguientes trabajos los situamos en la otra clase por considerar que atienden más a los procesos de razonamiento. El razonamiento llevado a cabo por los estudiantes ha sido investigado en distintos niveles educativos. Así, el trabajo de Avital & Hansen (1976) trata de una inducción empírica desde el punto de vista que la usan las ciencias empíricas y las matemáticas. La idea general es mostrar algunos ejemplos de ejercicios que se pueden trabajar en el aula, animando a que no se use la inducción sólo para entender un concepto. Animan a que se utilice también para que los alumnos sepan cómo se han ido creando las matemáticas, en lugar de decir directamente que prueben o que demuestren algo.

Hay un grupo de investigaciones que se centran en el razonamiento o la justificación desde la concepción que los estudiantes tienen de las explicaciones o las pruebas que presentan. En este apartado mencionamos los trabajos de Goetting (1995) y de Zack (1997).

Maher, C. & Martino, A. (1996) presentan un estudio de una alumna de 5 años en el proceso en el que aprendió a hacer pruebas desde un posicionamiento que trataba de desarrollar sus propias ideas. Siguiendo un esquema similar a los autores anteriores, Maher, Steencken & Deming (1996) analizan los argumentos por casos y los argumentos inductivos llevados a cabo por estudiantes de 10 años en la resolución de una actividad que se les propone.

Jones (1996) concluye después del trabajo realizado que, para desarrollar las habilidades de los niños en esta área, la demostración debe ser parte de los procesos de pensamiento y razonamiento. Jones afirma que los niños no pueden adquirir las habilidades de razonamiento de repente, sino que necesitan un período de tiempo y deben hacerlo desde un contexto en el que ellos se sientan cómodos.

Dreyfus (1999) se pregunta por qué los estudiantes son incapaces de dar una explicación decente a pesar de que entienden la pregunta y su respuesta (o el problema y la solución). Se centra en las respuestas dadas por algunos estudiantes de distintos niveles educativos y analiza diversos factores que influyen en el proceso de resolución. Estos factores son la adecuación lingüística, la adecuación matemática y la adecuación lógica.

Miyazaki (2000), trabaja sobre el razonamiento de los estudiantes de matemáticas en niveles inferiores a Secundaria. Este autor establece niveles en el recorrido que un alumno hace desde que es capaz de realizar una prueba inductiva hasta que hace una demostración algebraica.

Marrades & Gutiérrez (2000) modifican algunas clasificaciones ya existentes, reformulan una clasificación propia que utilizan para estudiar las respuestas de los estudiantes, evaluar la mejora en las habilidades de justificación de los mismos y observar la posible influencia de peculiaridades de un entorno en el aprendizaje de los estudiantes.

DeGroot (2001) trabaja con estudiantes de Secundaria y analiza las respuestas que dan a varias actividades. Analiza el proceso por el que los estudiantes pasan de la mera descripción de lo que observan a una prueba o una demostración. Además relaciona este proceso con el desarrollo del lenguaje, la habilidad para pensar metafóricamente y el uso de recursos instruccionales.

Lithner (2000) plantea tareas matemáticas que conduzcan a situaciones a las que no están acostumbrados los alumnos de primer curso de universidad con los que trabaja. Pretende analizar el papel que juegan el razonamiento plausible y el razonamiento basado en experiencias previas y la relación existente entre ambos. Presenta los trabajos de los estudiantes en tres apartados: descripción, interpretación y análisis.

Ibañes & Ortega (2001) parten de la diferenciación entre el razonamiento inductivo y el deductivo y presentan un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de Bachillerato. Partiendo del concepto de esquema de prueba de Harel y Sowder, se han investigado los aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática. En este trabajo se presenta un estudio sobre los esquemas de prueba de los alumnos de primer curso de Bachillerato.

Los esquemas de prueba de Harel y Sowder vuelven a ser usados por Flores (2002) para explicar y clasificar las respuestas dadas por los estudiantes que entrevistan. Este autor resalta la idea de que un mismo estudiante pudiera presentar distintos esquemas de prueba en diferentes contextos.

Nasser & Tinoco (2002) presentan un proyecto en el que uno de los objetivos es identificar los tipos de justificación que dan los estudiantes a partir de los 11 años.

Miyakawa (2002) defiende que, aparte de la influencia de los conocimientos algebraicos, hay otros factores que influyen en la forma en que los estudiantes hacen demostraciones. En su investigación señala el papel que juega la concepción de los estudiantes de la noción matemática en la construcción y aprendizaje de la demostración.

La conclusión a la que llegamos, después de hacer esta revisión de las investigaciones halladas en educación matemática relacionadas con el tema, es que en ninguna de ellas se ha estudiado el razonamiento inductivo que realizan alumnos de Secundaria cuando se enfrentan a tareas no rutinarias. Los dos trabajos más próximos encontrados son los de Nasser & Tinoco (2002) y Miyakawa (2002). Ambas investigaciones utilizan una de las tareas que hemos tomado para proponer a los sujetos de nuestro estudio, la tarea referente al resultado que se obtiene al sumar dos números pares. Sin embargo, el interés de estos dos trabajos mencionados está en la demostración. Por ello, el tipo de instrumento y la consigna son distintos a los nuestros. En cuanto al instrumento, en ambos casos se trata de un test o prueba. La consigna dada también es diferente porque se les pide a los alumnos que demuestren. Recordamos que nuestro interés está en estudiar el proceso de razonamiento inductivo en sí. En el siguiente capítulo explicitaremos el instrumento, la consigna y otros aspectos relacionados con la metodología de este trabajo.

Capítulo III. Metodología

III.1 Diseño de la investigación

Nuestro trabajo es de tipo exploratorio. Es un estudio piloto que nos va a permitir tomar decisiones sobre la continuación y ampliación en un estudio posterior.

Recordamos, lo que ya en el capítulo I ha quedado indicado: nuestro propósito es estudiar el razonamiento inductivo en alumnos de Educación Secundaria. Para ello creemos que lo adecuado es analizar el trabajo llevado a cabo por los sujetos elegidos para tal fin de una actividad propuesta acorde con el tema de investigación.

La investigación se ha realizado del siguiente modo: una vez decidido el tema del trabajo, se consideró que los datos que nos podían ofrecer información fiable debían ser de tipo cualitativo y debían ser recogidos sobre la marcha del trabajo de los alumnos. Se eligió el nivel de los sujetos con los que trabajar. Se prepararon la tareas, dos tareas completamente distintas para que no hubiera aprendizaje de los sujetos de una para la otra. Se hizo un cálculo aproximado del tiempo que podían tardar en realizarlas, teniendo en cuenta que no se cansaran con la realización de las mismas. Se hicieron unas pruebas previas con tres sujetos distintos de los que posteriormente fueron los definitivos. Posteriormente se cambiaron aquellos aspectos de las entrevistas que se consideraron necesarios después de la prueba y se realizaron las entrevistas definitivas.

A continuación ampliamos esta información, dedicando un apartado a cada uno de los aspectos que consideramos más relevantes.

III.2 Recogida de información. La entrevista

Consideramos que la entrevista semiestructurada es la forma más oportuna de acercarnos al razonamiento de los estudiantes porque nos permite recoger la información necesaria en este caso. Así, usamos la entrevista de investigación como método de recogida de información para este trabajo, definida en Cohen y Manion (1990) como "un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado por los objetivos de investigación de descripción, de predicción o de explicación sistemática" (p.378). Se trata de un método que comprende la reunión de datos a través de una interacción oral directa entre individuos. De los distintos tipos de entrevista que se consideran, dependiendo del papel que juegan el entrevistado y el entrevistador, elegimos entrevista semiestructurada. En nuestro caso, la entrevistadora tenía preparadas las preguntas pero tenía libertad para modificarlas durante el desarrollo de la actividad. A los entrevistados se les plantea una situación abierta y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta. La única limitación son las preguntas que la entrevistadora va haciendo y que les van a servir de guía a los entrevistados. No hay otras limitaciones sobre el contenido o el modo de respuesta del entrevistado más que la de la materia de la pregunta o cuestión, que viene determinada por la naturaleza del problema. En términos de Cohen y Manion, se trata de una entrevista semiestructurada y dirigida, en la que el entrevistador puede, cuando sea conveniente, representar un papel más activo, introducir indicaciones orales más explícitas al patrón de estímulos. Esas cuestiones "suministran un marco de referencia para las contestaciones de los informantes, y ponen un mínimo de restricción sobre las contestaciones y su expresión" (p. 384).

Una vez elegidas las tareas que se les iban a proponer a los alumnos y preparada la entrevista, con el fin de ver si la misma presentaba fallos o carencias, se hizo un ensayo con tres sujetos distintos de los que posteriormente constituyeron la colección de sujetos que nos proporcionó los datos para el análisis. Dicho ensayo nos permitió: comprobar que la tareas elegidas podían ser válidas para dar respuesta a nuestros interrogantes de investigación, precisar los términos empleados por la entrevistadora en sus diálogos con los entrevistados, tomar decisiones sobre el tiempo dedicado a la entrevista y determinar las herramientas a utilizar en la recogida de los datos.

Las entrevistas del ensayo se hicieron a tres personas de características diferentes. Se hizo así con la intención de obtener una variedad de respuestas y reacciones que nos permitiera detectar distintas formas de actuación de los sujetos y nos diera una visión más amplia para las entrevistas posteriores. Contamos con la colaboración de un estudiante de segundo curso de Biología y de dos estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática. De estos dos últimos, uno de ellos tenía alguna experiencia docente impartiendo clases particulares y el otro ha sido profesor de una universidad colombiana durante algunos años.

III.3 Los sujetos

Como nuestra idea inicial era el estudio del razonamiento matemático inductivo, la elección de los sujetos con los que realizar la parte empírica del trabajo se podía hacer en distintos niveles educativos, siempre que las tareas elegidas fuesen apropiadas. Después de una revisión de los diseños curriculares nos decantamos por tomar sujetos de Secundaria. Los motivos de esta elección fueron varios: por un lado, nos parecía adecuada la etapa evolutiva en la que se encuentran los alumnos cuando cursan la Educación Secundaria Obligatoria ya que "se producen importantes cambios intelectuales. A partir de los doce años se adquiere un tipo de pensamiento de carácter abstracto, que trabaja con operaciones lógico-formales. El pensamiento formal significa capacidad de razonamiento sobre posibilidades, de formulación y comprobación sistemática de hipótesis, de argumentación, reflexión, análisis y exploración sistemática de las variables pertinentes que intervienen en los fenómenos. Este tipo de pensamiento puede estar plenamente consolidado a los dieciséis años, aunque muchos jóvenes no lleguen a adquirirlo hasta algo más tarde... Al final de esta etapa los alumnos normalmente se hallarán ya con suficiente dominio de las operaciones del pensamiento abstracto como para comprender los elementos básicos del método científico: la formulación de hipótesis, la observación controlada y la experimentación, la comprobación de las hipótesis, la elaboración de explicaciones y de teorías más o menos estructuradas" (MEC, pp. 72-74). Por otro lado, cuando se dan criterios con los que seleccionar contenidos de matemáticas para la Educación Secundaria, nos aconsejan que deben reforzarse el uso del razonamiento empírico-inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo, tanto en lo que concierne a la adquisición de conceptos y procedimientos como a sus aplicaciones en un contexto de resolución de problemas. Tomamos la decisión de buscar sujetos ubicados en los últimos cursos de Secundaria (3º y 4º) y los dos cursos de Bachillerato.

Los sujetos elegidos fueron doce estudiantes: tres de 3º y tres de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, y tres de 1º y tres de 2º de Bachillerato. Todos son alumnos de un centro público de Granada (I.E.S. Padre Manjón de Granada).

De cada uno de los cursos, elegimos para entrevistar a tres alumnos atendiendo a dos características: las calificaciones y el género. En cuanto a las calificaciones, escogimos un estudiante con resultados académicos bajos, otro con resultados académicos medios y otro con resultados académicos altos. Pertenecían a los dos géneros: se entrevistaron a 6 chicos y a 6 chicas. Los dos profesores del centro a los que nos dirigimos, que se prestaron cordialmente a colaborar en aquellos aspectos que fueran necesarios, fueron quienes eligieron a los alumnos, siguiendo las indicaciones que les propusimos. El grupo elegido de 12 alumnos fue, por tanto, intencional. Con las características de este grupo hemos tratado de conseguir gran variedad en los datos.

III.4 El centro

Las características del centro son las que resumimos a continuación: el instituto de Educación Secundaria Padre Manjón de Granada está ubicado en una zona céntrica de la ciudad (en el Polígono Universitario Fuentenueva). En dicho centro, se imparten los niveles correspondientes a Educación Secundaria Obligatoria (1º, 2º, 3º y 4º), Bachillerato (1º y 2º), Formación Profesional de Segundo Grado (Gestión Administrativa) y Bachillerato de Adultos; además de un curso de Garantía Social. Hay 83 profesores que dan clase en los horarios diurno y nocturno. El equipo formado por los miembros del Seminario de Matemáticas (9 profesores) es estable desde hace trece años y ha mantenido una importante colaboración en el diseño de programaciones y materiales curriculares propios. Los profesores del Departamento de Matemáticas colaboran con profesores de otros departamentos –como son los de Historia y Geografía o Ciencias Naturales– y organizan excursiones con el fin de que los alumnos aprendan, identifiquen y relacionen conceptos de una o varias materias.

Las familias a las que pertenecen los estudiantes son de un nivel socioeconómico y cultural medio-alto o alto. El 66.2% de los padres y un 56.5% de las madres de los alumnos poseen estudios universitarios. El alumnado, en términos generales, goza de buena situación económica, de un contexto familiar culto, de material educativo abundante y tiene expectativas de continuar hacia niveles educativos superiores (IES Padre Manjón, 2000).

III.5 Los profesores de los alumnos participantes

Los dos profesores de los alumnos a los que realizamos las entrevistas llevan más de veinte años ejerciendo esta profesión. La entrevistadora les contó la finalidad de las entrevistas que iba a realizar, sin dar detalles del contenido y les pidió su colaboración. Los profesores estuvieron de acuerdo y acompañaron a la entrevistadora a las aulas de las que se iban a obtener los sujetos participantes. Los profesores hicieron una breve presentación de la actividad que se iba a llevar a cabo con algunos de los componentes de los grupos y presentaron a la entrevistadora como compañera de profesión y antigua alumna del centro. La entrevistadora se dirigió entonces a la clase y amplió la información que los profesores les habían proporcionado, haciendo hincapié en que el trabajo no iba a tener repercusión en su actividad académica. Se les dijo a los alumnos que se les iban a proponer unas actividades en las que lo importante no iba a ser el resultado final sino el proceso. La finalidad de este modo de actuar fue tratar en todo momento que los alumnos estuvieran motivados y se animaran a participar.

Los profesores solicitaron voluntarios para participar en nuestro trabajo de investigación y, teniendo en cuenta las características que perseguíamos para los sujetos participantes, eligieron a aquellos que iban a ser entrevistados.

Durante el período en el que la entrevistadora estuvo trabajando en el centro, tuvo la oportunidad de mantener varias conversaciones con los profesores colaboradores. Ambos profesores coinciden en comentar que los alumnos cada vez prestan menos atención a las actividades matemáticas, que tratan de evitar todas aquellas tareas que requieren ejercitar la mente, prefiriendo aquellas otras en las que la mayor parte del trabajo se les da hecho.

Uno de los profesores comentó que el razonamiento que se trabaja en clase, acorde con lo que la LOGSE determina, es el razonamiento deductivo. Este profesor, trata de que sus alumnos expliquen todo lo que van haciendo, los pasos que dan en sus razonamientos, enlazándolos hasta que llegan a la solución final de una actividad. Esta metodología la sigue tanto durante sus clases, donde sus alumnos participan, como en los exámenes escritos, donde les hace expresar en el papel todos sus razonamientos.

El otro profesor nos comentó que sus alumnos no están acostumbrados a ese tipo de razonamiento. Recuerda que hace bastantes años, se llegaba a hacer hasta la inducción completa en esos niveles pero que ahora no. De hecho, cree que lo acertado sería que los alumnos, en la actualidad, llegaran también a la inducción matemática y que así presentarían menos dificultades en la comprensión de razonamientos y conceptos abstractos.

III.6 Las tareas

En la elección de tareas para proponer a los estudiantes, tuvimos en cuenta las ideas de Polya sobre inducción y el Diseño Curricular Base. Por una parte, había que considerar los escritos de este autor ya que han sido de los que más han influido en la realización de este trabajo. Según Polya (1966) fue Euler, el maestro de la investigación matemática utilizando el método de inducción, quien “se tomó la molestia de presentar la evidencia cuidadosamente en detalle y con buen orden” (p.133). Polya presenta ejemplos de teoremas descubiertos por Euler, utilizando el método inductivo en el que se ve el proceso seguido y se pone de manifiesto el ingenio del autor, así como la belleza del procedimiento. En la mayoría de los casos presentados, son propiedades relacionadas con la Teoría de Números y, en muchas ocasiones, no las demostró. Recoge Polya en el capítulo de su obra dedicado a la inducción, una cita de Gauss que reproducimos a continuación: *En la teoría de los números sucede con bastante frecuencia que las verdades más bellas brotan por inducción*. De la cita de Gauss y del trabajo de Euler obtenemos como consecuencia que la teoría de números posee unas características especiales que hace que sus propiedades, teoremas y problemas sean idóneos para ser descubiertos por inducción. El hecho de que en todo proceso inductivo, al examinar casos particulares de un teorema o propiedad, se llega a la comprensión del mismo y se toma conciencia de su significado, conlleva a su vez a adquirir una evidencia fuerte de la veracidad de los mismos que se irá afianzando a medida que se verifican más casos particulares. Este hecho unido a dificultades materiales, como pueden ser la ausencia de herramientas con las que hacer cálculos de forma rápida, puede dar una explicación del porqué muchas de estas propiedades se dejaron sin demostrar. Casi todas han sido demostradas posteriormente.

Entre los contenidos que señala Polya para trabajar adecuadamente mediante un proceso inductivo, encontramos la teoría de números con tareas sobre divisibilidad, los desarrollos de series, las aproximaciones y los límites. La constante en todos ellos es hacer tabulaciones de los resultados para tenerlos ordenados y ver las regularidades que presentan, encontrar la regla que da sentido a dicha regularidad, hacer una conjetura y probar con más casos particulares.

Por otra parte, el Diseño Curricular Base se refiere a la consideración de las características generales. Entre ellas se encuentran la importancia del lenguaje en el desarrollo del razonamiento y el uso de los distintos tipos de representación en la adquisición de conceptos y el desarrollo del pensamiento formal. "El conocimiento y manejo de la realidad a través del pensamiento abstracto requiere diferentes modos y códigos de representación, entre los cuales sobresale el lenguaje. El lenguaje desempeña un papel crucial como instrumento regulador del pensamiento. Gracias principalmente al lenguaje, somos capaces de recordar, argumentar, planificar, procesar información, recorrer alternativamente hipótesis contrapuestas, etc. El lenguaje, por otro lado, no es la única forma de representación. El dominio de diferentes códigos de representación en niveles progresivamente más formales permite su uso más flexible y acorde con los objetivos educativos que se pretende conseguir en cada caso. La utilización de esos códigos, y no sólo del lenguaje, contribuye al propio desarrollo del pensamiento formal. Es una etapa educativa, por tanto, en la que hace falta trabajar modos de representación como esquemas, dibujos, fórmulas, que sirven para ilustrar relaciones, destacar nexos esenciales entre elementos y expresar leyes o regularidades conocidas" (p. 73). En esta etapa se pone énfasis en la comprensión y en el uso de diferentes lenguajes matemáticos y del vocabulario y simbología específicos de cada uno, tanto en la expresión escrita como en la oral, cuando ello sea pertinente. También incluye las habilidades referentes a la traducción entre unos y otros lenguajes (representación gráfica y su expresión algebraica...), cuando ello facilite la comprensión o el desarrollo de una actividad.

Estas reflexiones nos guiaron en la elección de las dos tareas que planteamos y proponemos a los sujetos que realicen durante la entrevista. Hemos considerado, de este modo, la entrevista como una situación de resolución de problemas por parte de los estudiantes de Enseñanza Secundaria en presencia de la entrevistadora. La entrevistadora no ha sido un sujeto pasivo en la actividad, sino que interviene y explica cuando los estudiantes no entienden y dialoga con los mismos siempre que cree posible que pueden continuar y avanzar más en el proceso de razonamiento que van siguiendo. Las dos tareas elegidas son las siguientes:

1ª Tarea
Ver que la suma de dos números pares siempre es un número par.

2ª Tarea
Determinar el mayor número de regiones en las que queda dividido el plano cuando se consideran en el mismo un número dado de rectas.

La primera de las tareas está relacionada con la divisibilidad. La segunda tiene que ver con el desarrollo de una secuencia ordenada y, por tanto, está relacionada con la recurrencia. En las dos tareas se han considerados las características generales que mencionamos a continuación. Unas características son comunes:

- Hacer referencia a cuestiones matemáticas
- Involucrar razonamiento inductivo.

Y otras diferentes:

- Conceptos matemáticos implicados .
- Grado de "dificultad".

Para que la presentación de las tareas fuese más fácil de comprender por los alumnos, se les plantearon de la siguiente forma:

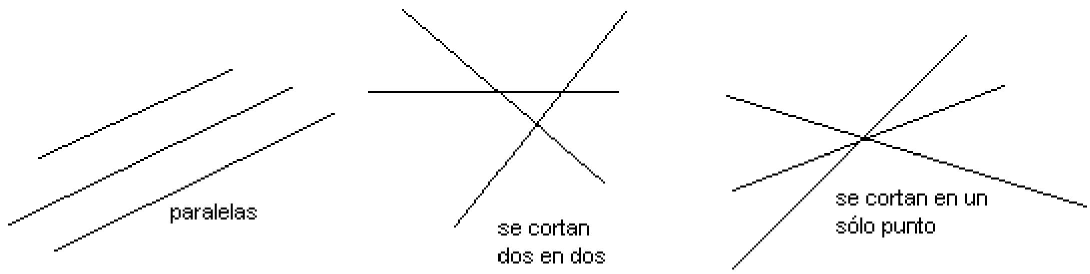
1ª Tarea: Ver qué resultado da la suma de dos números pares.

2ª Tarea: Determinar el mayor número de regiones que se obtienen al trazar rectas sobre un plano.

La tarea 1ª se refiere a una propiedad conocida y usada por los alumnos. Suponemos que no se les ha hecho reflexionar sobre su generalización durante su vida académica. Es una propiedad de divisibilidad relacionada con los múltiplos de dos. Si designamos por 2N todos los múltiplos de 2, donde N representa el conjunto de los números naturales y se considera la misma operación de suma que en los números naturales, la propiedad implícita en la tarea indica que la suma es una operación cerrada en el conjunto 2N. Una demostración de este hecho se puede efectuar tomando dos elementos cualesquiera de 2N, por ejemplo 2a y 2b. Sumando dichos elementos se obtiene $2a+2b=2(a+b)$ este resultado también está dentro del conjunto 2N, por tanto es un número par, lo que se asegura que la operación es cerrada.

Queremos detenernos en este punto para hacer algunas aclaraciones con relación a esta tarea y la forma de plantearla. Si la tarea se propone para que se demuestre, es decir, si se enuncia de la forma "demuestra que la suma de dos números pares es un número par", no estaríamos ante una situación válida para el estudio del razonamiento inductivo, ya que el procedimiento para hacer dicha demostración es un razonamiento como el realizado en el párrafo anterior. Planteamos la tarea de forma que nos permita indagar primero si conocen la propiedad. Partiendo de que la conocen, se intenta que el sujeto dé una justificación de la propiedad que convenza, tanto a ellos mismos, como a la entrevistadora. Dicha justificación no tiene por qué coincidir con la demostración anterior. En el intento de justificación esperamos que aparezca el razonamiento inductivo.

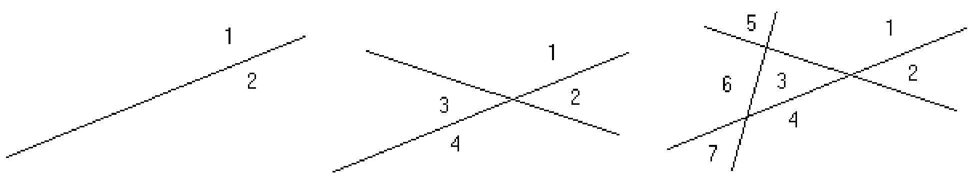
La tarea 2ª no es una tarea habitual ni tiene que ver con el trabajo habitual en el aula, salvo en los casos en que se trabajen las sucesiones. Interviene la geometría por el hecho de involucrar conceptos como los de región, plano, rectas o posiciones de las rectas en el plano (que pueden ser paralelas o cortarse). En el caso de que las rectas se corten, pueden hacerlo en un mismo punto o en puntos distintos. En su realización es conveniente hacer representaciones gráficas como ayuda, pues se ve mejor lo que ocurre. Veamos el ejemplo para tres rectas:



En este ejemplo se observa que el mayor número de regiones se obtiene cuando las rectas se cortan dos a dos.

Resolver este problema requiere una estrategia en la que se siga cierta sistematicidad. Se debe empezar viendo cuántas regiones se obtienen si se toma una sola recta, cuántas si se toman dos, cuántas si se toman tres, etc. La estrategia conveniente consiste en ir añadiendo rectas de una en una y ver cómo aumentan las regiones en función del número de rectas que se trace. Siguiendo esta estrategia, se observa gráficamente que el mayor número de regiones se obtiene cuando las rectas no pasan todas por un mismo punto. Ordenar los datos en una tabla ayuda a ver la relación entre ellos y si es posible generalizar dicha relación.

Presentamos un acercamiento a lo que puede ser el proceso de desarrollo de la tarea con una estrategia adecuada:



primer paso: 1 recta
2 regiones

segundo paso: 2 rectas
4 regiones

tercer paso: 3 rectas
7 regiones

Ordenando los datos obtenidos al trazar 1, 2, 3 y 4 rectas en una tabla, quedaría:

Nº de rectas	Nº de regiones
1	2
2	4
3	7
4	11

Se puede apreciar que el número de rectas aumenta de uno en uno y el de regiones sumando el número de rectas trazado con el número de regiones obtenido en el caso anterior. Esta sería la ley que rige la recurrencia. Para la sucesión 2, 4, 7, 11, 16, se puede encontrar el término general $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ por varios procedimientos y demostrar por inducción completa que la igualdad 1+1+2+3+4+5....+n = $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ es cierta para todo valor de n, siendo n un número natural.

La tarea es larga y compleja pero permite analizar hasta dónde y cómo avanzan los sujetos en sus razonamientos.

Finalmente mencionar que, en un principio, consideramos una tercera tarea que es equivalente a la segunda en cuanto a su resolución pero cuyo enunciado nos parecía más próximo a los sujetos con los que estábamos trabajando. La tarea 3 a la que hacemos referencia perseguía que se calculara el número de apretones de manos que da una persona que llega a una reunión de amigos. En la realización de las entrevistas fue propuesta a un solo sujeto –que no avanzaba en la segunda tarea– y se comprobó que no había diferencias significativas entre estas dos tareas. Por ello, se decidió seguir el trabajo sólo con las dos primeras tareas.

III.7 Las entrevistas

III.7.1 Preparación de las entrevistas

Una vez tomada la decisión de qué tareas se iban a proponer a los sujetos, se elaboró la entrevista inicial con intención de hacer una prueba y ver cuál era su funcionamiento. A partir del análisis de la información recogida en la prueba con las tres entrevistas preparatorias, se realizaron las correcciones pertinentes.

El guión inicial que la entrevistadora siguió en la actividad se puede observar en los tres cuadros que reproducimos a continuación. Corresponden a tres momentos de la entrevista: presentación, primera tarea y segunda tarea.

Presentación de la entrevista:
Yo soy Consuelo Cañadas y estoy haciendo el doctorado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Este curso tengo que elaborar un trabajo de investigación y para eso necesito tu colaboración. Vamos a hacer una entrevista a la que tienes que contestar con lo que se te ocurra en ese momento a lo que te vaya planteando. Te voy a presentar varias actividades relacionadas con las matemáticas. No hay respuestas buenas ni malas, sólo pretendo ver lo que haces y cómo respondes. No te preocupes si no sabes seguir en algún momento, no pasa nada. Si tienes alguna duda, puedes preguntármela.

Tarea 1: ¿qué resultado da al sumar dos números pares?

Siempre que sigan los razonamientos ellos mismos sobre la cuestión planteada, los dejo que se expresen y no les hago ninguna cuestión adicional. Si no, sigo las siguientes "instrucciones". En cualquier caso, el objetivo principal es que expliquen el porqué de sus respuestas.

Ante el planteamiento de la cuestión:

1. (Paridad) Si contesta inmediatamente sobre la paridad del nº que se obtiene, le pregunto si está seguro de su respuesta. Tanto si lo está como si no, que razone el porqué de su seguridad/inseguridad.
2. (No paridad) Si no sabe a qué referir su respuesta, que me diga lo que se le ocurra sobre la suma de dos números pares.

Si los razonamientos los hace basándose en casos particulares:

1. (No obtiene fórmula) Si fundamenta su respuesta en algunos casos particulares y nada más, le pregunto cómo sabe que eso es cierto para otros números mucho más grandes de los que haya usado, cómo convencería a alguien de que la respuesta dada sirve para cualquier nº por muy grande que sea.
2. (Obtiene fórmula) Si llega a alguna fórmula, le pregunto cómo la ha obtenido
3. y si cree que es válida para cualesquiera números pares que sume. Si me dice que porque sustituyendo números ve que siempre se verifica, le pregunto si yo entonces tengo que sumar todos los números pares que hay para ver que la fórmula es cierta.
   - 3.1. Si me dicen que sí, les hago que piensen cuánto trabajo es ese, por si se les ocurre algo más... FIN.
   - 3.2. Si me dicen que no, que eso sería un proceso muy largo, que habrá alguna forma de hacerlo pero que ellos no la conocen... FIN.
   - 3.3. Si me dicen que sí y acaban la "demostración"... FIN.

Tarea 2: determinar el mayor número de regiones que se pueden determinar al trazar rectas sobre un plano.

Idem Actividad 1.

Ante el planteamiento de la cuestión:

1. (No entienden la pregunta) Es probable que haya alumnos que no sepan lo que quiero preguntar (sobre todo los de la ESO), ¿cómo se lo explico de una forma más clara sin que tenga que recurrir a ningún ejemplo? Les puedo decir que una mesa o el suelo, se pueden considerar planos, y que las rectas pueden ser cuerdas que estiro sobre ellos. Llegado el caso extremo de que no sepan a qué me refiero, ni aún habiéndoselo explicado, les propongo la Actividad 3.
2. (Entienden la pregunta pero no saben cómo empezar) Si me pregunta que cuántas rectas traza, le digo que las que quiera.
3. (Entienden la pregunta, empiezan pero no saben qué hacer con los datos que van obteniendo) Si se da el caso que va trazando rectas y va obteniendo números de rectas trazadas y de regiones pero no sabe qué hacer con esa información, le digo que trate de organizarla para explicarme qué piensa que ocurre.
4. (Entienden el planteamiento y se organizan ellos solos) Si comienzan a trabajar, les digo que me vayan explicando lo que van haciendo.

Después de haber trazado algunas rectas, trato de seguir sus razonamientos hasta el caso general:

1. (No ven ninguna relación nº rectas- nº regiones) Si no saben qué decir porque se lian, les pregunto qué podrían decirme según lo que han ido haciendo.
2. (Ven relación nº rectas- nº regiones pero no saben cómo seguir) Si dicen que dependerá del nº de rectas que tracen, les pregunto cómo han llegado a esa idea.
3. (Buscan expresión de la relación nº rectas- nº regiones) Si ven alguna relación entre nº rectas trazadas y el nº de regiones obtenidas y tratan de obtener alguna fórmula: Si veo que hay algún caso particular para el que el nº de regiones que ha obtenido no es el máximo, como puede tapar algunos razonamientos posteriores interesantes, le digo que repase bien lo que lleva hecho, que yo veo alguna región más de otra forma...
   - 3.1. Que la relación la expresen en función del nº de regiones obtenidas en el caso anterior.
   - 3.2. Que la relación la expresen en función del nº de rectas trazadas en ese mismo caso.

Los casos 1 y 2 son equivalentes al caso 1 (No obtiene fórmula) de la tarea 1. El caso 3 (tanto 3.1 como 3.2) es equivalente al caso 2 (Obtiene fórmula) de la tarea 1. Por lo tanto, me remito a ellos.

Para la redacción definitiva de las tareas y para la estructuración de las preguntas de la entrevista, se tuvieron también en cuenta los objetivos planteados, la naturaleza del tema sobre el que trabajamos, el nivel educativo de los sujetos, la clase de información que podemos obtener, si se necesita o no estructurar su pensamiento, cierta evaluación de su nivel de motivación; tal y como Cohen y Manion (1990, p. 394) aconsejan. Se trata, como hemos dicho anteriormente, de entrevistas semiestructuradas y dirigidas por una entrevistadora, que en nuestro caso fue la autora del trabajo. Ella hacía las preguntas pertinentes y ejerció de guía durante el planteamiento y desarrollo de las dos tareas que se les proponían a los sujetos.

III.7.2 Realización de las entrevistas

Las entrevistas fueron realizadas individualmente y tuvieron lugar en una habitación aislada, en las dependencias del centro. Se trataba de un lugar donde el estudiante se pudiera concentrar en su trabajo y no hubiera problemas de grabación para la recogida de información con la grabadora audio. En la mayoría de los casos, el trabajo se llevó a cabo en el seminario de matemáticas del centro.

Cada uno de los entrevistados contó, como máximo, con una hora para trabajar. Esto lo decidimos así por tres razones. En primer lugar, después de haber realizado las entrevistas preparatorias comprobamos que en una hora tendrían tiempo suficiente. En segundo lugar, se ha comprobado que después de aproximadamente la primera hora de trabajo, los estudiantes de estos niveles pierden la concentración. En tercer y último lugar, las entrevistas se realizaron en el horario lectivo del centro, con lo que una hora era lo más adecuado para una mejor y más fácil organización de la actividad. Aunque el nivel y, por tanto, los conocimientos de los estudiantes eran diferentes, decidimos dar a todos el mismo tiempo para que éste no influyera en el desarrollo de las entrevistas y poder comparar posteriormente las respuestas.

III.8 Los datos recogidos

Las fuentes de recogida de información han sido de tres tipos:

- Las grabaciones en audio de las entrevistas.
- El trabajo que los entrevistados dejaron escrito en los folios que se les facilitaron.
- Las notas escritas que la entrevistadora tomó:
    - Durante el desarrollo de la actividad.
    - Después de cada una de las entrevistas.

Las entrevistas fueron grabadas en cintas audio y posteriormente transcritas. Como forma complementaria de recogida de información, la entrevistadora tomó nota de todos aquellos aspectos que consideraba que pudieran pasar desapercibidos en la grabación y que pudieran ser relevantes para la investigación. Se destacan en este sentido aspectos relacionados con el comportamiento del estudiante o su motivación. Además, al acabar cada una de las entrevistas, la entrevistadora anotaba algunos detalles que observaba. De este modo se trató de preservar la continuidad y la originalidad de la entrevista, intentando no perder información que pudiera ser interesante en los posteriores análisis e interpretación de los datos.

En los anexos de este trabajo, se pueden observar algunos de los documentos mencionados: las transcripciones de las entrevistas, el trabajo por escrito que realizaron los sujetos y las notas que tomó la entrevistadora durante y después de las entrevistas.

III.9 Análisis de los datos

Como se ve en el punto anterior, todos los datos obtenidos son de tipo cualitativo. Esto nos obliga a un tipo determinado de análisis. El análisis cualitativo de datos se aplica a un amplio rango de métodos para trabajar con datos relativamente desestructurados y que no se considera apropiado reducirlos a números. Los datos obtenidos de una entrevista es una de las formas para las que se aconseja este tipo de análisis.

Para realizar el análisis cualitativo hemos utilizado como herramienta un programa informático de análisis cualitativo de datos: Nud*ist revision 4 (N4). Este programa permite ver la información recogida de una forma estructurada y hasta es posible que proporcione una nueva manera de ver las situaciones que se tienen transcritas. Se pueden descubrir detalles, patrones y relaciones que de otra forma resultaría mucho más complicado. El programa está diseñado de forma que se pueden ordenar datos, dando así lugar a nuevas ideas o nuevas formas de interpretar un mismo texto.

El planteamiento general del trabajo con este programa lo hemos diseñado de la siguiente forma. Hemos creado dos proyectos, uno para cada una de las actividades que planteamos a los alumnos. En cada proyecto aparecerán 12 documentos, uno para cada uno de los sujetos. Dentro de cada documento se distinguen tres partes: en la primera aparece la trascripción de la entrevista, en la segunda se encuentran las anotaciones que hizo la entrevistadora durante la entrevista e inmediatamente después a ésta (fundamentalmente referidas a los resultados académicos del alumno y a su actitud inicial ante la actividad); y en la tercera parte aparecen algunas notas complementarias que la entrevistadora tomó tras leer y comparar las transcripciones con el trabajo escrito que recogió de los entrevistados.

III.10 Categorías

En un principio y considerando las preguntas de investigación presentadas en el capítulo I, algunos de los trabajos consultados y las entrevistas previas al estudio piloto, se elaboraron unas categorías iniciales que posteriormente se fueron matizando hasta quedar fijadas como aparecerán en las páginas siguientes.

Categorías iniciales

TAREA 1

- ***Conjeturas o hipótesis.***
  Formulación.
  Comprobación / verificación de conjeturas.
- ***Uso de casos particulares.***
  Número.
  Tipo.
- ***Proceso de generalización.***
  Expresión de dudas.
  Uso de conocimiento escolar. ¿Cuál? ¿En qué momento?
  Influencia de la familiaridad con el ejercicio.
  Razonamientos basados en experiencias previas.
  Recurrencia al lenguaje algebraico.
- ***Forma de representación: verbal / escrita.***
- ***Caracterización de número par empleada.***
- ***Autoconvencimiento.***
  ¿Ve el alumno necesidad de justificar lo que dice o ve evidente lo que razona?
  Cree haber acabado.
  Duda.
  Cree que hay que probarlo pero no sabe cómo.
  Comprueban con datos concretos.
  Está el alumno convencido de su respuesta final.
- ***Trabajo independiente de los estudiantes y papel de la entrevistadora.***
- ***Hasta donde llega en sus razonamientos.***
- ***Errores y dificultades.***

TAREA 2

- ***Comprensión e interpretación del enunciado.***
  ¿Hasta dónde hay que llegar explicando para que entiendan la pregunta?
  Reformulación del enunciado.
  Incorrecciones en la comprensión.
  Preguntas que plantea sobre el enunciado y su interpretación.
- ***Uso de casos particulares.***
  Sistemático / no sistemático.
  Número.
  Tipo.
- ***Formulación de conjeturas.***

Reconocen alguna relación: generalización espontánea y simple
Proporcionalidad directa.
Comprobación / verificación de conjeturas.

- ***Proceso de generalización.***
  Expresa dudas.
  Usa conocimiento escolar. ¿Cuál? ¿En qué momento?
  Influencia de la familiaridad con el ejercicio.
  Razonamiento basado en experiencias previas.
  Recurrencia al lenguaje algebraico.
- ***Forma de representación:***
  Verbal / escrita.
  Tipo de términos empleados.
- ***Autoconvencimiento.***
  ¿Ve el alumno necesidad de justificar lo que dice o ve evidente lo que razona?
  Cree haber acabado.
  Duda.
  Cree que hay que probarlo pero no sabe cómo.
  Comprueban con datos concretos.
  El alumno está convencido de su respuesta final.
- ***Trabajo independiente de los estudiantes y papel de la entrevistadora.***
  Comienza a trabajar por cuenta propia.
  Organiza los datos.
  Cómo actúa cuando no sabe cómo seguir.
  ¿Considera lo que se le está preguntando?
- ***Hasta donde llega en sus razonamientos.***
- ***Errores y dificultades.***

Versión última de las categorías

Tomando la primera aproximación de las categorías y considerando la versatilidad y la forma de trabajo que nos brinda el programa Nud*ist, fuimos dando forma y ajustando criterios como sigue.

Definimos las categorías y subcategorías independientemente para cada proyecto, con lo que obtenemos que todos los documentos correspondientes a la primera tarea tienen asociados las mismas categorías y análogamente ocurre con la segunda actividad. Las categorías han sido las mismas para cada tarea. Se pensó hacer lo mismo para las subcategorías pero no fue posible hacerlo así. Hubo subcategorías que fueron eliminadas o modificadas en una de las tareas porque, tras codificar los textos, se comprobó que aparecían con frecuencia nula y que ese dato no resultaba relevante para nuestro estudio.

Hemos considerado las categorías en estructura de árbol. Algunas subcategorías podrían pertenecer a varias categorías diferentes. En estos casos, podremos analizar la subcategoría como una categoría independiente y de este modo no se verán afectados los resultados finales. Hay algunas categorías que pueden parecer ausentes y debieran aparecer para dar respuesta a nuestras preguntas de investigación. Estas categorías aparecerán como intersección de varias de las categorías de las que sí hemos considerado y el análisis resultará tan completo como planteamos.

Las categorías y subcategorías que finalmente consideramos son:

TAREA 1

(1) Comprensión del enunciado de la tarea
- El entrevistado plantea preguntas.

(2) Trabajo con casos particulares
- Los propone la entrevistadora.

(3) Formulación de conjeturas
- Espontaneidad al dar la respuesta.
- Caracterización de número par empleada.
- Terminación.
- Divisibilidad o multiplicidad.
- 2x, con x un número cualquiera.
- Factorización como suma de 2 números iguales.
- Verificación.
- Empleo conocimiento escolar.

(4) Concreción de la tarea
- Casos particulares.
- Caso general.
- Comprobación posterior.

(5) Autoconvencimiento del entrevistado
- Lo ve evidente.
- Ve la necesidad de justificación.
- Se basa en casos particulares.

(6) Formas de representación empleadas
- Oral.
- Escrita.
- Lenguaje algebraico.
- Mental.

(7) Errores y dificultades

(8) Actitud del entrevistado ante la tarea propuesta
- Duda.
- Considera el enunciado.

- La entrevistadora hace de guía.
- Trabajo independiente del entrevistado.
- Se muestra interesado.

TAREA 2

(1) Comprensión del enunciado de la tarea
- La entrevistadora lo aclara.
- El entrevistado plantea preguntas.
- El entrevistado hace una interpretación incorrecta.
- Pierde o considera el enunciado en sus razonamientos.

(2) Trabajo con casos particulares
- Sistemático.
- No sistemático.
- Organiza.
- Los propone la entrevistadora.

(3) Formulación de conjeturas
- Relación simple.
- Proporcionalidad directa.
- Relación de recurrencia.
- La verifica.
- Emplea conocimiento escolar.

(4) Grado de concreción de la tarea
- Casos particulares.
- Caso general.
- Comprobación posterior.

(5) Autoconvencimiento del entrevistado
- Lo ve evidente.
- Ve la necesidad de justificación.
- Se basa en casos particulares.

(6) Formas de representación empleadas
- Oral.
- Escrita.
- Lenguaje algebraico.
- Mental.
- Gráfica.

(7) Errores y dificultades

(8) Actitud del entrevistado ante la tarea propuesta
- Duda.
- Considera el enunciado.

- La entrevistadora hace de guía.
- Trabajo independiente del entrevistado.
- Se muestra interesado.

Capítulo IV. Análisis de datos

IV.1 Introducción

Vamos a analizar los datos obtenidos según las categorías que consideramos en el capítulo III y que adaptamos al programa Nud*ist para cada una de las dos tareas programadas. Notaremos a los alumnos mediante un código formado por una terna. El primer elemento de la terna es un número que indica el curso en el que está el alumno, es un ordinal, esto es, 1 indica 1º, 2 indica 2º y 3 indica 3º. El segundo elemento es el nivel educativo ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria) o BACH (Bachillerato). El tercer elemento de la terna es otro número e indica la clase, o estrato, en que ha quedado incluido el alumno, según la información de su profesor: 1 indica rendimiento académico alto, 2 rendimiento medio y 3 rendimiento bajo. Por ejemplo, 1BACH3 es el alumno de 1º de Bachillerato que obtiene resultados académicos bajos. En las tablas que presentemos los alumnos aparecerán ordenados por cursos (de menor a mayor) y atendiendo a sus resultados académicos (bajos, medios y altos). La entrevistadora aparecerá como E en los fragmentos de entrevistas que mostramos.

Algunos datos relacionados con las categorías se han organizado en tablas, no se ha hecho con todos. No hemos recogido en tablas aquellos datos que no permitían ser agrupados pues al hacerlo no mejoraba sustancialmente la información que proporcionaban.

Tarea 1

Categoría 1. Comprensión del enunciado de la tarea

A la pregunta de la entrevistadora sobre *¿qué resultado se obtiene al sumar dos números pares?*, todos los sujetos entienden el enunciado que se les plantea, ya que responden de manera correcta que *se obtiene un número par*. Tres sujetos 3ESO2, 4ESO2 y 2BACH1, piensan un poco la respuesta antes de dar contestación, el resto dan la respuesta correcta e inmediata a la tarea.

Categoría 2. Trabajo con casos particulares

Todos los sujetos utilizan casos particulares en algún momento de la tarea. En dos ocasiones ha sido mediante la intervención de la entrevistadora. 3ESO1 usa un caso particular que le propone la entrevistadora para comprobar que la conjetura que realiza es cierta. A 4ESO1 le propone la entrevistadora un caso particular para que se dé cuenta del error que está cometiendo al expresarse con lenguaje algebraico.

Cuatro sujetos, 3ESO1, 4ESO1, 1BACH1 y 2BACH1 (todos con calificaciones altas) buscan la justificación a su respuesta directamente. No recurren a los casos particulares, aunque posteriormente los usen.

(3ESO1) *Porque sumar dos... yo que sé, porque sumar yo qué sé, un número par, y siempre si le sumas dos no?, pues es otro número par porque el impar es el que está en medio. Entonces tú tienes un número par y si le sumas 1 –que es impar-, pues ya tienes un impar. Y si le sumas 2, que ya es par –el primer número par- pues ya está.*
(2BACH1) *Porque... porque por ejemplo, cuando decías que los números divisibles entre dos eran los que terminaban en número par.*

El resto de los entrevistados utilizaron los casos particulares para justificar la respuesta a la tarea que se les planteaba.

En la mayoría de las ocasiones, los números pares utilizados son de un solo dígito. Prueban con números pares bajos y poco separados entre sí. Solamente en dos ocasiones aparecen el 12 y el 16 como casos particulares mencionados por los estudiantes. Todos han incluido el número 2 entre los números que suman. Esto puede deberse a dos causas. La primera es que consideren el 2 como primer número par y, por tanto, es el primero que se les ocurre. La segunda es que vean alguna relación entre la paridad y la multiplicidad.

Resumiendo, todos los alumnos utilizan la particularización y lo hacen con números bajos ya que el cálculo resulta más sencillo.

Categoría 3. Formulación y justificación de conjeturas

En la primera tarea los estudiantes no han de formular conjeturas ya que el "hecho matemático" que se les propone es suficientemente conocido por todos, como se ve en el análisis de la categoría 1.

Cuando se les pregunta a los sujetos por la justificación de su respuesta, al hacerla, usan distintas caracterizaciones de los números pares.

Tabla1

Caracterización Sujeto	Descomp. 2 números iguales	Terminación	Div./Mult. de 2	2x	Conoc. Previo
3ESO3		X			X
3ESO2	X				
3ESO1		X			
4ESO3					X
4ESO2	X		X	X	X
4ESO1			X	X	
1BACH3		X			
1BACH2		X			
1BACH1		X	X		X
2BACH3			X		X
2BACH2			X	X	X
2BACH1		X			

Dos alumnos de ESO toman para sus casos particulares los dos números iguales.

La justificación utilizando la terminación del número es la más usada, la utilizan alumnos de casi todos los niveles a excepción de los sujetos de 4º de ESO.

La justificación apoyada en la divisibilidad la hacen alumnos cuya representación en la tabla está en la parte inferior, esto quiere decir que son de los niveles superiores considerados, 4º de ESO y Bachillerato.

Los alumnos que representan los números pares de forma simbólica como 2x están entre los sujetos anteriores. Nos hace pensar que la relación de divisibilidad va unida a esta expresión para el caso general.

4ESO3 es el único entrevistado que no usa ninguna caracterización, basa todos sus razonamientos en casos particulares.

Resumiendo, la justificación se hace, sobre todo, basándose en criterios de divisibilidad y en la paridad de la unidad del número considerado.

Conocimiento previo

Todos los entrevistados conocen el resultado de la tarea que se les plantea, como ya hemos comentado. Sin embargo, la justificación del resultado no la conocen de antemano y han de pensar para dar su justificación. Sólo un entrevistado, 3ESO3, menciona que usa el conocimiento escolar que le resulta familiar. Este sujeto usa la caracterización de número par según la terminación que el profesor les había explicado.

En otros casos, el conocimiento escolar tratan de usarlo para expresarse. 2BACH3 trata de ponerle nombre y explicar lo que va razonando. Al intentar mencionar el factor común (con lo que está trabajando), mezcla éste término con otros como máximo común divisor o mínimo común múltiplo. 2BACH2 trata de relacionar la actividad con un ejercicio que le resulta familiar sobre rectas y sucesiones. 4ESO3 relaciona la solución de la actividad con algún otro resultado de matemáticas y menciona las ecuaciones.

4ESO2, 1BACH1 y 2BACH3 formulan una conjetura basada en su experiencia previa en la suma de números. Este hecho denota una inducción hecha a priori.

E:¿Entonces?
(2BACH3) *Yo qué sé, de haber hecho tantas sumas*

El resto de los entrevistados no hacen mención a la posible relación de lo que se les pregunta con el conocimiento escolar. Incluso el mismo sujeto anterior (2BACH3), se extraña cuando la entrevistadora le plantea esa posibilidad.

E: ¿eso te lo han dado como resultado en el instituto o algo así?
¿El qué? La suma de... (extrañado porque no le suena como resultado)

En general observamos que el razonamiento realizado por los sujetos para proporcionar una justificación a la propiedad matemática se basa, sobre todo, en las relaciones que los sujetos tienen creadas, más que en las materias que están estudiando.

Prueba con nuevos casos particulares

Dos sujetos (2BACH3 y 2BACH1), una vez dada la respuesta general, vuelven a comprobarla para casos particulares (recogido en la tabla 2). 2BACH3 considera casos concretos, incluso toma dos números que no cumplen las condiciones del enunciado, no son pares.

¿Por qué? ... el número par tiene que ser divisible por dos. Entonces, la suma de dos números pares tiene como factor común el dos porque los dos son divisibles por dos. Ahí vale... entonces, ese factor común también tiene que estar en el resultado. Entonces si el factor común es el dos, y los números que hay son divisibles por dos, tiene que ser un número par. ¿No? Me estoy liando. Por ejemplo estoy pensando en... tipo de... la suma de tres y nueve. El factor común es tres y el resultado también es divisible por tres.
E: a ver, ¿tres y nueve son pares?
No. Bueno, tres y nueve sí es par porque es doce.
E: ¡ah, vale! Estás pensando en la suma.
No, no, estoy pensando en que... da igual, el tres y el nueve también tienen un factor común igual, que es el tres. Y la suma, que es doce, también tiene factor común tres, ¿no?
E: sí.
... Cuatro y doce también tienen eso, le sumas dieciséis y el factor común también es cuatro pero no sé cómo...

2BACH1 prueba su afirmación con un caso particular (18+18).

Polya indicaba tres pasos en el razonamiento inductivo: probar para casos particulares, enunciar una conjetura y probar la conjetura puesta en juego con nuevos casos particulares. Parece que los dos primeros pasos son más intuitivos que el tercero. Observamos que el primero, probar casos particulares, se hace de forma más espontánea y rápida si el hecho matemático es conocido por el sujeto. Concluimos en este apartado que solamente estos dos sujetos (2BACH3 y 2BACH1) completan el tercer paso al que Polya hace referencia. Consiste en probar la conjetura puesta en juego con nuevos casos particulares.

Categoría 4. Concreción de la tarea

Cuatro sujetos, 4ESO3, 4ESO2, 1BACH3 y 1BACH1, basan la justificación de sus respuestas en la comprobación con casos particulares (ver tabla 2) y no avanzan más.

E: tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que siempre da par.
(4ESO3) *Pues... habría que hacerlo a lo mejor... práctico, ¿no? Por ejemplo, di un número par.*
E: vale, el mil setecientos.

Mil setecientos... y otro número par, por ejemplo el cuatro. ¿Ves? Pues los sumo y me da un número par.

Otros entrevistados se centran en los diez primeros números, y como todos los números van a tener la misma terminación que éstos, extienden su razonamiento al resto. 3ESO3 sigue ese método pero no consigue llevarlo hasta el final. 1BACH2, 2BACH1, y 3ESO1 generalizan argumentando que cuando se suman dos números que acaban en 0, 2, 4, 6 u 8, obtenemos otro número con esa misma terminación (luego par).

3ESO2 trabaja con la factorización de los números y habla del resultado general pero no llega a establecerla.

4ESO1, 2BACH3 y 2BACH2 razonan usando la divisibilidad de los números pares y el concepto de factor común. Uno de ellos (4ESO1) lo expresa en lenguaje algebraico. Observamos en el siguiente fragmento cómo 2BACH2 hace la justificación completa verbalmente:

(2BACH2) *Porque todos los números pares se pueden descomponer en un número multiplicado por dos y entonces, al hacer la suma de dos números pares pues sería dos factor común de la suma. Y entonces sigue siendo dos por cualquier número y entonces, al multiplicarlo por dos pues siempre es par.*

En suma, cinco sujetos se quedan sólo en la comprobación parcial, en su razonamiento y siete llegan a justificar la generalidad.

Categoría 5. Autoconvencimiento del entrevistado

Seis alumnos 3ESO3, 4ESO3, 4ESO2, 1BACH3, 1BACH2 y 2BACH3, la mitad de los sujetos que participan, ven evidente que la suma de dos números pares dé como resultado otro número par y no ven la necesidad de justificarlo. Uno de éstos (2BACH3) incluso se extraña de que ese resultado tenga justificación:

Yo porque... dos números pares, te da un par. ¿Eso tiene explicación?

Tres de los entrevistados (3ESO1, 4ESO3 y 2BACH2) ven la necesidad de justificar cuando la entrevistadora les plantea si su respuesta es cierta para cualquier suma de dos números pares. 4ESO3 es consciente de que habría que justificar de algún modo la respuesta de la que está convencido para casos particulares, pero no sabe cómo hacerlo.

Sí porque con ejemplos... me vale para ese ejemplo... pero no se me ocurre nada.

Los tres alumnos de 1º de Bachillerato se basan, en un principio, en casos particulares. Piensan que con los casos particulares convencerían a cualquiera de la veracidad de su respuesta.

1BACH3 sumaría cualesquiera dos números pares y comprobaría que el resultado verifica la caracterización que usa (terminación).

1BACH2 cree que basta con justificarlo para números pares aleatorios aunque, después de que la entrevistadora le insiste, justifica su respuesta de forma general.

1BACH1 se convencería probando con cada caso particular ante el que se encontrara.

Seis sujetos (3ESO3, 4ESO3, 4ESO2, 1BACH3, 1BACH2 y 2BACH3) muestran los casos particulares como comprobación de la propiedad. Hasta que la entrevistadora no pregunta, no intentan justificar de manera general.

Dar una justificación general a un hecho matemático que conocen no surge de manera espontánea. Piensan que igual que ocurre para los casos de sumas que utilizan normalmente, ocurrirá para otros casos que no suelen realizar. Esto está en la línea de otras investigaciones que concluyen que los estudiantes, en general, no sienten necesidad ni curiosidad por conocer la demostración de aquellas propiedades matemáticas que están aplicando.

Categoría 6. Formas de representación empleadas

Cuando los sujetos tratan de justificar la respuesta dada, usan distintas formas de representación. Hemos considerado tres formas de representación usadas por los sujetos para expresar sus razonamientos: oral, escrita y algebraica. En realidad serían cuatro formas, como resultado del cruce entre representaciones oral y escrita, y expresiones algebraica y no-algebraica. Pero dado que la no-algebraica cruzada con la oral coincide con el lenguaje verbal habitual, han quedado reducidas a tres. Será interesante para nuestro trabajo, tener en cuenta las intersecciones que se presenten entre estas tres formas ya que consideraremos cuándo la representación oral ha sido algebraica o no, y análogamente con la representación escrita.

Tabla 2

Generalización Sujeto	Forma de representación			Concreción de la tarea		
	Oral	Escrita	Algebraica	Caso particular	Caso general	Compro. posterior
3ESO3	X				X	
3ESO2	X				X	
3ESO1	X				X	
4ESO3	X			X		
4ESO2	X		X	X		
4ESO1	X	X	X		X	
1BACH3	X			X		
1BACH2	X	X			X	
1BACH1	X			X		
2BACH3	X				X	X
2BACH2	X				X	
2BACH1	X				X	X

La expresión oral la utilizan todos los entrevistados y es la única forma de representación que usan nueve de ellos. Esto no es extraño ya que se trata de una entrevista oral en la que los sujetos han de expresarse hablando fundamentalmente, aunque también podían escribir en los folios que se les entregaron.

1BACH2 hace algunas anotaciones de lo que va explicando verbalmente.

Dos sujetos, 4ESO2 y 4ESO1, son los únicos entrevistados que recurren al lenguaje algebraico. 4ESO2 lo hace verbalmente y 4ESO1 por escrito.

3ESO2 ha hecho operaciones mentalmente con casos particulares y no las explica oralmente. Esto se nota por las expresiones que utiliza.

4ESO1 es la única que llega a justificar su respuesta de forma general y la expresa en lenguaje algebraico.

Suponemos que la explicación a este resultado de la utilización del lenguaje hablado y no de la expresión escrita está en que se trata de un hecho matemático sencillo para estos estudiantes. Los propios entrevistados comentan que no necesitan escribir ni anotar nada en el papel. Además se ha apreciado cierta dificultad en los casos en que han recurrido al lenguaje escrito.

Categoría 7. Errores y dificultades

Ya comentamos en el capítulo 2, que vamos a considerar errores formales a los errores cometidos en el razonamiento. Errores informales serán los errores de contenido matemático. Estos últimos los dividimos en dos tipos: conceptuales y procedimentales. En la tabla 3 hemos recogido tanto los errores cometidos por los estudiantes como las dificultades que han encontrado al realizar la tarea.

Tabla 3

Errores y dificultades / Sujeto	Errores			Dificultades
	Formales	Informales		
		Concept.	Procedim.	
3ESO3				
3ESO2		X		X
3ESO1			X	X
4ESO3				
4ESO2			X	X
4ESO1			X	X
1BACH3				
1BACH2				
1BACH1		X		X
2BACH3			X	X
2BACH2				
2BACH1				

No hemos detectado errores formales o relacionados con el proceso de razonamiento. Han sido escasos los errores conceptuales y los más frecuentes han sido los errores procedimentales. Lo que se observa es que tienen, sobre todo, dificultades.

En 3ESO2 apreciamos un error conceptual al hablar de composición de números al relacionar los casos particulares. Al menos eso es lo que se desprende de la justificación que hace. Aunque puede ser que, como el mismo sujeto reconoce, no se haya explicado bien:

Porque en matemáticas... como los números en matemáticas son también composiciones de números, se supone que si los números básicos, que son del 0 al 10, que son los que se usan, se van combinando. Si los pares de los números básicos se van sumando y dan números pares, en el resto que son combinaciones de éstos será todo igual... No me he explicado muy bien, ¿verdad?

1BACH1 comete un error al relacionar los conceptos de número decimal y paridad.

(Refiriéndose a la paridad del resultado de la suma de dos números pares) *Ya, ya. Pero lo hago también con decimales o algo así...*

Hemos considerado error de tipo procedimental al cometido por 3ESO1, 4ESO2 y 4ESO1. Señalan número par como *x,* sin atribuirle ninguna característica que haga que efectivamente lo sea. Además consideran la suma de dos números pares como la suma de un número par y el siguiente par consecutivo.

(3ESO1) *Porque sumar dos... yo que sé, porque sumar yo qué sé, un número par, y siempre si le sumas dos no?, pues es otro número par porque el impar es el que está en medio. Entonces tú tienes un número par y si le sumas 1 –que es impar-, pues ya tienes un impar. Y si le sumas 2, que ya es par –el primer número par- pues ya está.*
(4ESO2) *Entonces, el número es x. Entonces le sumas x+2 y para que sea un número... no, bueno.*
E: y ¿ x+2 qué es?
Otro número, o sea, el mismo número de antes más dos para que siga siendo par. Bueno, x antes era un número par.
Pues poniéndole delante, multiplicándolo delante por dos... 2x. Entonces tendría 2x más otros 2x más 2. O sea, el mismo número más dos. Si un número lo multiplicas por dos sale par, le vuelves a sumar ese número pero se sumas otra vez dos para que siga siendo par.

2BACH3 confunde términos cuando se refiere al factor común de dos números.

E: ... estás haciendo una mezcla de nombres... Vamos a ver, me has dicho máximo común denominador...
No, es máximo común múltiplo.
E: vamos a ver. Una cosa es el máximo común divisor, otra cosa es el mínimo común múltiplo y otra cosa es el factor común.

Consideramos, tras el análisis de esta categoría, que los sujetos no han cometido errores de razonamiento ni errores conceptuales importantes ni cuantitativa, ni cualitativamente. La mayoría de las dificultades se han encontrado en la traslación o paso entre las diferentes formas de representación. Por ejemplo, cuando trataban de expresar por escrito lo que habían razonado oralmente.

Categoría 8. Actitud del entrevistado ante la tarea propuesta

En esta categoría de la tarea 1 nos centramos en el estado anímico del estudiante, que fue lo más destacado de ese momento. Pensamos que fue así por varias razones: la primera es que era el comienzo de la entrevista. La segunda es que se había sacado al alumno de su hábitat de trabajo. Y la tercera, la incertidumbre del sujeto, quien no sabía qué se esperaba de él.

Tres estudiantes (3ESO2, 3ESO1 y 2BACH2) se muestran nerviosos al comienzo de la actividad. Esta actitud se hace evidente cuando comienzan a hablar con la entrevistadora, cuando conocen que la entrevista va a ser grabada en cinta audio o cuando la entrevistadora toma notas. Conforme avanza la entrevista, se van tranquilizando y esto repercute en una mayor fluidez en la conversación.

4ESO2 y 2BACH1 están muy callados y, en un principio, poco participativos. Más adelante cambian de actitud y se muestran interesados en las tareas.

Durante toda la entrevista, siete sujetos (3ESO3, 4ESO3, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 1BACH1, y 2BACH3) están tranquilos, colaboran y se les ve interesados en las tareas que se les proponen. Uno de ellos (1BACH1) se preocupa por la utilización de los resultados de las entrevistas por sus profesores. Aquellos que son conscientes de que las matemáticas "no se les dan muy bien" (1BACH3 y 2BACH3), lo mencionan en algún momento de la entrevista.

Todos los entrevistados excepto 2BACH1 manifiestan inseguridad o duda en algún momento de la entrevista. Los sujetos 2BACH2 y 2BACH3 lo hacen continuamente.

Las reacciones de los entrevistados ante una situación de duda son distintas. Unos buscan apoyo en la entrevistadora (1BACH1, 2BACH3, 3ESO1 y 3ESO3). Y otros, que no saben cómo seguir, lo intentan por ellos mismos 3ESO2, 4ESO3, 4ESO2, 4ESO1, 1BACH3 y 1BACH2.

Destacamos como resumen de esta categoría dos puntos. El primero, que los estudiantes se muestran nerviosos en un primer momento, aunque se van tranquilizando a medida que se desarrolla la entrevista. El segundo, la inseguridad que manifiestan algunos de ellos durante el trabajo. No están seguros si lo que hacen es o no lo correcto. Creemos que el sistema escolar favorece que el alumno dependa del profesor. El profesor es quien, en todo momento, dirige, corrige, sentencia, etc el trabajo del estudiante. Lo que hace que, en algunos casos sea muy baja la actitud autónoma y crítica del alumno.

Relación de la actitud con otras características del trabajo

Hemos creído interesante reflejar en la siguiente tabla algunas de las características del trabajo de los estudiantes que podrían interaccionar y mostrar su relación con la actitud del estudiante ante la tarea propuesta. Esto se obtiene de las tres columnas que consideramos en la siguiente tabla: conciencia de la necesidad de justificación por parte del estudiante, el tipo de casos que emplea en la explicación de su respuesta y la actitud que muestra ante el trabajo.

Tabla 4

Autoconvenc.	Necesidad de justificación		Tipo de casos que emplea en explicación		Actitud	
Sujeto	No	Si	Particular	General	Busca apoyo	Independ.
3ESO3	X		X		X	
3ESO2			X			X
3ESO1		X		X	X	
4ESO3	X	X	X			X
4ESO2	X		X			X
4ESO1				X		X
1BACH3	X		X			X
1BACH2	X		X			X
1BACH1			X	X	X	
2BACH3	X		X		X	
2BACH2		X	X			
2BACH1				X		

Sólo tres sujetos ven la necesidad de justificar su respuesta. De éstos, uno (3ESO1) es el que da su respuesta para el caso general en primera instancia. No se ha encontrado relación entre los sujetos que veían la necesidad de justificar y aquellos que han trabajado de forma independiente para justificar su respuesta. Combinando la información que nos proporcionan las tablas 3 y 4, se observa que ninguno de los entrevistados que ven evidente su respuesta, recurre al caso general para hacer su justificación.

Hay ocasiones en las que los alumnos trabajan por iniciativa propia, sin necesidad de que la entrevistadora intervenga. 3ESO2 hace operaciones mentalmente para comprobar su conjetura. 4ESO1 se da cuenta de los errores que ha cometido al emplear el lenguaje algebraico.

Con siete sujetos (3ESO3, 3ESO1, 4ESO3, 4ESO2, 4ESO1, 2BACH2 y 2BACH3) la entrevistadora ha de participar más como guía del proceso de justificar su generalización. Esto no se observa en la tabla 4 porque el hecho de que la entrevistadora actúe como guía de la tarea no es incompatible con que sean los estudiantes quienes busquen apoyo o la entrevistadora guíe un razonamiento que iniciaron por cuenta propia. Por ejemplo, fueron los sujetos de 4º de ESO los que trabajaron de forma independiente con los casos particulares, aunque la entrevistadora tuviera que ejercer de guía en otro momento.

El nivel académico no es el que proporciona a los sujetos el conocimiento y la seguridad para llevar a cabo la tarea por ellos mismos, sin necesidad de que haya alguien que confirme la corrección de sus razonamientos. Se ve en la tabla 4 que no hay una distinción clara entre los diferentes niveles educativos en cuanto al trabajo independiente. En la independencia del trabajo de los entrevistados influyen más otros factores como la predisposición y la actitud ante la tarea. Además, ya ha quedado constancia en los párrafos anteriores que la iniciativa de los sujetos varía según el momento del trabajo en el que se encuentren.

Tarea 2

Categoría 1. Comprensión del enunciado de la tarea

En la actividad 2, la comprensión del enunciado presenta dificultad para todos los estudiantes. En unos casos esta dificultad está relacionada con la comprensión de conceptos con los que no han trabajado anteriormente, o lo han hecho poco. En otros, se debe a dificultades en el conocimiento procedimental. Esto se manifiesta en las preguntas que plantean.

Tabla 5

Comp. Enunciado / Sujeto	Nula	Plantea preguntas	Reenunciado	Se le plantean c. partic.
3ESO3	X	X	X	
3ESO2	X	X		
3ESO1	X	X	X	
4ESO3		X		X
4ESO2		X	X	X
4ESO1		X	X	
1BACH3		X		
1BACH2		X	X	
1BACH1		X	X	X
2BACH3		X		
2BACH2		X		
2BACH1		X		

Los entrevistados de 3º de ESO manifiestan no haber entendido la tarea propuesta.

E: ¿hay algo que no entiendas?
(3ESO1) *sí, nada.*

Las preguntas de los sujetos tras plantearles el enunciado de la tarea, son de distinta índole. Algunos de ellos (4ESO3, 4ESO1, 1BACH3 y 1BACH1) plantean preguntas a la entrevistadora para tratar de entender la tarea.

(4ESO1) *¿Al trazar rectas?*
...
¿Cuál es el número máximo de regiones?
(1BACH1)*¿puedes repetirla?*
E: sí
...
¿Y eso de regiones?

Los sujetos de 2º de Bachillerato no hacen preguntas acerca de los conceptos que aparecen en el enunciado porque les son más familiares que al resto de los entrevistados. Los sujetos 4ESO2 y 1BACH2, que no preguntan nada en un principio, manifiestan en el trascurso de la tarea alguna dificultad relacionada con aspectos que no han entendido.

Una de las preguntas que con más frecuencia realizaron es la relativa al número de rectas que se han de trazar (3ESO1, 4ESO2, 1BACH1, 2BACH3 y 2BACH3).

(2BACH3) *¿Número máximo de regiones al trazar rectas? O sea, que no hay un número definido de rectas. ¿Puedo trazar todas las rectas que quiera?*

Otras de las preguntas que aparecen son las relacionadas con los límites de las regiones (1BACH1, 1BACH3 y 2BACH1), del plano (3ESO2 y 2BACH3) y de las rectas (2BACH3).

(1BACH1) *... o sea que por ejemplo si se cruzan... o sea cuatro, te sale un cuadrado, ¿no? ¿Algo así es a lo que te refieres por región?*
(3ESO2) *Pero vamos a ver, tú tienes un plano. Cualquier plano, ¿no?*
... Pero ese plano está... es decir, ¿tiene límite? Es decir, por ejemplo tú te vas a este plano (coge el folio) *y ves que tiene de límite estos cuatro, los cuatro... cómo se llama...* (se refiere a los bordes del folio)

También se plantean cuestiones relativas al trazado de las rectas. 3ESO3 y 1BACH2 cuestionan si hay alguna condición adicional sobre la posición de las rectas. 3ESO1 y 4ESO3 preguntan por el tipo de recta que tienen que trazar y ambos dudan con los conceptos de recta y región.

(1BACH2) *Sí pero... ¿tomamos siempre como que la recta tiene que pasar por un punto o algo?*
E: no, las rectas las trazas como tú quieras.
(3ESO1) [Prueba a dibujar y a hacer sus cálculos...] *Pero ¿las rectas tienen que ser rectas? o sea, ¿no pueden ser curvas ni nada de eso?*
(4ESO3) *A ver... con tres... ¿son líneas rectas, no?*

4ESO2 no pregunta sobre los límites pero se extraña cuando la entrevistadora comenta sobre la ilimitación del plano.

A tres sujetos, 4ESO3, 4ESO2 y a 1BACH1, hay que explicarles la tarea utilizando un caso particular para que entiendan lo que se les plantea. Esto es después de que contesten que, si el número máximo de rectas que pueden trazarse en el plano es ilimitado, el número máximo de regiones será infinito.

(4ESO2) *Es que si es ilimitado, pues el número de regiones que te salen... también...*

La entrevistadora reenuncia la tarea a 3ESO3, 3ESO1, 4ESO2, 4ESO1 y 1BACH2 usando términos a los que supone que están más acostumbrados. Con estos entrevistados se emplean términos como *trozos* o *partes*, en lugar del término del enunciado original *regiones*.

A 3ESO2, 4ESO2, 1BACH1, 2BACH3 y 2BACH2 la entrevistadora les aconseja que consideren el plano como el folio, una porción de él o algún objeto que les sea más familiar. Aparecen términos como *mesa*, *suelo*, *folio* o *trozo de folio*.

Ocho entrevistados (4ESO3, 4ESO2, 4ESO1, 1BACH2, 1BACH1, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1) entienden el enunciado de manera diferente a la que se pretendía y responden diciendo que el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano es infinito, ya que el plano es ilimitado y se pueden trazar tantas rectas como queramos.

(1BACH2) *Pues infinitas regiones e infinitas partes. Porque si las rectas son infinitas, el número de regiones que tú halles, serán infinitas también.*
(2BACH1) *Pues si trazo rectas... pues las que quepan.*

Ha sido larga la negociación entre la entrevistadora y los sujetos para que éstos comprendieran qué se pretendía que hicieran. La tarea es distinta a lo que están acostumbrados. Algunos conceptos implicados en la misma como *plano* o *rectas* son sencillos. Otros conceptos como *regiones del plano* son más difíciles para estos niveles. La dificultad es mayor si consideramos la exigencia de que el número de regiones sea el máximo.

Categoría 2. Trabajo con casos particulares

Todos los sujetos, después del diálogo mantenido con la entrevistadora, dan muestras de haber entendido el enunciado. Cuando trabajan con casos particulares, se observan dos comportamientos distintos: por un lado, los estudiantes 3ESO2, 1BACH3, 1BACH2 y 2BACH3 comentan lo que van trabajando en relación con el enunciado del problema, ya sea haciéndole algún comentario a la entrevistadora, planteándole alguna pregunta o pidiéndole que vuelva a repetir el enunciado. Por otro lado, el resto de los estudiantes, se concentran en el trazado de rectas y recuento de regiones y se olvidan del enunciado de la tarea. Es la entrevistadora quien los reconduce hacia lo que el ejercicio les planteaba.

La forma en que los entrevistados comienzan a trabajar con casos particulares y el uso que hacen de los mismos también es distinto, como se ve en la tabla 6.

Tabla 6

C. Particulares Sujeto	Espontáneo	Núm. de casos	Tipo	Sistemático	Organiz.
3ESO3		4	Paralelas	X	
3ESO2	X	5	Paralelas		X
3ESO1	X	4	Paralelas		X
4ESO3		3			X
4ESO2		4	En cuadrícula		
4ESO1	X	4		X	X
1BACH3	X	5	En cuadrícula		X
1BACH2	X	+ de 5		X	
1BACH1		5			X
2BACH3		4		X	
2BACH2	X	5		X	X
2BACH1	X	3		X	

La entrevistadora propone trabajar con casos concretos a cinco sujetos (3ESO3, 4ESO3, 4ESO2, 1BACH1 y 2BACH3) desde el comienzo de la tarea ya que no se consiguió que lo hiciesen por sí solos. El resto de los entrevistados comienzan a trazar rectas en el folio por cuenta propia. Aunque incluso a estos últimos, en el desarrollo de sus razonamientos hay que proponerles más casos particulares para que sigan cierta sistematicidad en su trabajo.

Todos los sujetos excepto 2BACH3, quien trabaja con 8 rectas, trazan un número de rectas comprendido entre 0 y 5.

1BACH1 y 2BACH1 creen que necesitarían más casos particulares de los que pueden manejar gráficamente para conseguir una relación que le permita hacer una conjetura de tipo general. 2BACH1 prueba con 2, 3 y 4 rectas gráficamente y hace una conjetura sobre el número de regiones que obtendrá con 5 rectas.

1BACH3 busca una fórmula que sea cierta para los casos con los que va probando. Encuentra dificultades cuando comprueba con un número elevado de rectas.

<u>Forma de cortarse las rectas</u>

3ESO1, 3ESO2 y 3ESO3 sólo consideran los casos en que las rectas son paralelas entre sí. Es la entrevistadora quien les hace darse cuenta de que la tarea no hace ninguna restricción sobre la posición de las rectas. 4ESO2 y 1BACH3 consideran que trazar las rectas formando un entramado de cuadrículas es el modo de obtener el máximo número de regiones en el plano. 4ESO2 piensa que ésa es la generalización válida para cuando el número de rectas trazado sea par. 1BACH3 busca una fórmula que sea cierta para los casos con los que va probando y encuentra dificultades cuando comprueba con un número elevado de rectas.

1BACH3 intenta cruzar todas las rectas que le pueda en su trazado. 3ESO3, 4ESO1, 1BACH2, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1 también persiguen el mismo objetivo, tratando que la última recta que trazan corte a las que ya ha dibujado.

E: ¿cómo trazarás la última ahora?
(1BACH2) *pues... cortando el mayor número de rectas posible.*
E: ¿estás trazando las líneas con alguna sistematicidad o a ojo?

(2BACH1) *... serían las dos y después la tercera que cruce a las dos. La cuarta que cruce a las tres, si puede ser. Y cuantas más cruces, mejor.*

Sistematicidad del trabajo con los casos particulares

Se observa en la tabla que en seis sujetos la sistematicidad es una de las características de su trabajo. 4ESO1 expresa la utilidad del trabajo sistemático al establecer alguna relación entre el número de rectas y el número de regiones:

E: ¿estás trazando las rectas de alguna forma... o totalmente a ojo?
Yo qué sé... ahora a ojo. Pero... pero es tontería trazarlas a ojo porque después no le encontramos ninguna lógica. A ver ahora... una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince.

En los casos de trabajo sistemático, se va aumentando el número de rectas que trazan de una en una. Aunque encontramos un caso en el que no ocurre así. 2BACH3 pasa del caso con tres rectas al caso con ocho.

La forma en que los alumnos tratan los casos particulares considerados puede facilitarles la tarea posterior de generalización. Por ello, es interesante considerar que 4ESO1 organiza la información sobre los datos particulares por iniciativa propia. 3ESO2, 3ESO1, 4ESO3, 1BACH3, 1BACH1 y 2BACH2 lo hacen animados por la entrevistadora.

En este apartado notamos dos momentos en los que la entrevistadora propone trabajar con casos particulares a los alumnos: al comienzo de la actividad y en el desarrollo de la misma. Estos momentos responden a dos situaciones que se corresponden con dos actitudes distintas de los entrevistados. Por un lado, la actitud del entrevistado puede ser de duda o inseguridad. Y por otro, es posible que haya cometido algún error y la entrevistadora interviene para que se de cuenta.

Se ha detectado que tienen dificultad para observar que el número máximo de regiones se obtiene cuando cada recta corta a todas las anteriores. Además, cuando no han organizado los datos de forma sistemática, les resulta difícil ver relaciones que les permitan formular alguna conjetura.

Categoría 3. Formulación y justificación de conjeturas

Todos los entrevistados reconocen alguna relación entre el número de rectas y el número de regiones. Tras entender el enunciado, todos indican que cuantas más rectas tracen, más regiones obtienen.

Tabla 7

Conjeturas / Sujeto	Infin.	Rel. simple	Lineal			Recurr.	Generaliz. no recurrente	Conocim. escolar	Comp. posterior
			n+1	2n	Reg. de tres				
3ESO3		X		X				X	
3ESO2		X		X				X	
3ESO1		X	X	X	X				
4ESO3	X	X		X	X	X			X
4ESO2	X	X							
4ESO1	X	X	X			X	X		X
1BACH3		X		X		X		X	X
1BACH2	X			X		X			
1BACH1	X	X		X				X	
2BACH3	X	X		X	X	X			X
2BACH2	X			X		X		X	
2BACH1	X	X		X		X		X	

El primer grupo de conjeturas que mencionamos es el correspondiente a los sujetos que consideran que el número de regiones es infinito, puesto que pueden trazar un número infinito de rectas en el plano, que es ilimitado. A este grupo de entrevistados ya hicimos referencia al analizar la categoría 1.

Diez sujetos (3ESO3, 3ESO2, 3ESO1, 4ESO3, 4ESO2, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH1, 2BACH3 y 2BACH1) observan gráficamente y expresan que el número de regiones depende del número de rectas que tracen y de la posición de las mismas. Se trata de una relación simple en la que detectan que si las rectas se cruzan, el número de regiones que obtienen es mayor. Esto supone la primera aproximación a la resolución de la tarea. Todos los entrevistados excepto 4ESO2 consideran que entre el número de rectas trazado y el número máximo de regiones existe una relación lineal. 4ESO2 propone una relación cuadrática. Entre los que defienden la linealidad de la relación, distinguimos tres grupos de sujetos. En un primer grupo están los sujetos que consideran que el número de regiones que obtenemos es el número de rectas más uno (3ESO3 y 4ESO1). En un segundo grupo están los sujetos que mencionan que el número de regiones está relacionado con el doble del número de rectas que trazan más uno. Consideramos esto como una aproximación en estado más avanzado que la anterior y la llevan a cabo diez sujetos (3ESO1, 3ESO2, 3ESO3, 4ESO3 1BACH3, 1BACH2, 1BACH1, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1).

(3ESO3) *El doble, ¿no? Si trazas... Si pones 2, te salen... pues una más. Si pones 2, te salen 3. Si pones 4, te salen 5.*

En un tercer grupo están los entrevistados que consideran que la regla de tres es el algoritmo adecuado para resolver la tarea. En este grupo están 3ESO1, 4ESO3 y 2BACH3.

Seis sujetos, 3ESO2, 4ESO3, 4ESO2, 4ESO1, 1BACH2 y 2BACH2, tratan de ajustar la fórmula de la relación que buscan a los casos particulares con los que está trabajando.

Observamos que, aunque tienen dificultad para comprender qué se les pide hacer, la mayoría de los sujetos siguen la pauta del razonamiento inductivo, formulan conjeturas con buen criterio.

Conocimiento previo

Seis alumnos hacen referencia a algún conocimiento escolar cuando realizan esta tarea. Hay tres entrevistados de Bachillerato (1BACH1, 1BACH3, 2BACH2) que comentan que esta actividad es similar a alguna realizada el curso pasado. Otros tres (2BACH1, 3ESO3 3ESO2) lo relacionan con ejercicios que les resultan familiares y usan términos como *funciones*, *derivadas*, *ecuaciones* y *ecuaciones de la recta*.

Prueba con nuevos casos particulares

Siete alumnos de los cursos superiores (4ESO3, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1) encuentran la relación de recurrencia y la comprueban con los casos particulares con los que iban trabajando. Cuatro de ellos, (4ESO3, 4ESO1, 1BACH3 y 2BACH3) prueban además la conjetura que hacen para un número de rectas mayor del que habían considerado en un principio.

Tres de los sujetos anteriores (4ESO3, 1BACH3 y 2BACH3) llegan a la relación por recurrencia al observar la conjetura relacionada con el doble del número de regiones. Esto se observa claramente en 1BACH3:

Lo que estoy observando es que... según... se va progresando el número, o sea uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho... con el tres he observado que me daba el doble más uno. Con el cuatro me daba el doble más tres. Con el cinco me va a dar el doble más cinco. Pues según la serie esta de números... enteros seguidos... al doble de ese número, al sumarle uno, tres, cinco... estoy viendo que la diferencia siempre a ser dos, entonces...
He llegado a la conclusión... aquí va progresando n. n+1, n+2, n+3, n+4 [refiriéndose al número de rectas] *y aquí esto va... de aquí a aquí hay uno, de aquí a aquí hay dos, de aquí a aquí tres, cuatro y cinco. Y así, esto iría sucesivamente... ahora, ¿cómo relaciono yo esto?*

En general, se nota que todos los alumnos trabajan con la intención de formular algún tipo de conjetura y acaban haciéndolo.

Categoría 4. Concreción de la tarea

Los sujetos de 3º de ESO hacen intentos de generalizar a partir de casos particulares pero no obtienen una relación que les lleve a formular una conjetura que satisfaga los casos particulares con los que han probado.

4ESO3 toma un número elevado de rectas.

4ESO2 es guiada en todo momento por la entrevistadora. Sus razonamientos se basan en relaciones simples: cuantas más rectas trace, más regiones obtiene y el número de regiones será mayor si las rectas se cruzan.

4ESO3 y 4ESO1 obtienen una relación por recurrencia. 4ESO1 consigue rápidamente la relación general distinta a la de recurrencia y formula una conjetura. Ve la necesidad de justificarla pero no sabe cómo hacerlo. Comenta que se podría probar con algún programa informático.

1BACH2 obtiene la relación por recurrencia y cuando trata de llegar a una relación general distinta a ésta, intenta relacionar números no consecutivos.

1BACH1 y 2BACH1 creen que necesitarían más casos particulares para conseguir una relación para el caso general. 1BACH1 no lo consigue y en todo momento sigue con la idea de que si puede trazar infinitas rectas, obtendrá infinitas regiones. 2BACH1 obtiene, finalmente, la relación por recurrencia.

2BACH3 y 2BACH2 reconocen la relación por recurrencia. 2BACH3 la expresa verbalmente.

Todos los entrevistados que consideran la relación por recurrencia como generalización (1BACH2, 2BACH2, 2BACH3, y 4ESO3) habían considerado previamente la razón 2 entre el número de rectas y el número máximo de regiones. El proceso que les llevó a pasar de esta primera relación, a la de recurrencia fue que intentaron probar su conjetura inicial con varios casos particulares. De esta forma observaron la diferencia que había entre el número máximo de regiones que habían obtenido en dos casos particulares consecutivos.

Categoría 5. Autoconvencimiento del entrevistado

Con el planteamiento y desarrollo de esta tarea pretendíamos ver cómo los alumnos, a partir de los resultados que van obteniendo formulan conjeturas y si tratan o no de probarlas para su propio convencimiento.

Como ya hemos mencionado con anterioridad, 1BACH1 y 2BACH1 no están convencidos de la relación a la que llegan porque creen que necesitarían probar con más casos particulares.

3ESO1, 3ESO3, 4ESO2, 2BACH3 y 2BACH2 buscan apoyo en la entrevistadora cuando no saben cómo seguir o no están convencidos de sus razonamientos.

3ESO2 ha visto que uno de los casos particulares con los que trataba de verificar su conjetura coincide con la representación gráfica que ha obtenido. En este caso, se fía más del dibujo que de la generalización que había intuido:

E: vale. Tú esperabas que te salieran veinticuatro y te han salido veintidós. Entonces, o lo que tú has dicho estaba mal, o el dibujo estaba mal.
(3ESO) *El dibujo no puede estar mal porque tenía que cortar a cinco líneas y es lo que tiene que cortar.*

Todos los sujetos que llegan a la relación de recurrencia (4ESO3, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 2BACH3, 2BACH2, 2BACH1) ven que para un número de rectas elevado, la tarea se complica y habría que buscar otra forma de calcular el número máximo de regiones. 2BACH2 manifiesta su inconformidad con la relación general que ha encontrado:

(2BACH2) *... es que no sé cómo expresar los números... es que hay algo ahí que no... que no sé cómo escribirlo porque es que claro, si es el número de rectas que ya había, entonces necesitas saber las que había... y es lo mismo... las que había era las que había antes más...*

Hemos observado que la sensación de duda e inseguridad es la predominante en todos los entrevistados. Esto se debe principalmente a dos razones: por un lado, es una tarea a la que no están acostumbrados y no tienen una "receta" para resolverla. Por otro, parece resultarles complicado el trabajo con los casos particulares, que sería lo que en un principio, podría ayudarles a resolver la actividad propuesta.

Categoría 6. Formas de representación empleadas

La característica de la propia tarea hace que las formas de representación cambien respecto de la misma categoría de la tarea 1. Como ocurre allí, la forma de representación oral ha estado presente en todos los entrevistados. La forma de representación escrita aparece aquí en todos los casos. Esto último se debe a que es muy difícil desarrollar la tarea mentalmente. Respecto a la forma escrita, además de la representación algebraica, hay que considerar las representaciones que es necesario hacer propias para la tarea: la representación geométrica del plano, de rectas y de rectas en el plano. De ahí que los datos recogidos en la tabla sean de distinta naturaleza que los de la tarea 1.

Tabla 8

Sujeto	Forma de representación			Concreción de la tarea		
	Plano (grafica)		Leng. alg.	C. partic.	C. general	Comprob. posterior
	Ilimit.	Región cerrada				
3ESO3		X	X	X		
3ESO2	X		X	X		
3ESO1		X		X		
4ESO3	X		X		X	X
4ESO2	X			X		
4ESO1	X		X		X	
1BACH3	X		X		X	X
1BACH2		X	X		X	
1BACH1	X	X		X		
2BACH3		X	X		X	X
2BACH2		X	X		X	
2BACH1	X		X	X	X	

Todos los entrevistados fijan cuál va a ser su representación del plano y trazan las rectas para probar con casos particulares. En cuanto a la representación gráfica del plano, 3ESO2, los sujetos de 4º de ESO, 1BACH1 y 2BACH1 consideran el plano ilimitado y hacen los dibujos en el folio. 1BACH2 representa el plano como un cuadrado. 3ESO1, 3ESO3, 1BACH1 y 2BACH3 representan el plano como un rectángulo en el folio. 2BACH3 usa distintas representaciones limitadas del plano: al principio lo considera como si fuera la mesa, después como si fuera el folio y por último (por recomendación de la entrevistadora), lo considera un rectángulo en el folio.

1BACH1 es el único entrevistado que considera las representaciones gráficas limitada e ilimitada del plano. Este cambio se produce cuando se da cuenta de las ventajas de representarlo como una región cerrada para hacer el recuento de las regiones.

Los alumnos de Bachillerato son los que tienden a considerar una representación limitada del plano. Estos sujetos muestran que, a pesar de hacerlo así, entienden que están utilizando una representación de “algo” ilimitado porque pasan a trabajar con el caso general. No ocurre así con los alumnos de 3º de ESO. Estos sujetos, con cualquier representación gráfica del plano que utilicen, basan sus explicaciones en los casos particulares y no llegan a generalizar.

Cuando los entrevistados buscan una relación general para la tarea que se les plantea, aparecen distintos términos que ellos asocian al lenguaje matemático. 3ESO3 habla de *ley* en el proceso de generalización. 3ESO2 intenta escribir en lenguaje algebraico sus conjeturas para el caso general y aparecen expresiones como *ecuación* y *sistema de ecuaciones*. 1BACH3 usa expresiones como *norma fija* o *fórmula*. 1BACH2 menciona la *progresión*. 2BACH2 utiliza *formulica, derivada* y *ecuaciones de la recta.* 2BACH3 habla de alguna *regla*. 2BACH1 usa términos algebraicos como *ecuación* o *serie*.

En cuanto al lenguaje algebraico que los sujetos expresan verbalmente, 3ESO3, 3ESO2, 4ESO3, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1 recurren al lenguaje algebraico al buscar expresar su conjetura para el caso general. De éstos, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1 utilizan n o x para representar el número de rectas. 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2 y 2BACH1 llaman n al número de rectas pero se les complica el trabajo.

En la entrevista con 4ESO1 se hace referencia al término *sumatoria* (lo menciona la entrevistadora). La entrevistada sabe lo que quiere expresar por escrito pero no sabe cómo hacerlo.

Los dos únicos entrevistados que no recurren en ningún momento al lenguaje algebraico son 3ESO1 y 4ESO2.

Hemos considerado tres columnas en el apartado dedicado a la concreción de la tarea (ver tabla 8). Aparecen según el nivel de generalización al que se llega. Una característica común para todos los sujetos que emplean el lenguaje algebraico (verbal o escrito), es que lo relacionan con el proceso de generalización. Observamos en la tabla que sólo de entre los que llegan al caso general en la concreción, encontramos a los que realizan una comprobación posterior.

Categoría 7. Errores y dificultades

En este apartado emplearemos la misma terminología a la que hemos hecho referencia en ocasiones anteriores respecto a los errores. Recordemos que los errores formales eran los cometidos en los razonamientos y los errores informales eran relativos al contenido matemático. Hemos detectado errores relativos a tres conceptos involucrados en la tarea 2. Nos referimos a los errores cometidos en los conceptos de plano, región y recta.

En las dificultades que los sujetos han presentado, aquellas que aparecen con más frecuencia son las producidas en el recuento del número máximo de regiones en el trazado de rectas y las que se producen al tratar de expresar la relación que observan en los dibujos.

Tabla9

Errores y dificultades	Errores					Dificultades	
		Informales					
		Conceptuales					
Sujeto	Formales	Plano	Región	Recta	Procedim.	Recuento	Expresión
3ESO3				X		X	X
3ESO2		X	X				X
3ESO1				X			
4ESO3				X	X		
4ESO2		X				X	
4ESO1	X						X
1BACH3	X	X	X	X		X	
1BACH2							X
1BACH1		X	X	X		X	
2BACH3			X	X		X	
2BACH2		X	X	X		X	X
2BACH1	X					X	X

En cuanto a la consideración del plano, 3ESO2, 4ESO2, 1BACH3, 1BACH1 y 2BACH2, creen que el tamaño del plano influye en el número de regiones que se obtienen. Así lo expresa uno de estos sujetos:

(4ESO2) *Um... a ver... pues eso depende de lo grande que sea el plano... y del número de rectas que haga.*

3ESO3, 3ESO1, 1BACH3, 1BACH1 y 2BACH2 muestran no tener muy asentados los conceptos de región y recta.

(1BACH3) *Y región ¿a qué se refiere?*
E: región es trozo. Preguntan por las partes en las que se divide un plano cuando tú traces rectas.
Pues si trazas una recta en un plano, pues habrá una.
E: a ver, si trazas una recta en un plano, ¿cuántas regiones tienes?
Pues... por ejemplo, trazo esta recta (dibuja)*... y me da aquí el punto de esta coordenada y esta coordenada. Pues entonces el tramo que tengo es desde este punto hasta este punto.* [y dibuja un segmento] ...

Los errores conceptuales de 3ESO2, 2BACH3 y 2BACH2 se refieren al concepto de región. 3ESO2 piensa que tanto el plano como las regiones son limitados. 2BACH2 y 2BACH3 cuentan sólo las regiones cerradas que obtienen en el trazado de rectas.

3ESO3, 3ESO1 y 1BACH3 confunden los conceptos de recta y segmento.

3ESO1 y 4ESO3 confunden los conceptos de recta y línea:

(3ESO1) (Prueba a dibujar y a hacer sus cálculos...) *pero ¿las rectas tienen que ser rectas? o sea, ¿no pueden ser curvas ni nada de eso?*

Ya vimos en apartados anteriores que todos los entrevistados presentan dificultades antes de comenzar a trabajar sobre la propuesta porque no entienden el enunciado o no lo interpretan correctamente. Los entrevistados dudan y plantean preguntas continuamente. Los alumnos de 3º de ESO manifiestan no haber entendido nada cuando la entrevistadora les plantea la actividad. Los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato plantean preguntas puntuales sobre los conceptos de región, plano o recta. A los alumnos de 2º de Bachillerato les resultan más familiares los conceptos que se emplean en el enunciado.

4ESO3 comete el único error procedimental que hemos detectado en esta tarea. Este sujeto hace mal una suma.

1BACH3 tiene dificultades cuando comprueba su conjetura para casos particulares elevados. No sabe cómo comprobar si ésta es cierta.

(1BACH3) *Entonces, tengo que probar que... esto (refiriéndose al caso en que trace seis rectas) me tendría que dar el doble más siete...* (sigue probando con más dibujos) *Sí me da, son diecinueve. Me daría, o sea, seis por dos doce más siete diecinueve. Y aquí me ha dado diecinueve* (compara dibujo con lo que había pensado).

Los alumnos de 3º de ESO presentan dificultades en el recuento del número máximo de regiones porque sólo tienen en cuenta cuando la posición de las rectas son paralelas. 4ESO2, 1BACH3, 2BACH3, 2BACH2 y 2BACH1 también tienen dificultades para calcular el número de regiones. Las dificultades de 1BACH3, 2BACH3 y 2BACH2 son debidas a un error que comenten al trazar segmentos en lugar de rectas.

2BACH2 y 2BACH1 tienen problemas para expresar en lenguaje escrito la relación por recurrencia que han encontrado.

(2BACH2) *... porque no sé expresar eso.*

3ESO3, 3ESO2, 4ESO1 y 1BACH2 también tienen dificultades para expresarse en lenguaje escrito. 1BACH2 comenta que tiene la idea pero que no sabe cómo expresarla y se le complica el trabajo al recurrir al lenguaje algebraico:

Lo tengo que sacar ya... si sumas... si sumas la diferencia de rectas que hay entre... vamos a ver... a ver, te lo voy a decir con... con mis palabras.
...
Es que no lo sé escribir.

4ESO1 tiene dificultades para explicar lo que está pensando:

Vamos a ver. Hasta el caso que hemos comprobado... o sea hemos ido sumando y nos ha servido. Entonces ¿sabes lo que te digo?... es que es esto de saberlo y no poder explicarlo...

1BACH1 es el único entrevistado que considera las representaciones gráficas limitada e ilimitada del plano. Este cambio se produce cuando se da cuenta de las ventajas de representarlo como una región cerrada para hacer el recuento de las regiones.

2BACH2 tiene dificultades al representar el plano gráficamente porque cree el tamaño del plano influye en el número máximo de regiones que va a obtener.

En esta categoría hemos hecho referencia a las dificultades que los entrevistados han presentado en el desarrollo de sus razonamientos pero, teniendo en cuenta las dificultades que además tuvieron para entender la tarea que se les proponía, podemos afirmar ha resultado una tarea “difícil” para todos los sujetos.

Categoría 8. Actitud del entrevistado ante la tarea propuesta

Esta categoría, igual que ocurrió en la tarea 1, se ve condicionada por el momento de realización de la tarea durante la entrevista. En un principio los sujetos están nerviosos e incluso temerosos de hablar (como se observa en la categoría 8 de la primera tarea). Sin embargo, en la realización de la segunda tarea los nervios han desaparecido, se ha vencido el temor a lo desconocido. El análisis de la actitud de los sujetos, en este caso, hace referencias a la relación del sujeto con la tarea.

3ESO3 y 3ESO2 piensan mucho lo que van a decir, reflexionan sobre sus conjeturas antes de comunicarlas.

3ESO1 y 3ESO3 piden ayuda directamente a la entrevistadora de manera continuada:

(3ESO1) *Entonces, de momento bien, ¿y ahora qué?*

4ESO3 tiene facilidad para hacer el recuento de regiones en los casos particulares que trabaja.

Se detecta que 4ESO2 duda continuamente porque deja frases incompletas:

Pues... el número de rectas... pues... lo divides entre dos y luego, el número que te salga lo multiplicas... o sea, lo elevas al cuadrado.
...es que...

A 4ESO1 le entusiasma la actividad y lo manifiesta en todo momento. Siempre intenta responder a las preguntas de la entrevistadora y no se desanima aunque algo le resulte complicado.

1BACH3, 1BACH2 y 2BACH3 piensan que no van a poder dar respuesta a la tarea que se les plantea.

1BACH2 y 1BACH1 se pierden durante el proceso de sus razonamientos.

A 2BACH2 se le dificulta el trabajo cuando aumenta el número de rectas. Busca apoyo en la entrevistadora.

2BACH1 se muestra desinteresada. Cuanto da una respuesta, no se esfuerza en probarla o refutarla.

Todos los entrevistados manifiestan duda en los razonamientos que van realizando o ante las preguntas que la entrevistadora les plantea. Dos casos extremos en este sentido son 3ESO1 y 1BACH3, quienes después de haber comentado que existe relación entre el número de rectas y de regiones, sienten tanta inseguridad que llegan a plantear que quizá no exista ninguna relación.

A pesar de las continuas dudas, a 3ESO3, 3ESO1, 4ESO1, 1BACH3, 1BACH2, 1BACH1 y 2BACH2, les resulta una actividad entretenida e interesante a la que no están acostumbrados en matemáticas. Un caso curioso es el de 3ESO1, que quedó tan interesada que, al acabar la entrevista, se fue a su clase y volvió más tarde porque había intentado resolverla. Le entregó la hoja en la que había estado trabajando a la entrevistadora y había hecho algunos casos particulares más.

Capítulo V. Conclusiones

V.1 Introducción

En este capítulo presentaremos las conclusiones a las que llegamos después de realizar el análisis de datos. En primer lugar, damos respuesta a las preguntas de investigación que planteamos en el capítulo I. Para ello haremos referencia a los resultados obtenidos de las dos tareas que han realizado los estudiantes. En segundo lugar, presentamos algunas consideraciones sobre el trabajo de investigación que presentamos.

V.2 Respuestas a las preguntas de investigación

1. ¿Comprenden los entrevistados la actividad que se les propone?

El enunciado de la primera tarea no presenta para los estudiantes dificultad de comprensión ni de interpretación del enunciado. Está relacionada con el conocimiento implícito que los estudiantes adquieren y la entrevista se desarrolla sin incidentes a destacar en relación con este aspecto.

En la segunda tarea, todos los entrevistados presentan dificultades. No entienden el enunciado de forma inmediata y, a veces, no se interpreta correctamente. Esta situación da lugar a una excesiva intervención de la entrevistadora en la segunda tarea y a que se llegue incluso, a dar más información a los entrevistados, de la que en un principio se había previsto.

La explicación que encontramos para esta diferencia entre las dos tareas está relacionada con dos realidades. Por un lado está la "familiaridad" que para el sujeto presente la actividad que se le propone realizar. Si la tarea es "nueva", distinta a lo que están acostumbrados los estudiantes, les desconcierta. Por otro lado está el nivel conceptual al que pertenezca dicha actividad. Esto puede producirse tanto por el desconocimiento de los conceptos involucrados en la tarea como por el procedimiento que interviene en su resolución.

2. ¿Aparece el razonamiento inductivo de manera espontánea?

Todos los alumnos dan la respuesta correcta en la primera pregunta que realiza la entrevistadora. El razonamiento inductivo aparece de forma espontánea y natural cuando se les pide a los estudiantes que justifiquen dicha respuesta. Parten de casos particulares y tratan de llegar a la generalización que ya habían formulado en su respuesta inicial.

Para la segunda actividad, consideraremos la espontaneidad del razonamiento inductivo desde el momento que el alumno muestra haber entendido el enunciado. Dado que solamente tres sujetos trabajan con casos particulares de forma independiente, no podemos decir que en esta segunda tarea, llevar a cabo un proceso inductivo sea algo espontáneo en estos sujetos.

Volvemos a la diferencia que notamos en la primera pregunta de investigación ya que, en la segunda tarea, al no saber los estudiantes cómo empezar, no obtenemos información suficiente para responder a esta segunda pregunta.

3. ¿Trabajan con casos particulares? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿hasta cuando los utilizan?

Ya sea de forma espontánea, como en la primera tarea, o a instancias de la entrevistadora, como ocurre en la segunda tarea, los alumnos comienzan a trabajar con casos particulares sencillos. De cualquier modo, no toman más de cuatro casos. En ninguna de las dos tareas sistematizan la información de manera adecuada y espontánea. Cuando lo hacen, ha sido a propuesta de la entrevistadora. Esto implica que sea muy difícil formular una conjetura sobre una ley general ya que no se reúnen condiciones adecuadas para ver cualquier regularidad que se pueda dar. No obstante, cuando se les va guiando en su trabajo, son capaces de avanzar y alcanzar cotas altas de razonamiento. En la segunda tarea, que es la que presenta mayor dificultad, han encontrado relaciones como la de recurrencia, que es poco evidente. En algunos casos, incluso llegan a encontrar el término general de una sucesión. Este es un logro muy interesante teniendo en cuenta el nivel educativo de los sujetos elegidos para esta experiencia.

4. ¿Se llega a una generalización en todos los casos o se hace un razonamiento parcial?

La tarea 1 es una propiedad que aunque no se haya hecho anteriormente una reflexión explícita sobre ella, el uso implícito y constante de la misma permite una construcción de este conocimiento por parte del sujeto. Esto ha dado lugar a que la respuesta de los alumnos demuestre que, efectivamente, conocen el enunciado. De hecho, tras el planteamiento de la actividad, la respuesta la dan para cualquier suma de dos números pares.

La situación para la segunda tarea no sigue la misma pauta ya que las características de la actividad a realizar son distintas. Son mayoría los sujetos que no llegan a formular una conjetura que haga referencia a la generalización. Siete de los doce sujetos entrevistados reconocen la recurrencia. Este hecho es muy importante y demuestra que han conseguido establecer un patrón. El problema se encuentra cuando se dan cuenta de que para conocer un término de la secuencia es necesario conocer de antemano todos los que le preceden. Esto supone una dificultad casi insalvable cuando el término es alto y no se dispone de una máquina para hacer el cálculo.

5. Si se llega a una generalización ¿es por medio de los casos particulares? ¿Lo hacen intuitivamente? ¿Formulan conjeturas?

No es posible dar respuesta a este interrogante con los resultados de la primera tarea. Hemos visto que lo que se conoce de ella es la generalidad, los estudiantes no tienen, por tanto, que hacer nada para llegar a ella.

Respecto a la segunda tarea, los estudiantes sí hacen conjeturas. Usan casos particulares y formulan conjeturas. Además, para llegar a las conjeturas han de usar su intuición para establecer relaciones. Por ello consideramos que el uso de la intuición y la formulación de conjeturas no se pueden considerar como opciones separadas. Las conjeturas expresadas son distintas, con varias aproximaciones a la relación exacta que se establece entre rectas trazadas en el plano y regiones que determinan en el mismo. Estas conjeturas son falsadas por los estudiantes o probadas con nuevos casos particulares en aquellas situaciones que lo permiten.

6. Si formulan conjeturas, ¿las prueban con nuevos casos particulares?

En la primera tarea, solamente dos sujetos pertenecientes al último curso de Bachillerato comprueban su justificación para el caso general con nuevos casos particulares. Esto lo hacen cuatro sujetos para la segunda tarea y pertenecen a los cursos superiores (4º de ESO y Bachillerato). Utilizan los casos particulares para ver si satisfacen o no las leyes generales que plantean. Llegan a plantear leyes generales y las comprueban para nuevos casos particulares viendo si las satisfacen o no. Esto les sirve, en la mayoría de las ocasiones, para comprobar que las conjeturas formuladas eran falsas. Estos alumnos son los que completan las tres fases que Polya asigna al razonamiento inductivo y a las que ya hicimos referencia en el capítulo II de este trabajo.

7. ¿Qué criterios utilizan los estudiantes para validar las conclusiones a las que llegan?

Las justificaciones que los sujetos dan a la primera tarea se basan en casos particulares. Consideran lo que se ve, que es evidente en los primeros números y lo extienden al resto. Los sujetos que llegan a la justificación de su respuesta para el caso general, realizan una demostración ya que (como consideramos en el capítulo II) encadenan una serie de razonamientos basándose en propiedades que consideran demostradas.

Todos los sujetos que tratan de validar su conjetura para el caso general, lo hacen mediante casos particulares. Los entrevistados que recurren al lenguaje algebraico emplean como variables n o x y validan sus conjeturas dando valores a la variable que han considerado y comparando esos datos con los resultados que obtienen de sus representaciones gráficas.

8. ¿Quedan convencidos los alumnos con sus propios razonamientos?

Para la primera tarea, no ven necesidad de justificación. Los sujetos están seguros de su respuesta y son muy pocos los que, después de hacerles reflexionar la entrevistadora, cambian de opinión al respecto. También piensan que los casos particulares les serían suficientes para convencer a cualquiera de su respuesta.

La tarea 2 presenta dificultad de comprobación cuando el número de rectas es mayor que cuatro. Por ello, son pocos los alumnos que comprueban a posteriori que su razonamiento es correcto. Este hecho unido a las dificultades que encuentran, hace que no estén del todo convencidos de sus propios razonamientos.

9. ¿Qué tipo de representación utilizan?

En ambas tareas destaca el lenguaje oral como forma de expresión predominante. En la primera tarea, el lenguaje escrito sólo ha aparecido en dos casos.

En la segunda tarea todos los entrevistados hacen uso de representaciones geométricas propias de la misma como son la representación del plano y de la recta. Esta forma de representación surge por ser necesaria cuando los sujetos tratan de dar respuesta a la tarea. El lenguaje algebraico (ya sea oral o escrito) aparece en los estudiantes asociado al proceso de generalización.

10. ¿Qué dificultades encuentran los alumnos en las actividades que se les proponen? ¿Hay sistematicidad en esas dificultades?

En ningún momento de ninguna de las dos tareas, se les pidió a los estudiantes que pusieran por escrito su conjetura para el caso general pero se observa que ése pasa a ser el objetivo de los entrevistados que llegan a formular alguna conjetura.

La tarea 1 no presenta dificultad digna de mención en lo que se refiere a su enunciado. La principal dificultad con la que se encuentran los sujetos es el paso de la expresión verbal a la forma escrita.

La tarea 2 tiene una gran dificultad de comprensión del enunciado por parte de los estudiantes. Durante el desarrollo del trabajo, las dificultades más llamativas se detectaron en el recuento sistemático de las regiones y en la expresión por escrito de las relaciones encontradas.

11. ¿Qué errores cometen al realizar las actividades propuestas? ¿Hay regularidad en dichos errores?

No hemos apreciado que los estudiantes cometan errores de razonamiento en ninguna de las dos tareas, este hecho lo vemos normal en la primera tarea. En la segunda tarea, esta situación puede estar influida por la actuación de “guía” realizada por la entrevistadora.

Otros errores de tipo conceptual o procedimental no han aparecido de forma sistemática. Por ello no vemos relevante dejar constancia aquí. El conocimiento utilizado por los estudiantes ha sido el adecuado.

12. ¿Se pueden establecer niveles o etapas en el proceso de razonamiento inductivo?

Esta pregunta requiere para su respuesta un tipo de análisis de los sujetos en forma lineal, es decir, estudiar la evolución del razonamiento de cada uno de los sujetos. Así se podría comprobar si es posible establecer qué pueden y qué no pueden hacer los estudiantes. Creemos que será necesario, además, ampliar el colectivo de sujetos considerado, dando entrada a estudiantes de otros niveles del sistema educativo. Por estas razones, dejamos pendiente la respuesta a esta pregunta para el estudio posterior.

V.3 Algunas reflexiones

Diseño de investigación

El tipo de metodología de investigación creemos que es el adecuado para los casos en los que se pretenda estudiar los procesos de razonamiento de los sujetos. Observamos que la entrevista semiestructurada ha resultado ser un medio de recogida de datos adecuado para nuestro objetivo de investigación.

Entrevistas

La realización de las entrevistas y su posterior transcripción nos ha permitido detectar algunos fallos y carencias que consideramos que hay que subsanar. Al realizar la transcripción de las entrevistas, se han observado algunas expresiones coloquiales empleadas por la entrevistadora que debieran ser suprimidas o modificadas. Si bien es cierto que este tipo de expresiones, en algunas ocasiones, ha sido necesario para acercarse más a los estudiantes. En otro caso, la entonación empleada por la entrevistadora ha creado dudas en alguno de los sujetos y esto debiera ser cuidado para posteriores investigaciones.

El tiempo dado a los sujetos para resolver las tareas fue suficiente. Incluso algunos finalizaron antes del tiempo previsto.

Tareas

Como ya dijimos al comienzo de este informe de investigación, considerábamos este trabajo como un estudio piloto. Con él se ha comprobado la viabilidad de proponer estas tareas a alumnos de Secundaria. Creemos que el tipo de tareas es adecuado y responden (sobre todo la segunda) a la opinión de Lithner recogida en la página 33 de este trabajo. La idea es que, al tratarse de tareas matemáticas no rutinarias, el alumno se encuentra en una situación problemática donde no sabe cómo actuar, iniciándose así el proceso de razonamiento.

Existe un gran salto entre ambas tareas en lo que a dificultad se refiere. Son tareas de muy distinta naturaleza y el proceso de realización puesto en juego es distinto, por lo que creemos que sería necesario completar un estudio con varias tareas del tipo de la 1 y otro con varias tareas del tipo de la 2, con distinto grado de dificultad. Esto no impediría un estudio comparativo posterior de los resultados.

Creemos que elaborar una prueba de cuatro o cinco items y pasarla a sujetos de Secundaria y Bachillerato también dará información interesante, sobre todo en la posible elaboración de los niveles a los que hemos hecho referencia. Deberemos hacer un estudio exhaustivo de las tareas que emplearíamos en ese caso porque ello influirá en el éxito del establecimiento de niveles.

Recogida de datos

Para la recogida de datos hemos utilizado la grabación audio, las notas de la entrevistadora (durante la entrevista y después de la misma) y el trabajo escrito de los estudiantes. Consideramos que la información obtenida quedaría más completa si se realizara además una grabación con videocámara.

Análisis de datos

En el análisis de los datos de esta investigación, hemos realizado una primera aproximación al programa de análisis cualitativo de datos Nud*ist. Conocemos que es un programa muy potente y somos conscientes de que no hemos aprovechado todo su potencial. Tenemos previsto profundizar en el estudio del programa y sacarle un mayor rendimiento en la próxima aplicación.

Notas

Si, tal y como mencionábamos al comienzo de este trabajo, nuestro objetivo era dar cuenta de la formación investigadora llevada a cabo en el bienio 2000-2002, no podemos dejar de mencionar una serie de trabajos que han contribuido a la formación de la estudiante de Tercer Ciclo que presenta este informe. Estos trabajos no sólo resultan interesantes por su resultado, sino también por el trabajo en su elaboración. Hacemos referencia aquí a los trabajos que fueron realizados con la ayuda y colaboración de la tutora del presente informe (Dra. Castro), de algunos profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de algunos compañeros de la carrera de Matemáticas y del doctorado.

El orden en que se citan los trabajos es cronológico:

La imagen como recurso didáctico (Cañadas, M. C., García, M. & González, E., 2001) fue un taller de trabajo realizado en las Jornadas Thales. Los tres autores formábamos parte del grupo que, dirigido por el Dr. Luis Rico, llevó a cabo el proyecto "Fotografía y Matemáticas".

El valor de la demostración en la Educación Secundaria (Cañadas, M. C., Nieto, M. E. & Pizarro, A., 2001) fue un trabajo guiado por el Dr. Pablo Flores. Fue publicado en las actas de las Jornadas Thales.

Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos (Cañadas, M. C., 2001) fue un trabajo en el que se contó con la ayuda de la Dra. Encarnación Castro.

Llegar a ser profesora de matemáticas. Reflexiones desde una perspectiva sociocultural. (Gómez, P, Cañadas, M. C. y Peñas, M., 2001) fue un trabajo que realizamos dos estudiantes de doctorado, dirigidas por el profesor Pedro Gómez.

Didactical reflections about some proofs of the Pythagorean proposition (Cañadas, M. C., Castro, E. & Gómez, P., 2002) fue presentado en el PME26. Destacamos este congreso de investigación como el evento de educación matemática más significativo del período de formación al que hemos asistido. En él mantuvimos conversaciones personales con Lillian Nasser, Larry Sowder y David Reis. Son algunos de los autores que trabajan en nuestro mismo tema de investigación. Estos investigadores se interesaron por nuestro trabajo y nos han proporcionado información sobre los trabajos y proyectos que en la actualidad están realizando. Esto podría resultar de gran interés para la continuación de nuestra investigación.

Por último mencionar las reuniones del Grupo π durante el curso académico 2001-2002. Este grupo lo formamos los estudiantes del programa de doctorado del bienio 2000-2002 del Departamento de Didáctica de la Matemática. La intención inicial era establecer un grupo de trabajo y discusión. Se llevaron a cabo diversas actividades con el objetivo de establecer y mantener un espacio en el que hubiera lugar, tanto para cuestiones de educación matemática en nivel general, como para los problemas de investigación particulares de cada uno de los miembros. Esto ha resultado enriquecedor para el período de formación.

En todos los trabajos y actividades mencionados anteriormente, ha existido una colaboración y apoyo por parte de algunos de los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Todos los doctores y profesores que han sido mencionados son, en la actualidad, miembros del citado departamento. Esta situación supone que ha existido un clima de debate y crítica constructiva entre nosotros, que ha resultado de gran interés en mi periodo de formación.

Referencias

Almeida, D. F. & Chamoso, J. M. (2001). ¿Existen lazos entre democracia y matemáticas? *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas, 28*, 100-109.

Avital, S. & Hansen, R. (1976). Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics, 9*, 429-438.

Bakker, G. & Clark, L. (1998). *La explicación, una introducción a la fisolofía de la ciencia*. California: Mayfield Publishing Company.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, IMAG- Grenoble 1.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 183-203.

Cañadas, C., Castro, E. & Gomez, P. (2002). Didactical reflections about some proofs of the Pythagorean proposition. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education, England*, 177-184.

Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos. En J. M. Cardeñoso, A.J. Moreno, J. M. Navas & F. Ruiz, (Eds.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad, España*, 111-116.

Cañadas, M. C., Nieto, E. & Pizarro, A. (2001). El valor de la demostración en la educación secundaria. En J. Berenguer, B. Cobo & J. M. Navas (Eds.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: retos de la educación matemática del siglo XXI, España*, 167-172.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

DeGroot, C. (2001). From description to proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7* (4), 244-248.

DeVilliers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (1990). Madrid: Espasa-Calpe.

Diccionario de la Real Academia Española. (1992). Vigésima primera edición. Madrid: Espasa-Calpe.

Díez, J. A. & Moulines, C. U. (1997). *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel Filosofía.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can´t prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

Enciclopedia electrónica Microsoft Encarta '99.

Enciclopedia Gran Larousse Universal. (1987). Edición española de Plaza & Janés Editores. Madrid: Espasa-Calpe.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga, España.

Fernández, F. (1998). Pensar inductivamente. *SUMA, 27*, 117-119.

Fernández, M. L. & Anhalt, C. O. (2001). Transition toward algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7* (4), 236-241.

Ferrater, F. J. (1988). *Diccionario de Francisco José Fernández Ferrater*. Madrid: Alianza Editorial.

Fetísov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría. Lecciones populares de matemáticas*. Moscú: Editorial MIR.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching children mathematics*, 269-274.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción*. Barcelona: Gedisa.

Goetting, M. (1995). *The college student´s understanding of mathematical proof.* Doctoral Disseration. University of Maryland, U.S.A.

González, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Madrid: Editorial Trotta.

Gutiérrez, A. (2002). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. En M. F. Moreno, G. Gil, M. Socas & J. Godino. *Investigación en Educación Matemática*. Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería. 83-94.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, *France*, 45-51.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 5-23.

Ibañes, M. & Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas, 28*, 39-59.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid, España.

Jaffe, A. & Quinn, F. (1993). "Theoretical mathematics": towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 29* (1), 1-13.

Jones, L. (1996). A Developmental approach to proof. *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, 109-154.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 165-190.

Maher, C. & Martino, A. (1996). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (2), 194-214.

Maher, C. A., Steencken, E. & Deming, L. (1996). Are you convinced? Proof making in young children. *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, 226-234.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Martínez, A. (2000).*Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of proof for the sum of two even numbers. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education, England*, 353-360.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 47-68.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de María Moliner.* Madrid: Editorial Gredos.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática, 2 (4)*, 7-15.

Movshovitz-Hadar, N. (1996). On striking a balance between formal and informal proofs. En M. deVilliers & F. Furinghetti (Eds.). *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education*, *Spain*, 43-52.

Nasser, L. & Tinoco, L. (2002). Argumentation and proofs in mathematical teaching. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education, England*, 305.

NCTM. (1991). *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Neubert, G. A. & Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington D.C.: National Education Association.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Pedemonte, B. (2000). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Holland*, 33-40.

Pitts, J. (1979). Number patterns. *Mathematics in School, 4*, 7-9.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1967). *Le découverte des mathématiques*. París: DUNOD.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Radford, L. (1994). Enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 3* (6), 21-36.

I.E.S. Padre Manjón de Granada. (Reglamento de organización y funcionamiento. Documento interno.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica*. Barcelona: Antrophos, Editorial del Hombre.

Santamaría, C. (1995). *Razonamiento y comprensión*. En M. Carretero, J. Almaraz & P. Fernández (Eds.).

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática, 4* (2), 16-24.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197-210.

Skovsmose, O. (1990). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Solow, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. México: Editorial Limusa.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 23-40.

VanAsch, A. G. (1993). To proof, why and how? *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, *2*, 301-313.

VanDormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

Vega, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza Universidad.

Volmik, J. D. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras*, 7-10.

Zack, V. (1997). “You have to prove us wrong”: Proof at the elementary school level. En E. Penkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Finland*, 291-298.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA

Anexos del Trabajo de Investigación Tutelada

María Consuelo Cañadas Santiago

Septiembre, 2002

Anexo I. Transcripciones de las entrevistas

En el anexo 1 presentamos las transcripciones de las entrevistas que fueron realizadas a estudiantes de E.S.O. y Bachillerato. Son un total de 12 entrevistas. Cada entrevista va identificada por el sujeto a quien fue realizada (cuya terminología ya fue explicada), por la fecha y la hora en la que se llevó a cabo. En cada una de ellas se distinguen dos partes, la relativa a la tarea 1 y a la tarea 2.

A lo largo de la entrevista (y de forma distinta a como lo hemos considerado hasta el momento), lo que el alumno habla va identificado por las iniciales de su nombre. Esto se ha hecho así para simplificar la escritura. La entrevistadora está identificada con E.

El orden en el que aparecen los sujetos es el orden ascendente de los niveles a los que pertenecen (3º de E.S.O., 4º de E.S.O., 1º de Bachillerato y 2º de Bachillerato). Dentro de cada nivel, el orden es el mismo en el fueron realizadas las entrevistas.

SUJETO: 3ESO1

FECHA Y HORA: 14-1-02, 9:30-9:52

TAREA 1

E: ...yo te voy a hacer unas preguntillas relacionadas con matemáticas y me tienes que contestar lo que a ti se te ocurra que sea. Pero no hay respuestas buenas ni malas, así que no te preocupes en pensar "uf, esto no será..." lo que tú digas es válido porque lo que quiero saber es cómo respondes. Vale?

J: venga.

E: vamos. La primera actividad que te propongo es: ¿qué resultado da al sumar dos números pares?

J: par. (respuesta inmediata)

E: a ver, ¿qué da?

J: par, da un número par.

E: ¿par? A ver, explícame por qué.

J: porque sumar dos... yo que sé, porque sumar yo qué sé, un número par, y siempre si le sumas dos no?, pues es otro número par porque el impar es el que está en medio. Entonces tú tienes un número par y si le sumas 1 –que es impar-, pues ya tienes un impar. Y si le sumas 2, que ya es par –el primer número par- pues ya está.

E: vale. ¿Y eso te valdría para cualquier número?

J: se queda pesando

(parece no haber entendido la pregunta)

E: quiero decir, tú estás diciendo números y a lo mejor estás pensando en algún caso concreto, no?

J: sí.

E: pues ahora imagínate que una persona te dice a ti que para cualquier número, por muy alto que sea, si tú sumas dos números pares, da otro número par. Porque tú me estás diciendo que le estás sumando 2...

J: pero si tú le sumas 2, 4, 6, lo que le quieras sumar, como si le quieres sumar 1000, da igual, es lo mismo, siempre da par.

E: ¿por qué? A ver. Porque tú me estás diciendo: si le sumo 2, da par.

J: sí.

E: vale, si le sumas 1, tienes un impar. Y si le sumas 1 más, es el siguiente que es par. Ahora: tú sumas dos números pares cualesquiera... tú estás sumando dos, a lo mejor estás sumando el 1784 y el 2320.

J: sí.

E: a ver. ¿Cómo explicarías eso?

(se queda pensando)

E: tú imagínate que te digo que yo no estoy muy segura de eso, a ver lo que me dirías.

J: porque tú... a ver, si lo pones para sumar, lo pones, entonces, el número par es sólo por la última cifra, entonces si sumas, si lo sumas los dos, pues siempre te tiene que dar números menores que 10 y son pares. Por ejemplo, lo que has dicho, 1784. El último es el 4. Y el otro, 2320. Pues 4 con 0 son 4, que es par tambien, o sea que es par.

E: o sea que lo razonarías sobre un término.

J: sí.

TAREA 2

E: vale. Entonces te voy a proponer la siguiente actividad a ver cómo la explicas. Dice: determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

(pone cara de no haber entendido nada)

E: ¿hay algo que no entiendas?

J: sí, nada.

E: vamos a ver. “Determinar el mayor número de regiones...” ¿El plano sabes lo que es?

J: no.

E: el plano mira, por ejemplo, la mesa puede ser un plano.

J: vale. ¿Y las regiones?

E: las regiones son trozos. O sea, tú vas trazando rectas y entonces las regiones son los trozos en los que se divide. ¿Me explico?

J: sí.

E: tú imagínate que tienes la mesa. Una recta sí sabes lo que es, ¿no?

J: sí.

E: pues tú imagínate que tienes también una recta y la extiendes sobre el plano...

J: y lo partes en 2.

E: entonces tienes...

J: 2.

E: tienes 2 regiones.

J: ¡ah! Vale sí.

E: pues así. Entonces yo te pido determinar el mayor número de regiones que puedes obtener según vayas trazando rectas.

J: pero ¿cuántas rectas tienes que trazar?

E: las que tú quieras.

J: pues tienes el doble de rectas, ¿no? (parece que quiere contestar rápido)

E: a ver, piénsalo un poco, tómate tu tiempo, no te preocupes.

J: a ver, si tú coges 1 recta, te quedan 2. El doble, vale. Si coges 2 rectas, te quedan... uff!

E: a ver, tú piénsalo.

J:... te quedan 4, ¿no? Me estoy liando.

E: a ver.

J:... una por aquí, otra por aquí, 3 y 4. Salen 4.

E: mira a ver si de otra forma te salen más.

J: esto son 3 rectas, ¿no?

E: sí.

J: y esto son 4 partes. Pues no sé. Y con 4 (rectas) son 8.

E: ten en cuenta que te estoy diciendo el mayor número de regiones.

J: pero es que el mayor número de trozos es hasta ocupar toda la mesa, hasta ocupar todo el plano, ¿no? Cuando ya no puedas poner más.

E: pero lo que yo te quiero preguntar, ¿la única forma que tienes de trazar las rectas es como tú lo has hecho ahí?

J: no.

E: pues lo que tienes que mirar es, de todas las formas que tú crees que hay, cuándo obtienes el mayor número de regiones. (Ve rápido otras formas en las que obtiene más número de regiones de las que había calculado antes y me pregunta si es eso) A ver.

J: (prueba a dibujar y a hacer sus cálculos...) pero ¿las rectas tienen que ser rectas? O sea, ¿no pueden ser curvas ni nada de eso?

E: no. Las rectas tienen que estar rectas, no pueden ser ni curvas ni con picos.

J: vale.

(está trazando todas las rectas paralelas)

E: pero... a ver, una cosa, no tienen porqué ser paralelas.

J: ah, vale.

E: ¿sabes lo que te quiero decir?

J: sí, sí.

E: tú estás dibujando ahí todas paralelas excepto un caso.

J: a ver, 1, 2 y 3 (y traza 3 rectas no paralelas)... pues ya nos han salido un follón, ya nos hemos liado... (sigue haciendo sus cálculos) 3, 4, 5 y 6. Cuando no las trazas paralelas salen más, ¿no?

E: ten en cuenta que te estoy pidiendo el número máximo. O sea, que si no las trazas paralelas y salen más, pues tendrás que ir a esos casos. ¿No?

J: sí. Entonces nos vamos a los casos en los que las rectas que se trazan no son paralelas.

E: vamos a ver. Ahí, ¿cuántas rectas has trazado? (señalo último de sus dibujos, el de las rectas no paralelas)

J: aquí 3, las mismas, y hay 6, 6 partes. Pues cuando no son paralelas tienes más.

E: vale. Y ¿por qué has empezado por 3 rectas?

J: ¿por qué he empezado...? ¿Por cuántas tengo que empezar?

E: por las que tú quieras, pero las que te resulten más fáciles. Empieza por los casos más sencillos.

J: ¿con 1?

E: por ejemplo.

J: con 1 salen 2. (y seguidamente traza 2 rectas)

E: a ver con 2.

J: si las haces así paralelas, salen 3... es que tengo que hacer que se crucen. Es que si se cruzan, ya forman más partes.

E: pues venga, sigue por ese camino a ver qué te sale.

J: (va probando con diferentes formas de trazar 2 rectas y comparando el número de regiones que obtiene para cada forma) Salen 4. Pero es que esto es lo mismo que si lo haces así (y sigue trazando rectas), también salen 4. ¿Ahora pruebo con 3?

E: a ver, vamos a ir probando.

J:... salen 6.

(la entrevistadora observa que no traza las rectas del borde a borde del plano, si no que las traza desde el borde hasta cualquier punto en el interior del plano)

E: ten en cuenta una cosa, la recta no la puedes cortar en mitad del plano. ¿Me explico? O sea, tú tienes la mesa...

J: ¡ah! Tiene que atravesarla entera.

E: exacto. Si tú trazas una recta... porque la recta no tiene fin, entonces es como si tú coges una cuerda y la extiendes, tienes que llegar desde esta punta de la mesa, desde aquí (le señalo un punto del borde) hasta allí o hasta donde tú quieras llegar, pero hasta el final.

(la alumna vuelve a sus dibujos y acaba de trazar la recta hasta el borde del plano)

J: entonces ¿así sí está bien, no?

E: así ya sí llegaría hasta el final, exacto.

J: ... 5, 6 y 7. Salen 7.

E: aja.

J: ¿lo más que pueden salir son 7? (Se queda pensando)... espera... esto es un follón. (Risas) Es que así no vamos a terminar nunca, me parece a mí.

E: a ver.

J: pues no sé.

E: ya tienes unos cuantos casos, ¿no?

J: sí.

E: a ver, ¿qué casos tienes ya?

J: a ver. Los casos en los que las haces paralelas, en los que no son paralelas. En esos casos salen menos que si las haces cruzadas, ¿no? Que si las haces que se crucen.

E: entonces tú ya has hecho que se crucen, porque si te están pidiendo el máximo...

J: claro, eso es, salen más cruzándolas.

E: ujum.

J: y ahora con la manera de cruzarlas pues... (y no sabe cómo seguir)

E: a ver. Entonces, ¿qué has ido obteniendo? Ahí tienes mucha información.

J: bueno.

E: no la tienes organizada pero tienes mucha, ¿no? Porque tú has hecho muchos dibujos ahí.

J: entonces, a ver. De los que se cruzan, por ejemplo... en 2, tienen que salir 4 como en éste y éste (y señala sus dibujos). Con 3... 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Me han salido una vez con 6 y una vez con 7.

E: entonces de esos dos, ¿cuál cogerías?

J: el de 7.

E: el de 7 porque te están pidiendo el número máximo.

J: entonces, de momento bien, ¿y ahora qué?

E: ¿y ahora qué?

J: ¿ahora tengo que decir cómo se tienen que cruzar para que salgan mas?

E: tú crees que con 3 rectas podrían salir más.

J: ¿pueden salir más?

E: no sé. Y si ya lo tienes con 3, a ver qué podrías decir porque con 3 rectas lo manejas más o menos bien pero ya te has dado cuenta de que es más difícil que con 2.

J: claro.

E: cuando tengas 4, será todavía más difícil que con 3, y que con 2...

J: sí, sí.

E: pues cuando tengas 20 ya...

J: y cuando tengas el máximo...

E: ... increíble. Si te dicen con 100 rectas, tú dices: me puedo morir aquí, haciendo dibujitos. Entonces, ¿de qué forma podrías tú decir, cuando tengo tantas rectas, tengo tantas regiones? Y que no lo tengas que dibujar, ¿se te ocurre alguna forma?

(se queda pensando)

J: no.

E: a ver.

J: ¿y por igualdades sale?

E: ¿cómo por igualdades?

J: por ejemplo, si con 3 rectas... por regla de tres, ¿no? Yo qué sé.

E: ¿por regla de 3? Pues no lo sé.

J: mira: (hace una regla de tres) Si con 3 rectas salen 7, pues con las que sean salen x.

E: pero ¿eso te vale para los casos que tú tienes? Tú has hecho, mira (y le voy señalando los dibujos que tiene en los folios) aquí has hecho el de 1 recta. El de 2 lo tienes en varios sitios, por ejemplo éste. Y éste es el de 3. Entonces tú estás diciendo: a lo mejor lo puedo hacer con regla de tres y decir si tengo 3 rectas, me salen 7 regiones...

J: no, pero eso no sale así porque con 2 me saldría... vamos a probar...

E: ¿sabes lo que te quiero decir?

J: sí. Con 2, tengo 4. Entonces con 3... serían 6... no, no me sale porque salen 7.

E: entonces, a ver.

(se queda pensando un poco)

J: pues no sé.

E: piénsalo un poquito, no tenemos prisa, no te preocupes.

J: ... ni idea.

E: tienes algunos casos, para 1, para 2 y para 3. La pregunta sí la entiendes, ¿no?

J: sí, sí.

E: a ver si sale algo más.

J: pero lo que sale... es que si lo haces así paralelas, sí te sale por regla de tres pero si lo haces así, no.

E: claro, pero te están pidiendo el número máximo...

J: es decir, que por regla de tres no se puede... pero ¿guardan alguna relación unas con otras?

E: sí. Eso sí te lo digo pero, ¿a ver qué relación encuentras? A ver si se te ocurre algo...

J: pero es que igual se pueden hacer de forma que salgan más... es que no lo sé. Igual se pueden hacer 3 rectas y que salgan más, entonces... no sé.

E: ¿tú crees que puede haber? A ver, piénsalo un poquito más. Tú has trazado ahí las rectas de una manera determinada, ¿no?

J: sí, que se crucen lo más posible.

E: vale, entonces ¿tú crees que se puede hacer de otra forma que se crucen más todavía? Con 3, más o menos lo puedes manejar eso.

J: sí. Pero no, yo creo que no (no cree que se puedan trazar de otra forma para obtener más regiones). Porque a ver, ésta (y sigue con sus dibujos) se puede cruzar sólo con ésta y con ésta, porque se podría cruzar así pero...

E: entonces ahí se cruzan las 3.

J: sí, y es el que más.

E: entonces ese caso es el que más había y obtienes 7 regiones, no puedes obtener más.
J: vale... pues el número... es que como no sé cuántas rectas tienes que trazar, pero tienes que hacer que todas se crucen para que te salgan las máximas, pero no sé.
E: no sabes cuántas pero tú estás poniendo ahí que con un número determinado de rectas obtienes un número determinado de regiones.
J: sí.
E: entonces, ¿cómo puedes poner esa relación?, ¿cómo lo puedes relacionar?... ¿se te ocurre alguna forma en la que haya relación entre el número de regiones y número de rectas que trazas?, ¿se te ocurre algo? Si no, no pasa nada.
J: se me ocurre esto (haciendo referencia a la regla de 3) pero no se me ocurre nada más. Pero por ahí no se puede.
E: piénsalo un poquitín más y si no te sale, pues ya está, lo dejamos ahí, está bien. ¿Cómo lo relacionas?
J: pero es que si has trazado 3 rectas y se han cruzado las 3 y me han salido 7... no sé.
E: bueno, pues lo dejamos ahí, no pasa nada.

SUJETO : 3ESO3

FECHA Y HORA: 14-1-02, 9:55-10:20

TAREA 1
E: bueno, ¿de qué va esto?, ¿qué tienes que hacer? Ya lo he comentado antes un poquito. Estoy haciendo un trabajo de investigación. Entonces te voy a hacer algunas preguntas, esos datos los analizaré y demás. Sobre las preguntas que te voy a hacer, no hay respuestas buenas ni malas, tú me contestas según creas que es y ya está, sólo quiero ver cómo contestas. No te preocupes por otro tipo de cuestiones porque yo luego ni le voy a pasar notas al profesor ni nada de eso. Entonces, vamos a ver. Te voy a dar un par de folios por si necesitas escribir algo y te propongo la primera actividad. ¿Qué resultado da si sumas dos números pares?
(lo piensa un poco)
JL: otro par (responde con inseguridad, viéndolo evidente pero sin atreverse a afirmalo con rotundidad)
E: ¿por qué?
JL: no sé.
E: cuéntame, explícame lo que vas pensando.
JL: pues que si sumas, yo qué sé, dos números 2 y 2 que son los dos pares. Pues te sale 4 y sigue siendo par...
E: aja.
JL: ... tienes que meter un número impar para que te dé el otro impar. O dos impares o dos pares... a ver. Dos pares es par y dos impares será... (se queda pensando un poco) ¿par también? no
E: a ver.
JL: el 7 es impar, ¿no?
E: aja.
JL: ¿y el 14 es par?
E: ¿tú qué crees?
JL: que sí, ¿no? Pues... dos impares da par, dos pares da par. Un impar y un par da impar.
E: vale. Vamos a ver. Ahora esos tres razonamientos que tú has hecho. Vamos a centrarnos en el de la suma de dos pares da uno par. ¿Por qué? Tú me has dicho antes que si coges 2 y 2, como los dos son pares, los sumo, la suma me da 4 y 4 es par. ¿No?

JL: sí.
E: Ahora, ¿si yo te digo otros números más grandes?
JL: pues igual, ¿no?
E: 3528 y 7420.
JL: pues sigue siendo impar... No, par.
E: ¿por qué?
(se queda pensando)
JL: por el último número, porque... ¿no?
E: a ver, tú explícame.
JL: yo por lo que me dijo el profesor, que cuando la última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8, pues es par.
E: y siempre que tú tengas dos números pares y los sumes, ¿cómo me aseguras a mí que la última cifra es 0, 2, 4,...?
(se queda pensando)
E: tú me dices que si yo cojo dos números y los sumo... dos números pares y los sumo, la última cifra 0, 2, 4,... pero ¿por qué?
JL: porque cuando los sumes tendrá que dar eso, ¿no? Si da otra cosa, pues ya...
E: no sé. A ver, explícamelo. Porque y si yo te digo ¿y si encuentro unos números pares, que los sumo y su última cifra no me da ni 0, ni 2, ni 4,...?
JL: de eso no hay.
E: ¿no? ¿por qué? Piénsalo un poquito, si no tienes que contestar rápido.
(se queda pensando)
E: a ver. Yo te digo a ti: pues sí. Si sumas el 2 y el 4, pues te va a dar 6, que es par. Vale, con números chicos se ve fácil. Pero ¿si el número es muy grande y no te quieres hartar de sumar?
JL: pero es que sólo tienes que usar la última cifra, es que las otras no importan, sólo es la última.
E: entonces, sólo te fijas en la última cifra... y siempres que tú tengas dos pares, fijándote en la última cifra, explícame por qué la suma te va a dar un número cuya última cifra va a ser 0, 2, 4, 6 u 8.
JL: no sé. Si hay dos pares, pues será par. Si no, pues no. Tendrá que ser eso.
E: tiene que ser, ¿no? ¿Tú lo ves evidente?
JL: pues sí. Yo es que no veo otra cosa.
E: vale, pues ya está. No pasa nada, hasta ahí, muy bien.

TAREA 2

E: te voy a plantear otra actividad. Dice así: determinar el mayor número de regiones que se pueden determinar al trazar rectas sobre un plano.
JL: eso no lo he entendido.
E: vale, empezamos. ¿Sabes lo que es un plano?
JL: sí.
E: supongamos que es la mesa, ¿vale?
JL: sí.
E: entonces tú tienes que trazar rectas y las rectas, pues tienen que ser rectas, no pueden tener curvas ni picos. Entonces tienes que ver en cuantos trozos se divide el plano trazando esas rectas.
JL: sí.
E: y tienes que ver el número máximo.

JL: tendrás que ver la medida mínima. El mínimo pues... (no sabe cómo seguir y dibuja segmentos en lugar de rectas)

E: no, vamos a ver. La recta tiene que ser... tú imagínate que el plano es la mesa. Pues la recta, si tú la empiezas aquí y la quieres acabar en aquel filo, tienes que llegar hasta allí, no te puedes parar aquí, por ejemplo (y le señalo un punto de la mesa que no es del borde). ¿Vale? Entonces, si la empiezas aquí y la quieres hacer con esta dirección (y le señalo una dirección determinada), tienes que llegar hasta el filo aquel de la mesa.

JL: entonces saldrían 2 nada más, ¿no? ¿sabes lo que te digo?

E: en ese caso.

JL: o haciendo más, ¿no?

E. a ver. En ese caso, ¿cuántas rectas habías trazado?

JL: una. Y saldrían 2.

E: pues venga. Ese sería un caso, ¿no?

JL: sí.

E: ahora, con otro número de rectas, ¿cuántas regiones máximas obtendrías?

JL: el doble, ¿no? Si trazas... Si pones 2, te salen... pues una más. Si pones 2, te salen 3. Si pones 4, te salen 5.

E: ¿siempre?

JL: yo creo que sí.

E: a ver.

(dibuja)

JL: sí, siempre te sale una más de las que pongas.

E: (fijándose en los dibujos) ¿de qué forma has trazado tú esas rectas siempre? Unas respecto a otras, ¿cuál es la posición que tienen?

JL: paralelas, ¿no?

E: sí, y ¿por qué las has trazado paralelas?

JL: me da igual, las puedes trazar como quieras, ¿no?

E: vete al caso más fácil, 2 rectas. Con 2 rectas, ¿cuántas regiones obtienes?

JL: 3, ¿no? ¿O no es así?

E: ten en cuenta que te estoy pidiendo el máximo número de regiones que obtienes. Mira a ver si con 2 rectas te pueden salir un número mayor de regiones que el que tú has obtenido.

(dibuja)

JL: ¿no puedo quedarme en la mitad? (refiriéndose a que si la recta tiene que ir de extremo a extremo del plano) ¿tiene que ser... (señalando hasta el filo del plano)?

E: tiene que ser hasta el final, sí.

JL: ¿se pueden cruzar?

E: sí. Como quieras, de la posición de las rectas no te digo nada. Yo sólo te digo que tienes que obtener el máximo número de regiones.

JL: 4, ya está.

E: 4. ¿Y antes cuántas habias obtenido, cuando las hacías paralelas?

JL: 3.

E: luego, ¿cuál tendrás que coger?

JL: éste (señalando el caso en el que ha obtenido 4 regiones).

E: ése porque que te están pidiendo el número máximo de regiones, ¿no? Pues venga.

JL: ¿y ahora qué hago?

E: tú dime... porque tú has hecho con recta que traces muy fácil, ¿no? Con 2 también parece que es fácil. Con 3 y con más... tú imagínate que te digo ¿y si tienes 20 rectas? Tú dices ¡jo! ¿y eso lo tengo que pintar? Como que la cosa se complica un poquillo, ¿no?

JL: sí.
E: entonces a ver si tú puedes sacar alguna relación ahí.
(se queda pensando)
E: mira a ver si con otro número de rectas lo puedes hacer también. Lo has hecho con 1 y con 2, hasta ahora.
JL: pues con 3.
E: a ver lo que sale.
(dibuja y se queda pensando)
JL: pues me saldrá el doble... ¿no?
E: ¿sí?
JL: si pintas 3 y las cruzas, pues te saldrá el doble, ¿no?
E: mira a ver si hay alguna forma de trazarlas que obtengas más. Ahí (y le señalo a su dibujo) has obtenido 6, ¿no?
JL: sí.
E: mira a ver si puedes obtener alguna más.
(se queda pensando)
JL: me han salido 7 ahora.
E: ¿y ahora qué? A ver, ¿cómo has trazado esas rectas para obtener 7?
JL: pues no sé.
E: ¿has seguido alguna reglilla o simplemente...?
JL: a ojillo.
E: a ojillo, ¿no?
JL: tengo ojo, yo qué sé.
E: tienes ojo, ¿no?
JL: vamos a ver.
(risas)
E: pues venga. ¿Ahora qué?
JL: ya más no se sacan, ¿no?
E: ¿tú crees que hay alguna forma, así a ojillo como tú lo haces, de obtener más de 7?
JL: no creo que haya. Vamos a hacer otra si no.
E: a ver, usa el ojillo.
(dibuja más)
JL: yo creo que no, ¿no?
E: pues venga, yo creo que tampoco. Lo has hecho de forma lo más enrevesada posible, ¿no? ¿Y ahora qué hacemos? Ya lo has hecho con 3, ¿no? Ahora si yo te digo, pues los números de antes... 20. Tú dices: pues si con 3 he tenido que afinar el ojillo, con 20 ya... entonces, ¿cómo lo podríamos hacer de forma que yo te dijera a ver con 20 rectas y tú me dijeras... pues tantas regiones es el número máximo que se pueden obtener?
JL: habrá que sacar una ley de esas, ¿no?
E: a ver, ¿cómo harías una ley de esas, como tú dices?
(risas)
E: ¿se te ocurre alguna forma?
JL: pero ayúdame un poquillo con esto, ¿no?
E: ¿en qué quieres que te ayude? ¿qué te pasa? ¿dónde te atrancas?
JL: no sé, ¿cómo empezar?
E: ¿cómo empezamos?, a ver. ¿De dónde sacamos una ley de esas?
JL: ... yo no hago leyes.
E: pero ¿tú qué quieres relacionar ahí? Tú has dicho: yo quiero sacar una ley pero, ¿por qué quieres sacar una ley? Cuéntame.

JL: para no tener que empezar ahí a hacer con todos...

E: para no tener que hacer todos los casos uno por uno. Pues venga, y ¿las leyes esas a qué te suenan? ¿qué tendrá que relacionar ahí en ese problema que tenemos?

JL: pues a las líneas estas.

E: las rectas.

JL: si las cruzan, si no las cruzan... y todo eso, ¿no?

E: ¿y qué?... fíjate lo que te está pidiendo el problema: el número máximo de regiones, ¿no?

JL: sí.

E: y tú para sacar el número máximo de regiones, ¿qué vas haciendo?

JL: voy trazando las rectas, las voy cruzando y eso.

E: vale. Entonces ahora ¿cómo podemos sacar una ley?

(piensa)

E: las leyes esas ¿qué te van a relacionar?

JL: cuál es el número máximo de regiones.

E: ¿en función de qué?

JL: de las rectas que se utilizan.

E: y a ver cómo puedes hacer eso. Organiza un poco la información que tienes, ¿qué has ido obteniendo? Con 1 recta...

JL: he obtenido 2 regiones.

E: 2.

JL: con 2, 4.

E: eso es.

JL: con 3, 7.

E: eso es, entonces la ley esa que tú quieres sacar, ¿tendrá que relacionarte esos números?, ¿no?

JL: claro.

E: entonces, ¿cómo lo hacemos? A ver.

(fin cara A ½)

(se queda pensando)

JL: ¿no tendrá que ver esto con los números pares y todo eso?

E: no, es otra actividad.

JL: es que como con los pares sale el doble y con lo otro no...

E: cuidado porque con los pares no sale el doble, el uno no es par.

JL: bueno, ya, pero sale uno par.

E: a ver, ¿cómo lo hacemos? Se supone que la ley que tú saques tiene que servir para esos casos, ¿no?

JL: claro.

(se queda pensando)

JL: ¡uf! Ayúdame, que esto es muy complicado.

E: piénsalo un poquillo, a ver qué sale. ¿Ves alguna relación?

JL: sí, ¿no?

E: a ver, cuéntame qué relación hay. Que te vas a ayudar tú solito.

JL: a ver, si... cuando cruzas las dos líneas, siempre te va a salir una más, ¿no? Y si tienes 2, y las cruzas con otra las 2, pues te va a salir dos veces más, ¿no?

E: te entiendo pero, ¿cómo escribes eso?

JL: no sé yo cómo escribirlo.

E: a ver, haz otro caso más a ver si te sale.

JL: ¿con una recta más?

E: sí. A ver si con el otro ya... porque tú vas buscando una relación y parece que los números que tienes ahí no te ayudan mucho, ¿no?

JL: no.

E: pues a ver si teniendo otro más, nos da alguna ideilla, ¿no?

JL: ¿con cuál pruebo ahora?

E: a ver, lo has hecho con 1, con 2, con 3...

JL: ¿con 4 lo hago?

E: pues sí, porque como lo hagas con más, te vas a hartar de hacer rectas.

JL: con 4 tiene que dar 8.

(dibuja)

JL: ¡uf! Me salen 10 ahora.

(se queda pensando)

E: pues te voy a dar una buena noticia, mira si hay otra forma en la que salgan más, es que yo estoy viendo otra.

JL: ¿otra?

E: sí. O a ver si es que te has saltado alguna.

JL: ¿hay más maneras de que salgan más?

E: sí. Hay una manera en con la que salen más.

(prueba y recuenta en distintos dibujos)

JL: 16...

E: te decía alguna más y has pasado de 10 a 16.

JL: no, no. 8,... 16.

E: vamos a ver. 1, 2, 3,... ¿has trazado 3? No eran 4: 1, 2, 3 y 4. Vale. Ésta (le señalo a uno de los dibujos) la has contado dos veces, ¿no?

JL: no. ¡Ah! Sí, sí. Entonces salen...

E: 11, porque si ésta la has contado dos ¿no?

(cuenta)

E: es que ésta no la puedes... ya tienes 4, ¿no? Has trazado: 1, 2, 3 y 4. Y tienes 1, 2, 3, ...7, 8, 9, 10 y 11...

JL: no, no esa no.

E: a ver, repite el dibujo a ver.

(dibuja de nuevo y traza rectas)

E: llevas 3, ¿no?

JL: sí, ¿y ahora dónde pongo la otra?... aquí mismo. A ver: 1, 2,... 10.

E: te falta una por contar y la tienes ahí.

JL: ¡ah! 11.

E. ahí está. Esa ya te digo yo que no hay forma de obtener más.

JL: ¡uf! Eso ya lo tienes tú ahí calculado, ¿eh?

E: yo es que me he hartado de hacer dibujos también.

JL: ¿hasta cuántos has llegado?

E: unos poquillos más que tú.

JL: a ver.

E: a ver si ya vemos ahí la relación que buscábamos, ¿no?

JL: ya creo que está.

(se queda pensando)

JL: de aquí a aquí nos salen 2, ¿no? (va señalando los números que ha obtenido)

E: aja.

JL: de aquí a aquí nos salen 3, de aquí a aquí nos salen 4. Luego de ahí tiene que salir algo ya, ¿no?

E: a ver. ¿Cómo organizamos lo que tenemos?

JL: esto es muy complicado, las matemáticas.

E: va, va, va saliendo, ¿no?

JL: esto ya... a ver...

(sigue pensando)

JL: ¿y aquí qué hago? Ayúdame un poquillo.

E: a ver, has sacado alguna relación, si me lo estás diciendo tú. De aquí a aquí has dicho que van 2, de aquí a aquí van 3, de aquí a aquí van 4. Entonces cómo relacionas eso... ¿con qué querías tú relacionar esos números?

JL: con las líneas que...

E: con las líneas que trazas. ¿Y cómo lo haces?

JL: yo qué sé.

E: vamos a recordar un poco lo que estamos buscando. Tú quieres sacar el número máximo de regiones según el número de líneas que traces. ¿Vale?

JL: sí.

E: y tú has hecho una serie de casos. Y tú ves que de uno a otro hay una relación. Entonces, ¿cómo relacionas tú ahora esos números – que son el número máximo de regiones y que has visto ahí algo- con el número de rectas que tú has trazado?

(se queda pensando)

E: si se te ocurre algo, bien. Si no, no pasa nada, no te preocupes, no vayas a perder el sueño.

JL: esto tiene que salir.

E: este es de los problemas que pican, ¿eh?

JL: ya ves.

E: te veo toda la tarde trazando rectas de un lado para otro, ¿no?

JL: sí, ahora me dedicaré en las clases...

E: pero no se lo digas a la gente de qué va, que me queda todavía otro por hacérselo y si no lo va a saber el otro antes de empezar.

JL: esto tiene que salir.

E: a ver... si no sale la ley, no te preocupes, lo dejamos ahí y ya está.

(sigue pensando)

JL: pues las líneas que utilices... te va a salir...

JL: si esto se parece a uno que hicimos ya hace tiempo, de las llamadas de teléfono.

E: a ver.

JL: sí, que es que cada vez que llamaban a la casa, pues entra una persona más que la anterior. Pues esto es igual.

E: venga, venga, a ver si te sale la ley.

JL: cada línea que has utilizado pues... de las partes que te salen es uno más que el de antes.

E: ¿y cómo lo expresas eso para que te dé una ley?

JL: lo de x+1 y todas esas cosas.

E: a ver, ¿y cómo pones eso?

JL: si las x son las rectas que utilizas, ¿no?

E: sí.

JL: tienen que salir una más que la que te ha salido antes.

E: ¿y cómo pones eso? ¿sabes cómo ponerlo?

JL: no.
E: ¿no? La idea la tienes pero no sabes cómo escribirlo, ¿no? Inténtalo y si no, lo dejamos.
JL: ¿y a la otra le ha salido?
E: no, no te lo voy a decir.
JL: no, dímelo si ya ves tú, la otra es una empollona.
E: ¿y tú no eres empollón?
JL: no.
E: ¿ suspendiste el año pasado en matemáticas?
JL: que va... bueno sí, sí me quedaron.
E: ¿y el trimestre pasado qué tal?
JL: sufi en matemáticas y bien en refuerzo de matemáticas.
E: está bien, no está mal.
JL: bueno.
E: es que cada uno lo habéis explicado de una forma.
JL: es que ella es más experta.
(risas)
E: pero aquí da igual porque esto no es una cosa que habéis dado, cada uno lo hace de una forma. ¿Crees que hay alguna forma de sacarlo o no sale con el x+1 ese que me habías puesto ahí?
JL: no sé.
E: venga, te dejo un poquitín y cuando tú quieras lo dejamos.
JL: yo no tengo ni idea, esto es muy complicado para mí.
E: bueno ya está, pues lo dejamos ahí.

SUJETO: 3ESO2

FECHA Y HORA: 15-1-02, 13:40-14:30

TAREA 1
P: ¿se lo estás haciendo a todos los cursos? ¿a qué niños les estás haciendo las entrevistas?
E: 3º y 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato. A los más chicos no.
P: ¿de mi curso has hecho más clases?
E: sí, ayer se lo hice a dos niños de otro 3º... bueno, vamos a ver. Las preguntas que te voy a hacer no tienen ni respuestas buenas ni malas: simplemente tienen tus respuestas, las que tú les des. No esperes que... tiene que dar 3 y a ti no te da 3, y por eso lo tienes mal. ¿Vale?
P: aja.
E: me interesa cómo vas contestando a lo que yo te voy preguntando.
P: vale.
E: son dos actividades y son muy sencillas. Y si no salen, pues no llegas hasta el final, que es donde tú crees que deberías llegar, pues hasta donde llegues.
P: hasta donde se pueda, ¿no?
E: y ya está, ¿vale? Vamos a ver, la primera pregunta que te hago es ¿qué resultado da al sumar dos números pares?
P: (se queda pensando un poco) otro número par.
E: ¿sí?, ¿por qué? A ver, cuéntame.
P: la pregunta es ¿qué resultado da dos números pares, al sumarlos...?
E: sí, al sumar dos números pares.
P: dos números pares cualesquiera, ¿no?
E: sí.
P: pues normalmente, cuando se suman... a ver, espérate.

E: a ver.

P: vamos, porque cada vez que sumas dos números pares cualesquiera, el resultado suele ser también par. Bueno, suele ser, que siempre es par.

E: aja, ¿por qué?

P: ¿por qué? Pues porque...

E: ¿por qué sabes que es siempre?

P: pues porque cuando...

E: (le noto que estaba haciendo cuentas mentalmente) tú estabas haciendo ahí unas cuentecillas de cabeza, ¿no?

P: claro, estaba sumando dos números pares, por ejemplo sumaba 2 y 2, 4. 6 y 6, 12. 8 y 8, 16. Y como en los tres casos ha dado un número par y en matemáticas normalmente cuando algo ocurre, suele ocurrir varias veces, pues supongo que será siempre, ¿no?

E: a ver, tú imagínate que yo te digo que vale, pero ¿por qué va a ser siempre? Porque tú me dices 2 y 4, 6; 2 y 6, también; 8 y 8... no sé, los que hayas sumado. Esos te salen pero y ¿de ahí cómo dices tú que siempre pasa eso? Explícame un poquitín eso.

P: porque en matemáticas... como los números en matemáticas son también composiciones de números, se supone que si los números básicos, que son del 0 al 10, que son los que se usan, se van combinando. Si los pares de los números básicos se van sumando y dan números pares, en el resto que son combinaciones de éstos será todo igual... No me he explicado muy bien, ¿verdad?

E: sí, sí te has explicado bien. Creo que sí te he entendido pero, a ver, repítemelo... ¿tú estás convencido de lo que estás diciendo?

P: yo estoy convencido. A ver, en matemáticas, cualquier número, por ejemplo el 2560. Eso, si lo analizas, aparte de ser 2x1000... así, sigue siendo una composición de números, de una serie de números, es decir el 2, el 5, el 6... ¿he dicho el 2560, no?

E: sí.

P: ... y el 0. Y esos números que he escogido son de una serie, que son del 0 al 10. Bueno, del 0 al 9.

E: vale.

P: por tanto si de esa serie, que es la serie básica, cuando tú sumas dos números pares, si te da otro resultado par significa que todos los números que se den por combinaciones que sean pares más la suma de otro número par, será par...

E: pero date cuenta de lo que has dicho... si la suma que te da es un número par...

P: vamos a ver, por ejemplo tú tienes la serie ésta, ¿no? Del 0 al 9.

E: aja.

P: y coges de esa serie dos números pares. 2 y 2, por ejemplo. Y sale 4. Ahora de esa misma, coges otros dos números, 4 y 6... y así hasta todas las posibilidades que tengas, siempre del 0 al 9. Por tanto, si el resul... si como todos los números que hay en... como todos los números que existen son composiciones de estos 9 números, cuando sean pares... sí, porque son... cuando sean pares, si lo sumas con otro número par, saldrá par.

E: vale.

P: no ha sido una explicación... falta por ahí algún toque pero... lo he explicado lo mejor que sé...

E:... yo lo he entendido. Si lo quieres explicar de otra forma, yo te dejo que lo expliques de otra forma.

P: no, yo creo que ya está.

E: ¿tú así estarías convencido y convencerías a cualquiera?

P: sí, yo creo que sí.

E: tú crees que sí... venga, pues te voy a proponer otra actividad a ver qué opinas.

TAREA 2

P: ¿la apunto o algo o...?

E: como tú quieras. Yo luego me llevaré lo que hagas ahí (señalo al folio) pero si no te hace falta escribir nada, pues ya está.

P: aja.

E: dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

P: ¿mayor número de regiones?

E: ... de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

P: pero vamos a ver, tú tienes un plano. Cualquier plano, ¿no?

E: sí.

P: pero ese plano está... es decir, ¿tiene límite? Es decir, por ejemplo tú te vas a este plano (coge el folio) y ves que tiene de límite estos cuatro, los cuatro... cómo se llama... (se refiere a los bordes del folio)

E: los cuatro lados.

P: los cuatro lados, eso. Y el hipotético plano del que estás hablando también tiene límite, ¿no? ¿o no?

E: vamos a ver. El plano nunca tiene límite.

P: aja.

E: ... pero las regiones tampoco. ¿Me explico? O sea, el plano es ilimitado pero es que las regiones tampoco tienen límite. Lo que pasa es que si a ti para representarlo te es más fácil cogerte un planito chico, pues te coges un planito chico.

P: es decir, que es como si cogiéramos esto (señala al folio), sin fin.

E: ... eso... en la práctica, a la hora de dibujar, lo puedes considerar así.

P: tú reduces, ¿no?

E: exacto.

P: entonces, ¿y qué dice? Si tú trazas una línea recta...

E: si tú trazas líneas rectas.

P: ¿líneas?

E: sí, no te especifica.

P: a ver, ¿puedes repetir la pregunta?

E: sí, por supuesto. Dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

P: pero es que eso es muy... es como muy poco explícito, ¿no? porque es como decir... si tú, por ejemplo, pones una línea en un plano, te acaban saliendo dos regiones.

E: sí.

P: si pones... dos líneas sobre un plano, y luego pones otras dos líneas aquí... que sigan por todo esto (hace referencia a su dibujo), tienen que salir al final 3 regiones.

E: aja.

P: (sigue trabajando sobre su dibujo) la que está desde aquí hasta aquí... desde aquí hasta aquí y luego, la que está entre medias. Y así sucesivamente. Pero ahora, la pregunta que te hago, cuando dice regiones, ¿son regiones que estén limitadas por dos... por algún punto?

E: no. Eso que tú has planteado aquí (sobre el dibujo), de que tú trazaras estas dos rectas, tendrías tres regiones.

P: o sea, lo que yo he dicho, ¿no? Vale. Entonces, cuantas más líneas traces, mayor número de regiones tienes.

E: vale, o sea que ves ahí una relación.

P: que es proporcional, claro.

E: vale. Entonces a ver cómo lo expresarías eso. Con una recta, ¿cuántas me has dicho que obtenías?

P: dos.

E: vale, ¿y con dos?

P: y con dos rectas... bueno, a ver... trazas una, supongamos que la trazamos una de aquí a aquí (va dibujando conforme habla), y acaban saliendo dos regiones.

E: aja.

P: ... si trazas tres (sigue dibujando), te acaban saliendo tres regiones... si trazas una línea, te salen dos regiones. Si trazas dos, te salen 3.

(estos datos los ha obtenido trazando todas las rectas paralelas entre sí)

E: ten en cuenta que te estoy diciendo el número máximo de regiones. Con dos rectas, ¿cuál es el número máximo que puedes obtener?

P: ¿con dos rectas?

E: sí.

P: ¿el número máximo?

E: sí.

P: tres.

E: ten en cuenta otra cosilla. Ahí has dibujado las rectas en una posición determinada, ¿no?

P: sí.

E: yo no te he dicho cómo son esas rectas...

P: ya, bueno, pero yo...

E: es que a lo mejor puedes trazarlas de otra forma que obtengas más regiones.

P: ya, pero la cuestión es que yo he puesto dos rectas, yo no puedo ponerlas... si yo he puesto dos rectas, las puedo poner así o las puedo poner así (las sigue considerando paralelas entre sí), pero siguen siendo dos rectas.

E: lo que yo te quiero decir es... tú dibujas la primera recta. Y la segunda recta, ¿cómo la has dibujado ahí (le señalo al dibujo) respecto a la primera?

P: la he dibujado paralela, pero la puedo dibujar... en cualquier sentido.

E: aja, eso es lo que te quiero decir.

P: otra cosa, si yo en vez de poner esta recta así paralela, la hubiese puesto aquí, hubiese obtenido cuatro. Ahí estamos, ¿no?

E: ahí estamos. ¿Ya si sabes lo que te quiero decir?

P: sí, sí. Es decir... vale, ya.

E: que esas rectas las puedes trazar como te dé la gana, pero que sean rectas, no me vayas a hacer una curva porque entonces ya, no vale.

P: no, no, son rectas.

E: pero la posición de unas respecto a otras es como tú quieras. Es que yo veía que siempre las ibas trazando paralelas.

P: claro, claro, lo más normal, ¿no?... bueno. Y entonces, ahora qué es, ¿el número máximo al trazar dos rectas?... vale, pues muy bien. Entonces, si las trazamos así, te salen tres... y así, salen cuatro... y ya si las pones en diagonal, te siguen saliendo cuatro. Por tanto el número máximo sería cuatro regiones, ¿no?

E: parece que sí porque no hay otra forma de ponerlas, ¿no?

P: claro.

E: a ver, ¿y ahora qué?

P: ¿ahora qué?

E: ¿qué se te ocurre?

(parece que no sabe cómo seguir)

E: tú fíjate que con uno y con dos es muy fácil. Pero si yo voy aumentando el número de rectas, ¿qué pasa con el número de regiones?

P: que aumenta.

E: ... que aumenta, ¿y cómo?

P: dependiendo de cómo ponga... que ¿cómo aumenta? Pues proporcionalmente no, ¿o sí? Depende. Porque es que la cuestión es que aquí puedes poner las rectas como... si fuese proporcional, sería si tú pusieses las rectas siempre iguales. Entonces, si yo ahora pongo la tercera recta así (la dibuja paralela a una de las dos primeras), me salen una, dos, tres, cuatro, cinco, seis... seis. Me salen seis cachos.

E: aja.

P: y si yo pongo la siguiente recta así, ya me salen más (no la dibuja paralela a ninguna de las anteriores). Bueno, que no me sale proporcional. Es decir, me salen más y no me sale proporcional a la tercera. O sea, que para el número de regiones fuese proporcional, las rectas tendrían que ser de la forma de la que era la anterior. No, no me he explicado bien. Es decir, que el número de regiones va aumentando según el número de rectas que trazas.

E: sí.

P: pero que ese aumento no es proporcional. ¿Te lo explico?

E: a ver. No te líes con lo de proporcional porque como lo que tú vas buscando es el número máximo...

P: ya pero... eso, eso, claro.

E: a ver cómo cuadras ese número máximo. ¿Cómo hayas el número máximo de regiones de tres rectas, de cuatro, de siete, de veinte...? ¿cómo harías eso?

P: que ¿cómo lo haría?

E: sí. Tú lo has hecho para una recta y para dos, ¿no?

P: sí.

E: y me has dicho que conforme aumentamos el número de rectas, aumenta el número de regiones.

P: lógico, sí.

E: parece que sí. Bueno, el número máximo de regiones, eso no lo podemos olvidar. Entonces, ¿cómo seríamos nosotros capaces de decir cuál es el número máximo de regiones que se obtiene, por ejemplo con diez rectas?

(lo piensa un momento)

P: si tú pones diez rectas, que ¿cuál es el número máximo?

(se queda pensando)

P: a ver. Cuando tú tenías dos rectas, el número máximo era cuatro.

E: aja.

P: cuando habíamos puesto tres rectas, el número máximo que hemos conseguido... era seis.

E: y ¿no se pueden obtener más?

P: a ver, espera un segundo. Hemos hecho estas dos rectas, ¿no?

E: aja.

P: y el número máximo es cuatro. Ahora tenemos que poner tres rectas, ¿no? Y las podemos poner, por ejemplo, una así... ¿se tienen que cortar entre sí? No, ¿no?

E: como quieras, sobre eso no te dice nada.

(se fija en el dibujo, viendo cómo puede trazar las rectas)

P: a ver, habría que poner la otra recta y dependiendo de cómo la ponga, influirá la otra. Así que la mejor forma sería cortando así, que como ya sabemos el número máximo de esta (se basa en el número máximo de regiones que tenía con dos rectas)... si lo hago así me salen seis (prueba sin dibujar, posibles posiciones de la tercera recta)... y así me salen siete.

E: luego ya has obtenido, de alguna forma, otro número que es mayor. ¿Y ves que haya alguna forma de obtener más regiones?

P: ¿con tres líneas?

E: sí.

P: si queremos saber el máximo...

(se queda pensando, mirando fijamente a los dibujos)

P: no. Vamos, así a simple vista... pensándolo a lo mejor salen, pero... de todas maneras, a ver si esto está bien... yo he trazado las líneas así una, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete. O sea que está bien, ¿no?

E: sí, sí está bien contado.

P: o sea, son siete regiones las que he sacado ahí, ¿no?

E: sí, exacto. ¿Y habrá otra forma de sacar más?

P: ya no.

E: vale.

P: pues ya está.

E: ¿y ahora qué?

(no sabe qué hacer)

E: vamos a organizar un poquito la información que tenemos, ¿no?

P: sí. A ver, por ejemplo con dos líneas... el máximo es cuatro. Con tres líneas, el máximo es siete hemos dicho, ¿no?

E: sí.

P: ahora con... vamos a ver si... con cuatro líneas... voy a ver si sacamos algún tipo de... de algo que sea periódico para saber qué es. A ver, espera.

(dibuja)

P: así saldrían una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. Y no parece así que haya... (y prueba de otra forma) Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. Así me salen menos, así que nada. La forma con la que más... con la que se saca el máximo es así (señala el dibujo), que salen once.

E: ¿sigues algún tipo de sistema a la hora de tratar de obtener el máximo número de regiones o lo haces a ojo?

P: eh, no. Así... por ejemplo, lo que he hecho con este es que cuantas más líneas cortasen con esta línea (refiriéndose a la última que traza)...

E: ¿con la nueva que trazas?

P: con la nueva, pues más número de regiones tienen que salir. Y aquí he hecho lo mismo. Aquí he cortado... he cortado una, dos, tres.

E: aja.

P: y salen once.

(hace cálculos y observa sus dibujos)

P: ¿ves? Por ejemplo aquí, acabo de observar que aquí, de cuatro a siete líneas – que es el máximo-, es decir, del máximo al máximo, hay tres. Y ahora de éste a éste, también aumenta, y aumenta uno.

E: sí.

P: es decir que a ver si... si está bien lo que yo digo, con cinco líneas, el máximo debería ser dieciséis... vamos a comprobarlo.

E: a ver.

(fin de la cara B de ½)

(se pone a dibujar de nuevo)

(después de un rato pensando)

E: a ver, ¿cómo va eso?

P: estoy a ver si saco cuál es la línea que corte más líneas. Pero claro, tendría que cortar a cuatro y no me va a salir... el máximo al que llego son tres (se refiere que sólo es capaz de trazar la última recta de forma que corte a tres de las rectas anteriores)... (sigue probando y haciendo cálculos sobre sus dibujos)... ya está (ha conseguido cortar a las cuatro rectas anteriores). Me ha salido un poquillo curvada pero que... si fuese recta, cortaría a cuatro y saldría... uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis... por arriba... bueno, siete. Y luego por abajo ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince y dieciséis.

E: aja. Parece que sí, ¿no?

P: o sea, que es proporcional. No, vamos a ver... no sé.

E: ahí hay algo, ¿no?

P: hombre, se puede decir que estas dos magnitudes (se refiere al número de rectas y al número máximo de regiones) sí son proporcionales. Cuando una aumenta, la otra aumenta; y cuando una disminuye, la otra disminuye. Y ahora la pregunta que me hacías, ¿cuál era?

E: la pregunta era determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

P: vale, entonces, al trazar rectas... y tú me habías dicho diez rectas, ¿no?

E: por ejemplo.

P: por ejemplo. Si con... dos líneas, se trazan cuatro regiones, con diez líneas se trazarán x. Pero es que lo que acabo de hacer... no, a ver. Éstas sí son proporcionales (se fija en los casos en que las rectas eran paralelas) ¿o no? A ver, te lo digo en un plis. ¿Tienes una calculadora?

E: no.

P: bueno pues 3 por 11, 33; y 7 por 4, 28. Así que éstas no son proporcionales. Así que lo de la regla de tres no puede ser.

E: yo te digo una cosa, si fuera cierto lo de la regla de tres, ¿por qué has hayado el número máximo de regiones para tres y para cuatro si ya lo tenías con dos?

P: ya pero no había caído en eso, acababa de caer en que podía salir...

E: en que podía salir por ahí, ¿no? Pues venga, a ver.

P: en que podía salir por ahí, pero está claro que no.

(se queda pensando)

P: pues habrá que hacer algún tipo de ecuación. A ver, el número de regiones es x, vale.

E: x es el número de regiones, ¿no? le has llamado.

P: sí. A ver, dos líneas... es decir x por diez es igual a dos por cuatro. Es una ecuación así un poquillo chunga...

E: explícamela.

P: que si... hombre es que... es decir, que el número de líneas, al multiplicarlo por diez...

E: vamos a ver, ¿x es el número de regiones o el número de líneas?

P: el número de regiones.

E: vale.

P: es decir, que el número de regiones al multiplicarlo por diez... es decir al multiplicarlo por las líneas, es igual al número de líneas multiplicado por las regiones.

E: y esa igualdad, ¿cómo la obtienes?

P: ¡uff!

E: o sea, ¿por qué sabes que eso es igual a lo otro? (señalando a los dos miembros de la igualdad)

P: pero es que además no puede ser igual.

E: o ¿por qué tú lo pones que es igual?

P: no, es que no puede ser igual. Porque como es que el... en ecuaciones lo que sé es esto, tiene que haber una igualdad.

E: a ver.

P: y no puede ser así porque no... este número, es decir, el número x, que es el número de regiones tiene que ser mayor que dos. Es decir, que este número, x por diez...

E: ¿por qué lo multiplicas por diez, el número de regiones?

P: ¡uff! Para intentar obtener algún tipo de igualdad. Es decir, si yo multiplico esto por esto, sería igual... no vamos, que esto no puede ser. Porque el número resultante de esto... es decir, suponiendo que supiese las regiones, el número de regiones por las líneas tiene que ser mucho mayor que éste. Vamos, mucho mayor, que tiene que ser mayor que éste.

E: aja.

P: eso ya por lógica. Entonces vamos a llamarle x, que es el número de líneas...

E: el número de líneas es x, ¿no?

P: no, el número de regiones, perdón.

(se queda pensando)

P: y tengo que saber el número de líneas... no, el número de regiones que salen con diez líneas. El número máximo de regiones.

E: con diez. Bueno, te he dicho diez por ejemplo...

P: sí, sí, no pero prefiero con diez...

E: bueno, tú hazte la idea con diez.

P: sí, sí, prefiero hacérmela con diez.

E: yo te he dicho un número alto porque llega un momento... tú te has dado cuenta que con una, te ha salido del tirón. Con dos ya has pensado un poquitín. Con tres y con cuatro ya tenías que andar ahí con mucho cuidado... y conforme va aumentando el número de líneas, te va a ser más difícil hacer el dibujo. Entonces lo que te quiero hacer ver es qué pasa si te dicen un número de rectas que te es difícil de manejar a la hora de dibujarlas. Entonces eso cómo lo resolverías de forma que no tuvieras que dibujar todas las rectas y pasar ahí mucho tiempo.

P: es que no sé si hacerlo por ecuación. Probablemente no me salga porque hace muchísimo tiempo que no doy ecuaciones. O intentarlo hacer con estas dos magnitudes (se refiere a número de rectas y número máximo de regiones). Que no sé si puede salir, pero por lo menos intentarlo, ¿no?

E: pues venga, inténtalo a ver.

P: es decir que cuando hay una línea cortada, hay cuatro. Cuando hay dos líneas cortadas, hay siete. Es decir, que cuando haya... no porque aquí ya no puedes decir... es decir, si no sé el número de regiones, no sé el número de líneas cortadas.

(se queda pensando)

P: vamos a ver. Yo qué sé, tiene que se con una ecuación, eso está claro.

E: a ver.

P: tiene que ser con una ecuación porque una x tiene que salir por algún lado.

(pensando)

P: si x es igual a nueve líneas... se puede hacer como sea, ¿no? ¿Aunque sea a la “cuenta de la vieja”?

E: sí, sí, como tú quieras.

(pensando por un rato)

P: ... a ver...

(pensando)

P: porque como, por ejemplo aquí. Eran dos líneas, el doble era el máximo de regiones. Tres líneas... el doble... ¡ah no! ¡uy! ¡Ah no! Sí, ya es verdad. Es el doble... y... es el doble y antes le había sumado... es que no sé muy bien cómo explicarlo. Es decir, el más diez significa que cuando aquí hay cinco líneas, al anterior se le habían sumado cinco.

E: sí.

P: cuando había seis líneas, al anterior se le habían sumado seis.

E: aja.

P: es decir, que por ahí tiene que haber algún tipo de respuesta.

E: ¿cómo lo escribes eso? O ¿cómo me lo explicas eso?

P: cuando hay dos líneas, el doble era el número de regiones.

E: sí.

P: cuando había tres líneas, era el doble del número de regiones... (se queda pensando)

E: sí.

P: ... más... ¡uf!... uno. Sí.

E: sí.

P: cuando eran cuatro líneas era el doble de las líneas, que era ocho, más tres veces el anterior.

E: más tres por siete, veinti...

P: no, no, más tres veces el número que le habías sumado aquí.

E: aja.

P: cuando eran cinco líneas, era el doble, más el doble de lo que le había sumado aquí, es decir tres porque aquí le había sumado tres, que te dá once. Cuando haga seis líneas, eso es igual al doble que es igual a, que es doce, más... nueve.

(parece no estar muy convencido)

P: a ver, vamos al principio, cuando había cuatro líneas era el doble más tres. Cuando había cinco líneas era el doble más seis. Cuando había seis líneas era el doble, es decir doce, más el doble del anterior, es decir doce otra vez.

E: aquí le habías sumado tres.

P: aquí esto se ha multiplicado por dos para llegar a lo tienes que sumar aquí.

E: ... y aquí le habías sumado seis, ¿no? Aparte de lo del doble, ¿no?

P: sí, sí.

E: aquí le sumabas tres y aquí seis... y ¿entonces aquí?

P: aquí doce. Y entonces sería doce más doce, no más nueve. Que es igual a veinticuatro. Eso habría que comprobarlo. ¡Ay! Tendría que cortar, seis... cinco líneas tendría que cortar.

(se queda pensando)

P: ¡ah! tenía que cortar cinco, ¿no?

E: aja.

P: ¡ah! vale, vale.

(dibuja)

P: vale, vamos a ver, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete... ocho, nueve, diez, once, doce,... trece, catorce, quince, diediséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidos y veintitrés. Vamos a ver, me tiene que faltar, habré contado mal.

E: ¿cuántas te salían? Aquí, ¿te salían veinticuatro?

P: sí.

E: y esto lo habías obtenido como dos por seis más... es que fíjate, en el once habías hecho cuatro por dos más tres. En el dieciséis habías hecho cinco por dos más seis. Y ese seis, ¿cómo lo descomponías?, ¿de dónde sacabas ese seis?

P: del doble de tres.

E: y ahora este, con seis líneas has hecho el doble de seis más...

P: otra vez el doble de seis. Es decir, el doble del que le hemos sumado aquí.

E: ¿el doble del que sumas en el caso anterior?

P: claro.

E: ahora a ver si eso...

P: ya está, tenemos una, dos, tres, cuatro, cinco, seis líneas (cuenta en dibujo). Vale. No, no. Salen cinco.

E: sí, uno, dos, tres, cuatro y cinco.

P: y ahora trazo la línea esa que corte a tres... (piensa cómo la traza de forma que obtenga el mayor número de regiones)... es que tendría que cortar a cinco y no sé... a ver si así... (le cuesta dibujar la recta sin torcerse y no consigue obtener las regiones).

E: espera, que tengo por aquí una regla, es chiquitilla pero te puede servir para eso.

P: ... corta a cinco. ¡Ay! Bueno, aquí se supone que... vamos a ver, se supone que... aver, se supone que en vez de pasar justo por el medio, pasa por aquí, por encima.

E: sí, vale.

P: un poco chapucero pero bueno... uno, dos, tres, cuatro, cinco que me saldría ahí, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidos...

E: y ahí ¿qué pasa ahora?

P: ¡que nos faltan dos!

E: según lo que tú habías dicho, faltarían dos.

P: claro. O sea que lo que yo había dicho está mal.

E: puede ser. Una de las dos cosas está mal. O está mal lo que tú habías dicho... no te cuadra.

P: no, no me cuadra.

E: vale. Tú esperabas que te salieran veinticuatro y te han salido veintidos. Entonces, o lo que tú has dicho estaba mal, o el dibujo estaba mal.

P: el dibujo no puede estar mal porque tenía que cortar a cinco líneas y es lo que tiene que cortar.

E: pues entonces dale más vueltas a los números...

P: ... y estos números tienen que estar mal. Es que yo antes había pensado que eran proporcionales. ¿Entiendes? Porque claro, como estaba pasando de éste al doble, y éste no es proporcional.

E: pues ¿cómo puedes eso de otra forma? A ver si se te ocurre otra forma de ponerlo.

(el alumno mira el reloj)

E: quedan unos minutillos.

P: x, que es el número máximo.

E: aja.

(sigue haciendo cálculos sobre sus dibujos pero se pierde...)

E: entonces con seis líneas, ¿cuántas regiones te salían?

P: con seis líneas me salen, serían veintidos.

E: veintidos.

P: ... y son cinco... x es igual a las líneas...

E: ¿por qué cuando dices líneas, pones un diez?

P: porque son las líneas que me has dicho y estaba haciéndolo con el número de líneas...

E: para el caso particular ese, ¿no?

P: sí. Estaba pensando algo pero se me ha ido de la cabeza, a ver... es igual... ¿puede ser esto? x es igual al doble de diez más y, que es el número que se suma siempre aquí (va señalando la ecuación).

E: y ¿quién sería y? El número ¿de qué?

P: igual que cuando eran cuatro por dos más tres. Ahora cinco por dos más seis. Cuando sea diez por dos más lo que sea y.

E: a ese lo que sea le llamas y. Entonces para cualquier número tú aquí podrías poner, por ejemplo, si yo te digo que mires a ver qué pasa con cien líneas, ¿tú cambiarías directamente en esta fórmula el diez por cien?

P: sí.

E: ¿y seguiría siempre siendo válida esa reglilla?

(se queda pensando)

P: así, claro.

E: tú dices que el número de regiones es igual a esto (señalando la fórmula) pero, ¿tú cómo sabes quién es y?

P: es que no lo sabemos.

E: entonces ¿cómo lo calculas? ¿me explico?

P: haciendo una ecuación de estas de x e y. Es decir, que además nos faltaría por aquí un dato más, ¿no?

E: es que fíjate, tendrías tres ingónitas según tú estás escribiendo aquí, ¿no? Tendrías la x, éste que ahora tú lo sabes porque yo te he dicho diez pero, ¿y si fueran cien?

P: pues pones cien ahí y ya está.

E: vale, y ya está. Vale, pues eso no sería incógnita. Y aquí, tampoco sabemos lo que vale esto.

P: claro, entonces tienes dos incógnitas.

E: ¿y cómo lo resuelves?

P: haciendo la ecuación que hay escrita.

E: sí pero una ecuación con dos incógnitas, ¿cómo resuelves eso?

P: ... y además sería... (se queda pensando)

E: o ese y dime cómo es, a lo mejor hay alguna forma de saber qué le estás sumando ahí.

(pensando)

E: ¿no se te ocurre nada?

P: no. Porque es que lo que te digo estaría bien si luego tuviese como para hacer las ecuaciones con dos incógnitas, con parte por arriba y parte por abajo (él cuenta las regiones por dos partes, las que quedan por arriba de la última recta que traza y las que quedan por abajo)... que sería... no se me ocurre, sería por ejemplo... es que no sé... es que esto está mal. Porque la cuestión es... lo de que el número máximo es el doble de líneas más algo...

E: aja.

P: eso está claro. El problema es cómo sacar el algo y luego sacar la x. Y ese algo, si fuese proporcional... bueno, es proporcional, ¿no? Estas dos cantidades son proporcionales, ¿no?

E: esas dos sí.

P: entonces ya puedo sacar el número de líneas cortadas.

E: no, porque sí...

P: siete por una es siete...

E: así no te sale la proporcionalidad.

P: ¡uff! Hago una cruz…

E: bueno, ya está. Lo dejamos ahí, no pasa nada. Está muy bien.

P: es que... ese es el tema, es que...

E: no te ha salido lo que ibas buscando pero está bien. Todo lo que has ido pensando es interesante. Tú no te preocupes, cuando acabe de hacer esto, os diré cómo se acabaría por donde has empezado, ¿vale?

(348)

SUJETO: 4ESO2

FECHA Y HORA: 17-1-02, 9:25-10:20

TAREA 1

E: te voy a contar un poquito... no hay ni respuestas buenas ni malas. O sea, no va a ser el resultado que tenga que dar tres o cinco. Entonces tú me vas contestando lo que se te vaya ocurriendo y con tranquilidad, que esto no va a suponer ni un suspenso ni un aprobado, ¿vale?

EM: vale.

E: a ver. Te voy a dar un par de folios, por si necesitas escribir algo. A ver, la primera preguntilla es qué resultado da al sumar dos números pares.

EM: ¿dos números pares?

E: aja. (se queda pensando) ¿Tú qué crees que da?

EM: otro número par.

E: ¿y eso? ¿estás segura de eso?

(la estudiante duda)

E: ¿por qué me has contestado eso? A ver, cuéntame un poquito.

EM: porque... yo creo que da otro número par.

E: ¿por qué?

EM: a ver, es que lo he pensado...

E: ¿y lo has dicho a boleo, no? Era par o impar, pues 50%.

EM: no, porque...

E: no, a ver.

EM: vamos a ver que piense más detenidamente.

E: sí, sí, tú piensa, si no hay prisa.

(después de un rato pensando)

E: ¿tú por qué me has dicho que un número par?

(sigue pensando)

EM: por... a ver. Yo qué sé, porque yo he pensado en... dos... son dos números pares que los sumas...

E: sí, tú sumas dos números pares.

EM: siempre dos números pares, no sumas un número par y un impar, ¿no?

E: no, dos pares.

EM: pues yo creo obtienes par, yo qué sé.

E: a ver. ¿Por qué me has dicho tú que da un número par?

EM: yo he pensado en varios números pares, los he sumado y me ha dado un número par.

E: vale, tú lo has hecho con algunos números pares, ¿no?

EM: sí.

E: y ¿tú con eso puedes decir que la suma de cualesquiera dos números pares, los que a ti se te ocurra coger, la suma te va a dar un número par?

EM: no, no lo puedo decir... con seguridad.

E: y ¿cómo podrías convencer a alguien de que lo que tú estás diciendo es verdad?

EM: pues con una ecuación, creo que es... es que ¿cómo era? Era x más x+2...

E: vamos a ver, ¿a quién llamas tú x?

EM: x al número.

E: sí.

EM: entonces, el número es x. Entonces le sumas x+2 y para que sea un número...no, bueno.

E: y ¿ x+2 qué es?

EM: otro número, o sea, el mismo número de antes más dos para que siga siendo par. Bueno, x antes era un número par.

E: x un número par...

EM: entonces le sumas x... el mismo número pero más dos para que sea par.

E: pero si tú a x... ¿x es un número cualquiera o tiene que ser un número par?

EM: un número par. Porque si es un número impar, si le sumas dos, va a seguir siendo impar.

E: aja. O sea, tú llamas x a un número par.

EM: sí.

E: pero ¿puedes asegurar que x sea un número par? Porque x puede ser cualquier número, en principio, ¿no?

EM: sí.

E: entonces, ¿cómo arreglamos eso?

EM: ¡uf!

E: porque x, si tú le llamas x a un número par... pero bueno, es par porque tú quieres que sea par, pero no tiene porqué ser par. Tú imagínate que la x vale uno.

EM: ya.

E: es impar, ¿no?... y ahora súmale dos, tienes tres.

EM: uf... yo qué sé.

E: a ver, ¿cómo podrías hacer que ese número fuera par?

EM: pues poniéndole delante, multiplicándolo delante por dos... 2x.

E: ¿2x? ¿2x sabes ya que es par?

EM: si un número... si un número lo multiplicas por dos sale par, ¿no?

E: no sé, tú dime, a ver.

(lo piensa)

EM: sí, sale par cuando lo multiplicas por dos.

E: vale, entonces ya tienes 2x que es un número par. ¿Y ahora qué?

EM: ehhh... (no sabe qué decir, parece que se ha perdido)

E: ... tú pensabas que la suma de dos números pares, te da otro número par. Y tú dices... una ecuación había por ahí, ¿no?

EM: sí.

E: y has dicho que hemos llegado a que 2x es un número par.

EM: sí.

E: pues ahora te digo convénceme de que la suma de dos número pares, da un número par.

EM: entonces tendría 2x más otros 2x más 2. O sea, el mismo número más dos. Si un número lo multiplicas por dos sale par, le vuelves a sumar ese número pero se sumas otra vez dos para que siga siendo par.

E: y por ejemplo eso te serviría, ¿qué te digo yo?... para dos más cuatro, ¿eso me sirve?

EM: sí.

E: sí. ¿Y para dos más diez? ¿Te sirve?

EM: también.

E: ¿sí?

EM: yo qué sé, sale par...

E: sí, sale par. Pero tú has dicho 2x y luego, el siguiente sería 2x+2 y ¿qué pasa con dos más diez?

(silencio)

E: ¿es el siguiente? El siguiente a dos es diez.

EM: no.

E: entonces, ¿cómo? ¿No te serviría para ese caso, no?
EM: no.
E: a ver.
EM: pues... que sea para todos los números...
E: a ver cómo haces eso.
(se queda pensando un rato)
EM: ... es que para todos los números, tendría que ser... que le sumases más de dos, pues yo qué sé, pues cuatro o seis...
E: ... y si te digo... vamos a ver, estábamos con dos más diez...
EM: sí.
E: son números así facilitos. Y yo te digo, ahora hazme, ¿cómo sería válido eso que tú estás diciendo para 1740 y 3516?... que no fuera sumándolo.
EM: ¿cómo que no fuera sumándolo?
E: que no fuera comprobando que la suma de dos pares es par... entonces tú, lo que hayas obtenido... tú has obtenido una ecuación, ¿no?
EM: sí.
E: pues que esa ecuación sirva para el caso que te acabo de decir.
EM: vale, ya. Pues...
E: ¿sabrías poner eso así o no? Piénsalo un poquillo a ver si sale. Si no, no te preocupes, pasamos a la siguiente y ya está. ¿Se te ocurre alguna forma de cómo poner esa ecuación?
EM: no, ahora mismo no.
E: no caes, ¿no?
EM: que va.

TAREA 2

E: bueno... no pasa nada. A ver, está bien. La siguiente actividad dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
(pone cara de no haber entendido nada)
E: repito, ¿no?
EM: sí.
E: vamos a ver. Determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
EM: ¿el mayor número de regiones?
E: sí. ¿Entiendes lo que te pregunto?
EM: sí. (parece que no ha captado la pregunta del todo)
E: el plano, ¿sabes lo que es?
EM: sí.
E: ¿regiones?
(pone cara de no entenderlo)
E: son las partes.
EM: sí.
E: pues venga. Y rectas sabes lo que es...
EM: sí. Pero ¿puedes trazar las rectas que quieras?
E: sí.
(se queda pensando un rato)
EM: um... a ver... pues eso depende de lo grande que sea el plano... y del número de rectas que haga.
E: aja. Vamos a ver, tamaño del plano... el plano es ilimitado.

EM: ¿ilimitado?

E: puedes considerar que es, por ejemplo la mesa. No sé si habéis representado los ejes alguna vez...

EM: sí.

E: pues la pizarra la puedes considerar también un plano. Entonces, no tiene límite. O sea, que lo grande, va a ser todo lo grande que tú quieras. Ahora, lo del número de rectas, a ver cómo lo manejas.

(se queda pensando)

EM: pues es que puedes hacer hasta que se cubra el plano entero. Es que no...

E: te está preguntando... fíjate, el número máximo de regiones que se pueden obtener. O sea que no te está preguntando por el número de rectas que puedes trazar.

EM: ¿el número máximo?

E: ... de regiones. O sea, en cuantas partes se va a quedar dividido el plano si tú vas trazando rectas, ¿cómo manejas eso?

EM: es que si es ilimitado, pues el número de regiones que te salen... también...

E: ... si yo te digo dime con diez rectas ¿cuál es el número máximo de regiones que puedes obtener? ... ¿tú qué me dices?

EM: ¿con diez rectas?

(se queda pensando)

E: ¿tú me has dicho que dependía del número de rectas que trazaras?

EM: sí.

E: ahora yo te digo... bueno, me has dicho dos cosas. Que dependía del tamaño del plano y eso ya lo hemos solucionado.

EM: sí.

E: y que dependía también del número de rectas. Vale, suponte que yo te doy el número de rectas. ¿Cómo me dices cuál es el mayor número de regiones?

EM: pues... el número de rectas... pues... lo divides entre dos y luego, el número que te salga lo multiplicas... o sea, lo elevas al cuadrado.

E: ¿y eso cómo lo has hecho así?

(EM se ríe)

E: explícame, explícame a ver eso de donde ha salido, eso de multiplicar, elevar al cuadrado, a ver...

EM: esto es lo que yo estaba dibujando... dibujaría así líneas seguidas para dibujar cuadrados. Entonces cogería si son diez por ejemplo, pues dibujaría aquí cinco y aquí otras cinco (refiriéndose al dibujo).

E: sí.

EM: entonces luego, para saber el número de cuadros que te salen pues multiplicas esto por esto.

(está considerando la mitad de las rectas paralelas entre sí y la otra mitad, paralelas entre sí y perpendiculares a las primeras)

E: vale... pero yo no te he dicho la posición que tienen que tener esas rectas. Tú las estás trazando paralelas, ¿no?

EM: sí.

E: y ¿por qué paralelas?

EM: no sé, porque...

E: porque se te ha ocurrido, ¿no?

EM: sí... porque lo he pensado de esa manera.

E: pues ten en cuenta que te están preguntando... que no te digo que esté mal... tú piénsalo a ver, yo te estoy diciendo el número máximo de regiones.

(se queda pensando y no sabe qué hacer)

E: diez quizá sea un número muy alto, piénsalo con números más pequeños a ver si te sale... te he dicho diez, un número al azar. Puede ser un número más pequeño, ten en cuenta que tú dices pues será el cuadrado... bueno, no sé lo que me has dicho... al cuadrado le sumas...

EM: no, divides el número por dos y luego lo elevas al cuadrado.

E: eso, lo divides entre dos y lo elevas al cuadrado, vale. ¿Eso te sirve para el diez o para todos los números?

EM: a ver.

(piensa un rato)

EM: no, no me sirve para todos los números.

E: ¿no?

EM: no, porque por ejemplo con el dos, lo divides entre dos y te sale uno, entonces ese número lo elevas al cuadrado y te sale uno... y saldrían cuatro. Y falla. Entonces...

E: entonces, ¿cómo arreglamos eso?... a ver, dale vueltas al coco a ver qué sale... vas bien, estás sacando cosas.

EM: pues... (se queda pensando)... a ver, el número lo divides entre dos y... a este número le sumas uno y lo elevas al cuadrado.

E: vamos a ver, coges el número...

EM: sí, lo divides entre dos, la mitad. Sí, la mitad. A la mitad le sumas uno.

E: ... y todo ese número al cuadrado. ¿Eso ya sí te vale para cualquier número de rectas que traces?

EM: a ver, espera. Pero es que eso sería para los números pares. Estoy pensando...

(piensa un rato)

(186)

EM: eso sólo sería para los números pares.

E: entonces, ¿qué pasa?

EM: que eso para todos los números no vale. A ver, espera.

(se queda pensando)

(205)

EM: no se me ocurre nada. Es que no vale para todos los números.

E: a ver, ¿qué te pasa?

EM: pues que... además eso sería si las rectas fuesen paralelas. Porque...

E: y trazando las rectas paralelas, ¿es como más regiones obtienes?

EM: no sé.

E: vete a casos facilitos.

EM: ya.

(se queda pensando)

E: a ver, ¿en cuál estás pensando?

EM: ... es que...

E: a ver... si estabas pensando en alguno...

EM: estoy pensando en... es que estoy liada ya. Porque...

E: vamos a desliarnos, dime.

EM: en el número tres, por ejemplo.

E: en el número tres, vale.

EM: si te dan que hagas tres líneas, puedes hacer un triángulo, pero con un triángulo puedo hacer cuatro espacios.

E: ... no.

EM: ¿si haces un triángulo?
E: depende de cómo lo hagas.
EM: así, que vaya la recta de lado a lado.
E: vale. Y si... a ver, hazlo que vea porqué estás diciendo tú lo de cuatro.
EM: haces así (lo dibuja).
E: sí, haces el triángulo ahí en el folio, eso es. Y cada vértice queda...
EM: vale y ahora... cada vértice está... (señala el borde del folio)
E: ... en el borde.
EM: sí.
E: vale. ¿Y qué pasa si el plano...? Con las mismas rectas que tú has trazado, imagínate que el plano no es el folio, que es la mesa, ¿cuántas regiones obtienes?... ten en cuenta que entonces las rectas tienen que ir de borde a borde del plano.
EM: sí, sería más grande el triángulo...
E: ...no tiene porqué... ¿no?
EM: pero si lo haces más pequeño...
E: fíjate (señalando al dibujo), ¿qué tres rectas has trazado? Ésta, ésta y ésta (refiriéndose al dibujo). Ahora yo te digo que consideres que el plano es la mesa. Y la recta ¿cuál es? La misma.
EM: sí.
E: sólo que sigue hasta aquel borde y hasta este de aquí.
EM: sí.
E: ahora ésta, sigue hacia allí...
EM: ¡ah, claro! Se cruzan las líneas.
E: entonces el triángulo sigue siendo el mismo, ¿no?
EM: sí.
E: porque si dejas las rectas fijas...
EM: te saldrían otros... tres triángulos más.
E: a ver, piénsalo, ¿cuántas regiones tendrías? Cuéntalas a ver.
EM: tendría... pues... ¿cinco? (consideran la mesa como plano y se lía con las rectas)
E: a ver, te ayudo a contarlas. Imagínate que ésta es una recta, ¿no? La alargamos por aquí (usa bolígrafos para simular el alargamiento de las rectas). Y ésta es la otra...
EM: sí, aquí va una...
E: ésta es una.
EM: y ésta es otra.
E: dos.
EM: sí porque cuando terminase, llegaría hasta aquí...
E: exacto.
EM: por aquí iría otra.
E: (va de un cruce de rectas a otro y no había acabado con el primero) no te vayas a este vértice todavía. Tenemos aquí una, dos,...
EM: pero es que esta región es la misma que ésta... entonces ésta ya la había contado...
E: sí, te entiendo, pon aquí éste (uno de los bolígrafos)... y ahí había otro, ¿no? Y ahora éste ya no lo volvemos a contar. Tenemos una, dos, tres... ¿ésta es distinta, no?
EM: sí.
E: cuatro.
EM: cinco.
E: y ahora tenemos aquí otro corte... seis y siete porque éste se nos había pasado contarlo, el triángulo. Siete. Son siete, ¿no? por ahora...
EM: sí, es que yo éstas de aquí no las había contado.

E: ahora, ese mismo dibujo que hemos hecho lo puedes hacer más chiquitito para tú controlar las rectas.

EM: ¿que lo dibuje más chico?

E: lo digo por si vas a probar con más dibujos. En vez de hacer el triángulo tan grande (los vértices los dibuja en el borde del folio), pues más chico, podemos contar. Entonces con tres parece que hemos obtenido siete regiones, ¿qué más? ¿cómo seguimos ahora?

(se queda pensando)

EM: ya no habría más porque estas rectas se cruzan ahí y ya se abrirían y no se juntarían más.

E: aja, ¿y habría...?

EM: ah, bueno pero... a ver... no, no se juntarían más.

E: ¿y habría otra forma de trazarlas de forma que...?

EM: ¿... que se volviesen a cruzar?

E: o que obtuviéramos más regiones, porque como vamos buscando el mayor número de regiones... ¿hay otra forma de trazar las rectas de forma que obtengamos más regiones? ¿Qué crees tú? Esas tres rectas.

(se queda pensando)

EM: si cortásemos las líneas e hiciésemos así... (dibuja)

E: fíjate y aquí has obtenido el mismo triangulito este pero aquí...

EM: es que si, según como...

E: a ver, cuéntame qué estás pensando.

EM: pues es que daría según el dibujo que hagas.

E: y ¿cómo obtienes el mayor número de regiones, que es lo que te están preguntando? ¿cómo tienes que hacer el dibujo?

EM: cruzando las líneas entre sí.

E: aja. Entonces, si yo te pregunto ahora cuál es el número máximo de regiones con diez rectas, ¿serías capaz de decírmelo, con lo que estás haciendo?

EM: ¿con diez rectas?

E: aja.

EM: ¿sin dibujarlo?

E: si quieres, lo puedes dibujar. Pero tú imagínate que te pregunto ahora, en vez de diez, con cien.

EM: sí...

E: a ver, ¿qué podrías hacer ahí de forma que no lo tuvieras que dibujar cada vez que te pregunten?

EM: ¿podría ser... veintiuna?...

(se queda pensando)

E: ¿cuál es la información que tenemos hasta ahora? ¿qué es lo que has calculado?

EM: cruzando las líneas entre sí, se obtienen más regiones.

E: vale. Ahora... tú has hecho ahí tres rectas, ¿no?

EM: sí.

E: y con tres rectas parece que el número máximo es ¿cuál?

EM: siete.

E: vale y ¿conoces más números de regiones según el número de rectas?... o sólo con tres rectas.

EM: ¿cómo que sólo con tres rectas?

E: sí, ahí has hecho el caso de tres rectas, ¿conoces algún caso más?... que sea fácil de calcular, porque el de diez ya la cosa no es tan fácil, ¿no?

EM: pues... (se queda pensando)
(334)
EM: ... es que yo estoy pensando con cinco pero que...
E: ¿qué pasa con cinco?
EM: pues que ya cortas por estos lados (refiriéndose al dibujo)
E: aja.
EM: ... y salen...
E: a ver, por ahora parece que cuantas más rectas, obtienes más regiones.
EM: sí.
E: ... y sabes que con tres rectas has obtenido siete regiones... ¿y con dos rectas cuántas habías obtenido? Eso ya lo habías hecho antes, ¿no?
EM: ¿con dos rectas?
E: aja.
E: cuatro regiones.
EM: sí... porque con dos rectas, las cruces como las cruces siempre te va a salir cuatro.
E: venga, entonces ¿qué tenemos hasta ahora?... que con dos rectas obtenemos cuatro y con tres rectas obtenemos siete. ¿Y de ahí podrías sacar tú cuántas regiones tenemos con un número grande que te den de rectas? ¿serías capaz de decirlo?
EM: ... pues si es... si es un número par, saldría... a ver...
(pensando)
E: a ver, cuéntame qué piensas...¿qué te pasa?
EM: pues que no ...
E: ¿con un número par lo sabrías decir?
EM: yo pienso que es como antes lo dije pero...
E: ¿lo de dividir entre dos, sumarle uno y elevar al cuadrado?
EM: sí.
E: ¿eso te serviría para cualquier número par crees tú?
EM: yo pienso que sí.
E: vale, si yo no te digo que no. Y ahora tenemos los pares ya, ¿no? Según tú, eso sería, ¿no?
EM: sí.
E: ¿y los impares qué hacemos con ellos?
(se queda pensando)
EM: ¡uf! No sé...
E: con un impar no sabes qué hacer, ¿no?
EM: no.
E: bueno, pues vamos a centrarnos en los pares, a ver qué pasa... tú me has dicho, a ver si yo me he enterado, un número lo divides entre dos, le sumas uno y lo elevas al cuadrado.
EM: sí.
E: vale. Si eso es cierto con cualquier número par pues... qué te digo yo... con el cuatro, que no es un número muy grande, no te voy a complicar la vida, ¿sería verdad también?
EM: sí.
E: entonces, según eso ¿cuántas regiones tendrías que obtener?
EM: ¿con el cuatro?
E: aja.
EM: pues...
E: como número máximo.
EM: nueve.

E: nueve. A ver, mira si obtienes nueve... porque con cuatro rectas tendrías que obtener nueve, ¿no? ¿o no?

EM: sí.

(dibuja)

EM: sí, pero es que ...

E: ten en cuenta que es el número máximo ¿eh?

EM: es que claro, se podría hacer así...

(431: fin cara A)

EM: ... luego así por ejemplo... y luego ya...

E: ¿y ahí cuántas regiones obtienes?... una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez ... yo no sé si diez será el número máximo o no, pero desde luego no te cuadra con el nueve.

EM: no.

E: vamos a ver, ¿se te ocurre cómo arreglar eso o no?

(EM se queda pensando)

EM: que va, no sé, ni idea ... es que yo lo estaba pensando para líneas paralelas.

E: aja.

EM: ... y claro...

TAREA 3

E: bueno, pues ya está, lo dejamos ahí. Te voy a hacer otra preguntilla ...

(se le plantea la tercera cuestión)

E: dice... (EM se queda pensando) ¿ves como no es matemática pura y dura?

EM: ya, pero hay que buscar el truquillo...

E: dice así, en una reunión de amigos todos se saludan dándose la mano, ¿cuántas veces se dan la mano?

EM: ¿los amigos?

E: aja.

EM: si en una... a ver... pero ¿cuándo se dan la mano?

E: tú imagínate, llegas a una fiesta y la gente se saluda dándose la mano. Aquí nosotras, pues yo llego, te saludo y te doy la mano. Entonces te dicen, ¿cuántas veces se dan la mano?

EM: pues una.

E: bueno, una, depende... ¿o no depende?

EM: es que depende porque si...

E: a ver, ¿de qué depende?

EM: es sólo al llegar, ¿no?

E: sí, supongamos que es sólo al llegar. O sea, llegan y se saludan con un choque de manos.

EM: se pueden dar cuatro.

E: ¿cómo cuatro?

EM: con distintas manos.

(risas)

E: vamos a ver, un saludo normal... yo no llego y te doy una y dos (E lo hace el gesto de saludar con las dos manos)

EM: entonces...

E: tú llegas aquí, entras por la puerta y te digo hola, yo soy tal y te doy la mano... entonces ahí ¿cuántas veces nos damos la mano?

EM: una.

E: una, vale.
EM: sí y... ¿qué más?
E: ... pues ahora imagínate que en vez de estar yo sola, viene un compañero conmigo... y entonces vas tú...
EM: ¡ah, claro! Es que depende de la gente que haya.
E: ¿y eso cómo lo controlas?
EM: si no me dices la gente que hay.
E: no, no dice nada.
EM: pues...
E: a ver, ya tenemos alguna información, ¿no?
EM: sí.
E: a ver, ¿qué información tenemos?
EM: que... cada uno se da la mano con el amigo, con cada uno de los amigos...
E: exacto, entonces, si estábamos dos...
(40 de 2/2)
EM: es una vez nada más... entonces...
(se queda pensando)
EM: es... ah, claro... va la mano... ah, no.
E: a ver, si esto es darle vueltas al coco.
EM: pues esa persona, al número de amigos que se la dé y el número que salga se eleva al cuadrado... porque cada amigo da lo mismo da los mismos saludos que él mismo...
E: ... o sea que si hay dos...
EM: es una vez nada más. Éste sólo se la da una, pues una por una, una.
E: vale.
EM: si ya hay tres...
E: aja.
EM: ... yo el saludo lo doy dos veces.
E: sí.
EM: entonces... yo...
E: va bien, a ver, venga.
EM: sí.
E: tú has dicho que si hay tres, el saludo lo das dos veces...
EM: pero es que ese número...
E: ¿ese número qué?
EM: ese número lo multiplicas por el número de personas que haya.
(60)
E: ¿qué número multiplicas por el número de personas?
EM: las veces que saludes...
E: que son, ¿cuántas?
EM: las multiplicas... si son tres personas, das dos saludos.
E: aja.
EM: y las multiplicas por el número de personas que haya, que son tres. Saldrían seis saludos.
E: o sea que entre tres personas se darían seis saludos... A ver, tú imagínate la situación.
EM: (EM hace el dibujo) éste se lo daría a éste y a éste. Éste se lo da a ése y a ése. Éste a éste y a ése.
E: sí, pero... hay saludos que son los mismos, ¿no?
EM: ¡ah! Sí, es verdad.
E: si éste es Pepe y ésta es María, Pepe y María...

EM: sí, es el mismo. Y éste también y éste también. Pues será... los saludos que se dan es el número de personas que haya.

E: o sea, tres personas se dan...

EM: tres saludos.

E: ¿y eso te serviría para cualquier número de personas?

EM: a ver que piense.

E: piensa en números bajitos, ¿eh? No te vayas a ir a diez personas.

EM: ya, ya. No, no.

(EM se queda pensando)

EM: sí, ¿no? A ver, con cinco. (EM dibuja) Éste es el mismo... ah, claro pero luego... ¡uy!

E: a ver, ¿qué pasa con cinco?

EM: ... no, hay más.

(EM se queda pensando)

E: ¿qué pasa ahí?

EM: pues... que... aquí dan cuatro saludos... y son cinco... aquí el número de saludos sería diez...

E: ¿con cinco?

EM: sí. A ver... sí.

E: serían uno, dos, tres, cuatro y cinco... luego seis, siete, ocho, nueve... no. Diez y once, ¿no? Tú has dibujado ahí once segmentitos.

EM: sí. A ver...

E: los cinco de fuera y dentro tienes seis, ¿no?

(110)

EM: ¿once?

E: fíjate. De aquí tienes uno y dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho... nueve, diez...

E: ¿se te ocurre algo más? Que puedas decir, pues cuando haya diez son tantos saludos...

EM: le vas sumando... dos conforme va aumentando el número de personas... Que va...

E: bueno, no sale, ¿no? No pasa nada, está muy bien. Hemos sacado muchas cosillas.

(134)

SUJETO: 4ESO1

FECHA Y HORA: 23-1-02, 8:30-9:15

TAREA 1

E: vale, entonces las preguntas que te voy a hacer están relacionadas con matemáticas pero no hay respuestas buenas ni malas, ¿sabes? Tú vas diciéndome lo que vas opinando, cómo tú lo harías y ya está. ¿Vale? No pretendo evaluarte ni nada por el estilo. Es de pensar un poquito... a ver, la primera dice qué resultado da al sumar dos números pares.

AL: ¿qué tengo que decir, si es un número par o impar?

E: sí, lo que tú pienses.

AL: vale. Da un número par.

E: a ver, ¿por qué? Cuéntame un poquito.

AL: que te cuente un poquito...

E: sí, ¿por qué has dicho que te da un número par, tan rápido?

AL: pues vamos a ver...

E: yo quiero que me expliques lo que vas pensando...

AL: porque un número par es un múltiplo de dos y entonces al sumarlos... pues sigue siendo un número par, ¿no?

(149)

E: ¿estás segura?

AL: sí.

E: y tú imagínate... tú estás diciendo que un número par es múltiplo de dos, vale. Múltiplo de dos, vale. Y ¿eso te dice que la suma de dos pares da un número par?

AL: ¡ay! Es que esto tan teórico no se me da a mí muy bien...

E: ... tú piénsalo un poquito.

AL: pues vamos a ver... pero ¿te tengo que explicar por qué da un número par?

E: sí. Tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que da un número par... yo te digo en plan cabezón que porqué.

AL: por ejemplo tenemos el cuatro que es un número par. Y el seis que es un número par.

E: vale.

AL: pues la suma de dos pares te da un número par. O sea, los dos son divisibles por dos y después su suma pues va... al ser los dos divisibles por dos, también será divisible por dos. Un razonamiento un poco idiota... ¿no?

E: y ¿por qué si los dos son divisibles por dos, al sumarlos, lo que te dé, va a ser divisible por dos?

AL: era una excusa, ¿no? Pero bueno...

E: a ver, a ver.

AL: uhmm, no sé.

E: a ver cómo haces eso. Tú me has dicho que tienes dos números pares y son los dos múltiplos de dos...

AL: porque si no simplificas, va a seguir siendo un número...

(AL se ríe)

E: ¿estás convencida de lo que estás diciendo?

AL: ... es que yo sé que es así pero tampoco sé...

E: trata de explicármelo a mí.

AL: ¡ay! te tengo que explicar por qué la suma de dos números pares da un número par.

E: sí.

AL: ... pues porque no da un número impar... porque, no sé. Es que no sé explicarlo.

E: tú has probado con un ejemplo, ¿no?

AL: sí.

E: has probado con el cuatro y con el seis y me has dicho que la suma de dos pares da un número par, vale. Luego te he dicho si eso valía para cualquier número, porque yo te digo que lo razones de forma que no tengas que hacerlo por casos particulares, porque si no, tienes que ir viendo número a número si da par o no. Entonces para que te valga en general, ¿cómo dirías que siempre que tengas dos números pares, la suma da un número par? A ver cómo lo harías.

AL: siempre que tengas dos números pares, la suma da un número par.

E: aja. ¿Por qué? A ver piénsalo un poquillo, si no hay prisa.

AL: porque... te lo planteo con una ecuación, que eso se me da muy bien.

E: venga, tú lo puedes plantear como quieras.

AL: porque vamos a ver, un número par, por ejemplo, ¿no? x

E: aja.

AL: pues entonces, el otro número par digamos que es x más otro número par, ¿no?

E: aja.

AL: por ejemplo... más dos, por ejemplo, ¿no?

E: aja. Pero ¿eso sería cualquier número par?

(182)

AL: ¿qué?

E: a ver, ¿qué dos números pares vas a sumar ahí?
AL: pues éstos dos. O sea, dos números pares consecutivos.
E: ¿el x es un número par? Y el x+2 ¿otro número par?
AL: sí. El siguiente par, vaya.
E: aja.
AL: y ya, al sumarlos, sí te da.
E: y si yo te digo... seis más veinte.
AL: da par.
E: vale, te da par. Pero ahí, ¿eso está reflejado ahí?
AL: y ¿cómo lo hago?
E: eso te pregunto yo a ti, ¿cómo lo haces?
AL: es que... es un follón muy grande... tengo que decir que dos números pares cualquiera... cualquiera, ¿no?
(192)
E: venga, que te sirva para cualquier caso. Imagínate que te pongo el 7430 y el 8522, ¿por qué sabes tú ya directamente que da un número par?
AL: ... y si ponemos dos por x y dos por y. (AL lo escribe)
E: aja, ¿quiénes son...? ¿2x y 2y son los números?
AL: sí. Vamos, dos números distintos.
E: vale.
AL: es que si los multiplicas los dos por dos, ya tienes que un múltiplo de dos es par.
E: aja.
AL: entonces pues ya, la suma te va a salir par.
(se queda pensando)
E: ¿por qué la suma sale par?
AL: porqué la suma sale par... porque esto sería... al estar multiplicando por dos, te sale par, ¿no? ... y el resultado está también multiplicado por dos... creo.
(risas de AL por el "creo" que ha seguido a su razonamiento)
AL: yo creo que sí, vaya.
E: ¿si?
AL: sí.
E: ¿eres capaz de poner eso ahí de alguna forma?
AL: ¿de igualarlo?
E: ... porque me estás diciendo que el resultado va multiplicado por dos.
AL: sería... 2(x+y)
E: y así ¿tendrías que la suma de dos números pares da par?
AL: sí.
E: vale, pues ya está.
AL: ¿está bien o no?
(207)
E: no sé... tú me has tratado de convencer con eso... ¿tú estás convencida?
AL: yo sí pero ¿tú estás convencida?
E: yo sí. Si tú estás convencida, estoy convencida yo también.

TAREA 2
E: otra actividad te voy a proponer. Determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
(pone cara de no entender al decir regiones)

E: ¿sabes lo que son regiones?

AL: no.

E: regiones son trozos. O sea, cuando tú trazas rectas sobre un plano, ¿cuál es el número máximo de regiones que obtienes? El número máximo de partes en que se te queda dividido el plano. ¿Vale?

AL: ya. O sea, yo tengo un plano, ¿no? Vamos a ver, esto es el plano... por ejemplo (se refiere a un trozo del folio)... y entonces yo tengo que dividir en 40000 partes... y el número mayor de partes, ¿o cómo se hace eso?

E: ten en cuenta que... son dos cosas distintas. Lo que tú me estás planteando ahí es cuál es el máximo número de regiones que tú puedes hacer en un plano. Entonces tú dices pues hago muchas rectas y tengo muchísimas regiones. Pero es que es ¿cuál es el número máximo de regiones que tú obtienes al trazar rectas?

AL: ¿al trazar rectas?

E: sí. Ten en cuenta que así sería el número máximo cuando traces muchísimas rectas, vale. Pero ahora tú imagínate que yo te pido que me digas cuál es el número máximo cuando tengas cinco rectas.

AL: ¿cuál es el número máximo de regiones?

E: sí.

AL: ¡ah! Entonces tienes que dibujar las cinco rectas...

E: a ver cuál sería el número máximo de regiones.

(227)

AL: ya.

E: ... y que si yo te pregunto cuál es el número máximo que puedes obtener con diez rectas, lo puedas sacar. A ver cómo empiezas.

AL: eso mismo, tengo que poner cinco, ¿no?

E: bueno, tienes que poner cinco si te piden ese caso concreto. Yo te he puesto un ejemplo para que veas que no te tienes que poner a trazar rectas hasta que te quepan.

AL: ¡ah! me has puesto un ejemplo... entonces aquí, en este caso (hace un dibujo) serían uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once y doce. Y eso que tenía que haber sido cinco. No puede ser... ¿y ahora qué hago?

E: ¿y ése es el número máximo que tú crees que puedes obtener con cinco?

AL: no, yo creo que puedes obtener más.

E: a ver.

AL: no sé porqué me da a mi que está mal desde el principio. Pero, claro, cualquiera sabe desde donde.

(se queda pensando)

E: ¿estás trazando las rectas de alguna forma... o totalmente a ojo?

AL: yo qué sé... ahora a ojo. Pero... pero es tontería trazarlas a ojo porque después no le encontramos ninguna lógica. A ver ahora... una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince.

E: o sea, que ya el número máximo no sería doce...

AL: no. ¿Y sigo trazando?

E: mira, te voy a decir una cosa. Con cinco, a lo mejor te complicas mucho la vida, hazlo con un número más pequeño, ¿no? Es que empezar con cinco... ya es empezar complicándose.

AL: empezamos... pero con dos, ya son cuatro, ¿no?

E: bueno, pues lo pones.

AL: porque son cuatro...

E: no hay otra forma de trazarlas que obtengas más de cuatro, ¿no?

AL: no, salen cuatro.

(257)

(sigue con dibujos para ver si puede conseguir más de cuatro regiones con dos rectas)

AL: pero es que... ya. Entonces voy a hacer otro ejemplo...

E: aja.

AL: (hace el caso de tres rectas) y tengo uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete... me faltan dos. Porque yo creo que es el cuadrado del número.

E: a ver, mira si hay forma de trazar tres rectas de forma que obtengas nueve regiones.

(prueba de otra forma con tres rectas... tarda un rato)

AL: me da siempre siete... me tiene que dar nueve.

E: ¿por qué?

AL: es que no sé... me da a mí que...

E: pero tú crees que hay forma de dibujar... si obtuvieras nueve, sí sería mayor que siete. Pero ¿tú crees que puedes trazar tres rectas de forma que obtengas nueve regiones?

AL: no.

E: entonces, si no te sale... a ver, ¿tú cómo has trazado las rectas?

AL: ¿yo? Pues cortando...

E: eso (refiriéndose al dibujo) no lo has hecho a ojo, ¿no?

AL: no.

E: esas tres no las has hecho a ojo.

(285)

AL: porque... hago así una para que se corten (traza la segunda recta sobre el plano) y luego así otra (traza la tercera recta) para que corte a las dos.

E: entonces, ¿puedes obtener más?... si tienes dos rectas y las has cortado...

AL: yo creo que no, ¿no?

E: no, parece que no puedes obtener más. Venga, con tres te ha dado siete.

AL: ahora lo intento con cuatro, ¿no?

(prueba con dibujos)

AL: con cuatro... con el siguiente número me da once, con cuatro.

E: y ¿cómo lo has hecho? También cortando...

AL: esta recta corta a las otras... o sea, la última corta a las anteriores.

E: vale, yo creo que no te pueden dar más, ¿eh? ¿Y ahora qué?

AL: ahora tengo que ver... ¡ahh, ya lo he visto, ya lo he visto!... el resultado final es la suma de los anteriores.

E: no sé, a ver.

AL: el resultado de cuatro... es el número de regiones que te ha dado... es la suma del número de regiones que te ha dado con las dos anteriores.

E: ¿cuántas regiones obtenías con una recta?

AL: ¿con una recta?

E: aja.

AL: dos.

(321)

AL: ... entoces no me sale. ¡Uy!

E: a ver, ponlo ahí en la lista (AL ha hecho una lista con los resultados que ha ido obteniendo), con una recta obtenías dos.

(analiza y trata de relacionar los datos que tiene en la lista)

AL: de aquí a aquí van dos, ¿no? De cuatro a siete van tres. ¡Ah, ya! ¿Ves? De siete a once van cuatro, ¿no? ... pero claro, aquí con cinco no me daría porque tendrían que salirme dieciséis.

E: si fuera eso así, sí... lo que pasa es que tú tampoco sabes si es el máximo o no (refiriéndose al dibujo), porque te has puesto ahí a trazar rectas...

AL: sí, a diestro y siniestro.

E: ahora a ver de qué te fias. Éstas sí las has ido comprobando (casos con menos de cinco rectas). Pues... en principio, fíate de esas... o haz el dibujo con el cinco, a ver si te sale lo que buscas.

AL: vamos a ver. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince. Es que... es que me tiene que salir dieciséis por narices. Vamos a contar, una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce y quince... me falta una. Tiene que haber alguna forma, ¿no?

E: (haciendo referencia al dibujo) según has dibujado ésas ahí, imagínate que ésta corta a ésta... porque no las has dibujado paralelas, ¿no?

AL: no.

E: entonces, imagínate que se cortan aquí.

AL: ¡ah! ya tengo otra más.

E: ya obtienes otra más.

(365)

E: es que según las has dibujado aquí, en el folio no se cortan. Pero si las alargarar sí se cortarían.

AL: y ya, el próximo pues serían veintidós.

E: aja, según eso sí. ¿Y si yo te digo ahora que me digas el número máximo de regiones cuando tracemos... treinta rectas?

(se queda pensando)

E: ¿cómo harías eso?

AL: treinta rectas, ¿no?

E: bueno, hazlo primero con diez a ver cómo lo harías, si te resulta más fácil. El caso es que te dicen un número más grande de los que tienes.

AL: ya. Entonces serían... con seis, veintidós; con siete... serían veintinueve; con ocho serían veintinueve más ocho que son treinta y seis; con nueve son cuarenta y seis... y piensa (se dice a ella misma)... que cuando una piensa, salen las cosas.

(se queda pensando)

AL: si tuviésemos treinta, ¿no?

E: aja.

AL: pues... sería...

E: el tema sería... vamos a ver lo que te quiero decir. Tú ahí, pues hasta diez, más o menos puedes ir sumando, no te aburres. Pero imagínate que te dicen un número grande, te podría decir treinta, como cien, como mil...

AL: sí.

E: tú imagínate que te dan un número grande y que el ponerte a sumar cinco, seis, siete, ocho... se te puede ir la vida. Entonces, a ver alguna manera en la que tú pudieras decir que si tienes tantas rectas, tienes tantas regiones.

(403)

AL: ... sería n, ¿no? ¿n?

E: ¿n quién es? ¿a quién le has llamado n?

AL: n es... n le he llamado... al número total. No, n es el número de rectas.

(se queda pensando)

AL: ¿estas cosas tan difíciles ponen en la universidad?

E: esto no es difícil, si estás ahí dándole vueltas...

(bromean)

(428)

AL: vamos a ver...o sea, diez sería la suma de cincuenta y tres...

(fin cinta 1/2)

AL: ... creo que ya sé lo que me va a salir... dieciséis y seis son veintidós, veintinueve, treinta y siete, treinta y siete y nueve son cuarenta y seis, cuarenta y seis...

E: sí, eso está bien sumado...

AL: entonces por qué me sale... ¡ah! ya.

E: ¿qué no te sale?

AL: es que yo había visto...

(se queda pensando un rato)

AL: hay que sacar n, ¿no?

(sigue pensando)

AL: y no sería n+2... ¿no?

E: ¿por qué no? a ver, cuenta.

AL: porque sería... yo había pensado la suma desde cero... porque como empezamos desde dos y no empezamos desde cero, pues le sumamos dos... pero no, serían los números de n, pues el uno, el dos, el tres... así hasta treinta... más dos... pero esto no me convence a mí. Si empezamos desde cero...

E: aja.

AL: ... pues... porque con el cero ya, pues son cero, ¿no?

E: cuidado porque si tienes el plano y no trazas ninguna recta...

AL: es uno.

E: es uno.

AL: ... entonces aquí va uno (lo anota en su lista). Pero es que aquí tú vas sumando esto...

(hace cálculos con los datos anotados)

AL: ... veintiuno, veintiocho, treinta y seis...

E: a ver, fíjate cómo has ido obteniendo el número de rectas.

AL: ¿el número de rectas total?

E: aja. Perdona, el número de regiones.

AL: ehh... vamos a ver (se fija en los datos anotados)... éste es el número de rectas que salen... y éste es el número de regiones... esto era lo que había que sumarle al anterior para que nos diese el número de regiones de la siguiente.

E: aja.

AL: pues ya he obtenido el número de regiones.

E: pues venga, ¿y eso cómo sería?

(31)

AL: vamos a ver... el número de regiones... es igual a la... espérate, que me estoy liando... al número de regiones anterior más la diferencia.

E: más la diferencia... ¿quién es la diferencia?

AL: la diferencia es... entre el número de rectas... que crucemos.

E: el número de regiones es el número de regiones anterior más el número de rectas que crucemos. A ver, dímelo ahí en la tabla con algún ejemplo.

AL: vamos a ver, el número de regiones ¿no?

E. sí.

AL: por ejemplo... más la diferencia que hay entre uno y cero.

(AL repite su razonamiento con uno de los casos particulares que tiene anotados en su tabla)

E: entonces es la diferencia que hay en el número de rectas...

AL: sí.

E: entonces aquí...

AL: no, no, no. El número de regiones éste...

E: y en éste que hay siete, por ejemplo... sería el número de regiones anterior más la diferencia...

AL: claro, y no sale.

E: sería entonces más uno...

AL: no, más el número de rectas que utiliza.

E: aja. ¿Y eso cómo lo harías?

AL: número de regiones, ¿no?

E: sí.

AL: bueno, vamos a poner que esto sea el número de regiones... es igual al número de regiones anterior... por ejemplo a... n... no... el número de regiones anterior hay que saber cuál es. Pues sí, claro que sabemos cuál es. Lo que pasa es que lo sabemos en un caso particular...

(51)

(trata de escribir pero no consigue lo que quiere)

AL: y ¿cómo podemos poner dos incógnitas?

E: a ver... ponlo como tú quieras.

AL: ... el número de regiones de ahora es igual a y, que es el número de regiones anterior, ¿no?... más el número de rectas que utilizas. O sea, que en ese caso son tres pero... si aquí ponemos, por ejemplo n-1...

E: tú le llamas n al número de regiones, ¿no?

AL: sí... pero es que entonces no puede ser n-1.

E: parece que no.

AL: no puede ser así.

E: venga, si la idea la tienes, ¿no?

AL: pero es que esto de... ¡ay! Yo no voy para científica... el número de regiones anterior... pues vamos a llamarlo... yo qué sé, pues la diferencia... no, es decir, más el número de rectas que utilizas... pero es que entonces nos montamos en cincuenta incógnitas ya puestos, ¿sabes?... más el número de rectas que utilices... que sería... que sería... es que el número de rectas que utilizas sí lo sabes.

E: sí, el número de rectas que utilizas sí lo sabes.

AL: entonces ¿por qué no? O sea, le ponemos... número de rectas... yo qué sé.

E: vale. Según eso, n sería el número de regiones, que sería el número de regiones que tienes antes, ¿no?

AL: sí.

E: y r el número de rectas que trazas, ¿no?

AL: sí.

E: vale, eso lo has hecho basándote en el caso anterior que tienes. ¿Se te ocurre alguna forma de hacerlo que no te tengas que basar en el caso anterior?

AL: ¿en éste caso? O... ¿en cuál caso?

E: en este mismo ejercicio pero que no tengas que estar tirando de la cuerda como si dijéramos. Porque ahí te piden hasta diez, empiezas a hacer desde uno... hasta que llegas a nueve. Y cuando tienes el de nueve, sacas el de diez. Tú imagínate que te digo mil quinientas rectas...

(73)

AL: ... mil quinientas rectas...

E: entonces ya no te vas a poner uno, dos... y cuando llegues a mil cuatrocientas noventa y nueve, dices... y el de mil quinientas es tal. ¿Se te ocurre alguna forma de ponerlo que te sirva para cualquier caso o no?

AL: tiene que haberla.

E: a ver, ¿se te ocurre? Si no, no pasa nada... es por si se te ocurre algo.

AL: porque es que... o sea tiene que ser fácil porque lo que le vas sumando es el número de rectas que vas dibujando.

E: aja.

AL: entonces es la suma de... del número de rectas que utilices más uno, ¿no?

E: a ver.

AL: claro, porque, vamos a ver... aquí (refiriéndose a la tabla donde tiene anotados los datos) cuando empiezo con cero, aquí empieza con uno.

E: sí.

AL: entonces aquí, al tratar la suma, ésta al no ser cero sino que es uno...

E: aja.

AL: pues digo yo que te va a dar un número una unidad mayor que éste.

E: entonces ahí te tendría que dar once.

AL: ¿por qué?... no, tú los sumas... uno y dos son tres...

E: ¡ah! sumando el número de rectas...

AL: ... quince, veintiuno, veintiocho, treinta y... cuatro, ¿no?

E: aja.

AL: treinta y cuatro y nueve son...

E: cuarenta y tres.

AL: cuarenta y tres.

(se queda pensando)

AL: es treinta y seis, cuarenta y cinco y cincuenta y...

E: pero fíjate que según eso... aquí sería cero y uno, uno. Y aquí te salen dos...

AL: vamos a ver...

E: (en la tabla) ¿cero y uno?

AL: o sea... pero yo digo que la suma total del número de rectas que utilices es si... es decir, digamos que n es treinta, ¿no?

E: sí.

AL: pues la suma de cero a treinta, ¿no?

E: sí.

(94)

AL: que es igual a la... a la diferencia ésta... a la suma ésta más uno. O sea, a la suma desde cero hasta treinta más uno.

E: sí.

AL: entonces este número es el que te daría el número de regiones.

E: o sea que serían... y vas sumando el número de rectas desde cero a treinta.

AL: sí.

E: ... cero más uno, más dos, ... más veintinueve, más treinta. Y a todo eso le sumas uno.

AL: sí.

E: vale, entonces aquí sería, por ejemplo con dos rectas sería cero más uno, más dos y más uno...

AL: sí, claro.

E: y ¿con los otros se cumple siempre?

AL: sí (prueba con casos particulares).

E: a ver, ¿y eso cómo lo harías? ¿lo podrías escribir?

AL: ¡uf! Lo tengo que escribir... vamos a ver, digamos que n es el número de regiones, ¿no? Pues el número de regiones es igual a la suma de los... esto... una cosa que yo te quiero preguntar, ¿cómo se pone para sumar de tal número a tal número? ¿cómo se pone? O sea...

E: es que se pone con un signo de sumatoria pero eso no lo habréis visto todavía.

AL: éste tan extraño (lo escribe en el folio).

E: sí, con ése. De todas formas, puedes ponerlo... ¿hasta qué número quieres sumar?

AL: es que eso no tiene que tener límite porque en una fórmula no puedes tener... hasta tal número.

E: mira, si no lo sabes escribir en lenguaje algebraico, con formulitas y... pues me lo explicas, contándome que sumas hasta el número tal que tengas... y luego le sumas cuál, y perfecto. Es que como te diga cómo se escribiría lo que me estás preguntando, te vas a liar más.

AL: entonces sería el número de regiones, n por ejemplo. Es igual a la suma de cero a treinta por ejemplo en este caso y ahora la suma. ¿Esto no hay que ponerle ni paréntesis ni nada?

E: no.

AL: pues yo creo que sería así.

E: y ¿n sería el número de regiones?

AL: sí.

E: vale.

AL: y ¿eso está bien o está mal?

E: no sé.

AL: ¡ah! ¿no lo sabes?

(risas)

E: vamos a ver, hasta aquí te ha servido, con todos los casos que tienes... ahora otra cosa es que... ¿a ti te convencería eso? ¿cómo serías capaz de decir si está bien o está mal? ¿se te ocurre alguna forma de poder decir con seguridad si está bien o está mal?

AL: yo creo que está bien... pero no...

E: ... pero por intuición, ¿no?

AL: sí, yo lo veo bien.

E: ¿se te ocurre alguna forma de justificarlo y poder decir que seguro que está bien?

AL: ¿seguro que está bien...?

(130)

E: sí.

AL: claro.

E: ¿cómo?

AL: vamos a ver. Hasta el caso que hemos comprobado... o sea hemos ido sumando y nos ha servido. Entonces ¿sabes lo que te digo?... es que es esto de saberlo y no poder explicarlo...

E: sí, venga a ver, cuéntame un poco.

AL: vamos a ver qué te cuento... aquí por ejemplo, o sea si le sumamos uno... eso sí te lo he explicado.

E: sí, eso sí. Yo eso, con los casos que me has puesto aquí, esté esto bien escrito o no, te entiendo lo que quieres decir.

AL: ah, vale.

E: a lo mejor esto de sumatoria no lo has escrito bien... pero entiendo lo que quieres decir. Pero ahora yo te digo que tú esto sabes que está bien hasta diez...

AL: sí.

E: pero... ¿y para mil, por ejemplo?

AL: pues... no sé. Porque no me voy a poner a sumarlo... me puedo morir de asco, ¿no?

E: ¿se te ocurre alguna forma de poder hacerlo eso?

AL: no... el Mathematica lo suma, ¿no? muy rápido.

E: sí...

(risas)
AL: ... yo qué sé... metería eso en el ordenador y...
E: ya está. No pasa nada, es una opción, tú compruebas con ordenador.
AL: sí... con el Mathematica.
E: vale, vale. Muy bien, pues ya está.
AL: ¡ah! ya acabamos, ¿no me haces más preguntas?
E: no, ya está.
(148)

SUJETO: 4ESO3

FECHA Y HORA: 30-1-02, 8:30-9:05

TAREA 1

E: esto es para un trabajo de mi doctorado. Entonces te voy a hacer una serie de preguntas y tú me tienes que contestar como tú creas que es lo que yo te estoy preguntando. Es importante que sepas que no hay preguntas ni buenas ni malas. Tienes que contestar según te parezca a ti.

G: de acuerdo.

E: te voy a dar un par de folios por si quieres escribir... yo te hago la primera pregunta, que es ¿qué resultado da al sumar dos número pares?

G: otro par.

E: a ver ¿por qué?

G: te da un número par porque... bueno, pues si fuese un número par más otro impar, daría... daría un impar.

E: vale y ¿por qué?

G: ¿cómo que por qué?

E: a ver, ¿por qué tú crees que siempre da par?

G: porque al multiplicarlo por... ¿qué es... un número par más otro?

E: aja.

G: es que... no sé porqué...

E: piénsalo un poquillo, no tenemos prisa.

G: yo... nada más que por deducirlo un poco, ¿no?... al multiplicar un número por dos... y al sumarle otro par, sigue siendo par pero no lo sé, el porqué no lo sé.

E: pero ¿tú por qué has dicho tan rápido que era par?

G: mecánicamente un poco porque ecuaciones o algo así, simplemente... par más par siempre da otro par... o cosas así.

E: y... ¿siempre te va a dar par?

G: yo creo que sí.

E: a ver, a ver, explícame un poquillo.

G: ¿por qué?

E: tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que siempre da par.

G: pues... habría que hacerlo a lo mejor... práctico, ¿no? Por ejemplo, dí un número par.

E: vale, el mil setecientos.

G: mil setecientos... y otro número par, por ejemplo el cuatro. ¿Ves? Pues los sumo y me da un número par.

E: sí, pero en ese caso. Ahora yo te pregunto si siempre, siempre se va a dar eso.

G: pues... no sé.

E: a ver... piénsalo un poquito por qué puede ser. Si tú piensas que es siempre... ¿tú crees que es siempre?

G: yo creo que sí. Creo...

E: pues tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que eso se da siempre. Porque tú me has dicho que te dijera un número par y lo has sumado con otro par. Pero ¿vas ha probar con todos los pares y vas a ver que la suma da par? A ver, cómo harías eso, piénsalo un poquillo, si no hay prisa.

G: es que no sé.

E: a ver qué se te ocurre, tienes que convencerme de que la suma de dos pares da un número par, a ver cómo lo podrías hacer. Me has dicho probando con casos...

G: sí, con ejemplos.

E: a ver otra forma.

G: sí porque con ejemplos... me vale para ese ejemplo... pero no se me ocurre nada.

E: venga, piénsalo un poquitín más y si no, pasamos a la siguiente. Cuando tú veas que no hay forma, me lo dices y ya está.

(se queda pensando)

(207)

E: a ver cómo lo podrías hacer de otra manera...

G: porque yo tenía un par más otro par, siempre tiene que dar par... me parece.

E: aja... entonces...

G: tiene que ser que al sumarle a un número par, más otro par... siempre tiene que dar otro par.

E: a ver pero ¿por qué?

G: qué es lo que...

E: ¿por qué es eso así?

G: es que no sé.

E: ¿no se te ocurre cómo explicarlo?

G: no.

(216)

TAREA 2

E: venga, pues lo dejamos, la siguiente... determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

G: ¿regiones?

E: regiones son como trozos del plano.

G: ah, sí. ¿Puedes repetir?

E: sí, tienes que determinar el mayor número de regiones que se obtienen al trazar rectas sobre un plano.

(G pone cara de no haber entendido bien)

E: es importante que entiendas lo que te dice. O sea, tú trazas rectas sobre un plano y ¿cuál es el mayor número de regiones que vas obteniendo?

G: yo creo que infinito.

E: a ver, infinito ¿por qué?

G: un plano puede ser una pizarra o... el mar por ejemplo. Si vas haciendo líneas, pueden ser líneas de por ejemplo de un milímetro, ¿no?... o de cero coma tantos milímetros. Hay una región muy chica pero es una región.

E: ... sí. Pero eso sería el número máximo de regiones en general.

G: sí.

E: pero lo que yo te digo es que tienes que trazar rectas. Tú imagínate que yo te digo... con diez rectas, ¿cuál es el número máximo de regiones?

(231)

G: ¡ah! ya entiendo. Sí. A ver si lo pinto... por ejemplo, en este plano una, dos, tres, cuatro... ¿eso es lo que dices?

E: aja, ¿con diez cuántas obtendrías... el número máximo de regiones?

G: o sea así... espera...

(G dibuja y cuenta las regiones)

G: pues... con este sistema habría dieciséis...

E: ¿y ese sería el número máximo o tú crees que habría otra forma de obtener el número máximo de regiones?

G: ... cruzándolas entre ellas.

E: mira, te voy a comentar una cosa. Yo te he dicho diez, pero es un número muy alto. Intenta bajar a ver si con un número más pequeño, te sale mejor.

G: ... vamos a ver con cuatro.

(G dibuja)

G: es que hay muchas posibilidades de hacerlo, ¿no?

E: ... si con cuatro rectas te sale muy complicado, ves bajando.

G: a ver... con tres... ¿son líneas rectas, no?

E: sí.

G: ... con dos, por ejemplo, me salen cuatro.

E: aja.

G: ¿o más?

E: ¿tú crees que hay otra forma de cruzar dos de forma que obtengas más regiones?

G: ¿cruzar dos? (G piensa)

E: ... poner dos rectas de forma que den más regiones.

G: yo creo que esta puede ser una, la de haciendo los cuadrados pero... o, por ejemplo sí, haciéndolas... que no fuesen así por ejemplo, que fuesen más, que no fuesen regulares. A lo mejor...

E: ¿cómo que no fuesen regulares?

G: pues, por ejemplo...

E: con dos, ¿cuántas has obtenido?

(270)

G: con dos, cuatro.

E: con dos, cuatro.

G: y con tres, por ejemplo... (G dibuja) serían tres, cuatro, cinco, seis, siete... me salen siete.

E: sí.

G: (dibuja tres rectas de otra forma) seis. Aquí, haciéndolas irregulares, te saldrían más.

E: pero ¿irregulares qué es?

G: pues que no sean todas... las regiones que no sean iguales, por decirlo así.

E: aja.

G: y con diez pues sería empezar a cruzarlas.

E: pero ten en cuenta que estás dando un salto muy grande, estás dando un salto de tres a diez. A ver, organiza la información que vas obteniendo. ¿Qué has obtenido? Con dos rectas...

G: con dos rectas, cuatro. Con tres rectas, siete... ¿con cuatro rectas? Pues van a ser once.

E: ¿por qué crees que van a ser once?

(289)

G: ... un segundo y lo compruebo.

(G dibujando y contando regiones)

G: ... me salen diez.

E: a ver, mira a ver si hay otra forma de cruzarlas porque ya ahí tienes muchar rectas, ¿verdad?

G: aja.

E: mira a ver si hay otra forma que te salgan más. Porque no sabes si el número máximo es ése. ¿O sí lo sabes?

(se queda pensando y dibuja las rectas de otra forma)

E: ¿cuántas has obtenido allí? (refiriéndose a un dibujo)

G: nueve, me han salido nueve.

E: hasta ahora, el número máximo que llevas es diez, ¿no?

G: (después de probar con varios dibujos) me sale el número máximo diez, con cuatro.

E: fíjate en una cosa. Si esta recta la bajaras un poquitín hacia abajo, ¿no te saldría aquí otra región? ¿Ahí en medio?

G: ¿dónde? ¿Aquí?

E: aja. La última recta que has trazado, si la bajas un poquitín hacia abajo, ¿no obtienes ahí otra región?

(327)

G: ah, sí.

(sigue el consejo y modifica el dibujo)

E: aja.

G: once me salen. Si me sale ésto con una de cuatro, me tiene que salir una de treinta y seis.

E: y ¿por qué has dicho antes, antes de haberla dibujado, que con cuatro rectas te daba once?

G: he dicho que con cuatro me tenía que dar once...

E: tú has dicho que con cuatro te tenía que dar once.

G: porque lo había sumado... y estaba haciendo que... en la de tres se sumaban... de dos a tres había un tres... a lo mejor he supuesto yo, un poco así por... que de tres a cuatro había que sumarle el número ese que había.

E: ah... y sumabas cuatro... al siguiente.

G: sí, al siguiente. Vale, ya.

E: a ver, entonces teníamos que con dos rectas teníamos cuatro regiones. Con tres rectas, teníamos siete. Con cuatro has obtenido once. Y ahora ¿tú de ahí serías capaz de decir, por ejemplo, el número máximo de regiones que tienes con diez rectas sin tener que dibujarlo? Porque si ya has visto ahí que te lias con cuatro, pues si tienes que hacer veinte... ¿hay alguna forma en la que si a ti te preguntan por el número máximo de regiones con tantas rectas, lo pudieras decir?

G: uhmm... a lo mejor si... yo he pensado hacer mejor que si con dos, me salen diez. Con veinte me sale salir x. Por regla de tres.

E: pero con dos eran cuatro, ¿no?

G: eso, con dos cuatro y con diez, me sale x. Pero es que no sale... así.

(364)

E: eso... a ver ¿por qué no sale?

G: por regla de tres... así... (hace cálculos) me saldrían cuarenta y yo creo que es un número muy chico... me parece a mí.

E: a ver, aparte de que tú crees que es un número muy chico, ¿eso te serviría, por ejemplo, para ver el número de regiones que obtendrías con cuatro rectas? Porque si con dos tienes cuatro, con cuatro tendrías x, ¿no?

G: sí.

E: ¿y eso te valdría?

G: lo hemos hecho con cuatro... con cuatro obtengo x.

E: ¿también te valdría, aunque lo tengas hecho para cuatro?

G: sí. Pero entonces me saldría, me saldría ocho... y con esto (refiriéndose al dibujo) me han salido...

E: entonces ¿qué pasa ahí?

G: pues que no me sirve.

E: pues venga. A ver si te sale ahora.

(382)

(se queda pensando)

G: ... no sé.

E: escribe por ahí lo que has hecho hasta ahora, verás como te aclaras.

G: a ver. He cruzado líneas... me han salido cuatro. Con tres me han salido siete. Con cuatro... aquí había un intervalo que era... había que sumarle... es que he visto yo que... a lo mejor hayando las de un número... pero ese sistema no vale porque son muchas líneas... por ejemplo veinte...

E: y si fuera un número pequeño ¿te serviría eso?... porque podrías ir haciendo de uno a otro. Y ahí por ejemplo, con seis líneas, ¿cuántas regiones obtendrías?

G: con seis... según esto... veintiuna... (se pone a dibujar las cinco líneas)

E: ... si no quieres hacerlo con rectas, que te puedes liar...

(428: fin cara A)

G: dieciséis más cinco, que serían veintiuna...

E: cuidado.

G: ah, sí. Serían veintidós, veintinueve, treinta y siete, cuarenta y seis...

E: ... y así irías sumando. Y... ¿eso cómo lo pondrías de forma que cualquier persona pudiera saber el número máximo de regiones para un número determinado de líneas? ¿cómo explicarías eso? ... con palabras o escrito o como quieras.

G: sí... para saber el número mayor de regiones que se puede hacer con un número... habría que... es que probando desde el principio es un poco...

E: ... es un poco largo pero bueno, cómo lo pondrías porque tú crees que es una forma, ¿no?

G: sí, yo creo que sí. Habría que comprobarlo a ver si sería verdad o no.

E: a ver cómo lo harías.

G: el resultado del número anterior más el siguiente número... aquí me queda el resultado de este segundo número.

E: vale, o sea el número de regiones, ¿no?

G: sí.

E: vale, y tú me has dicho antes que eso habría que comprobarlo a ver si es verdad o no.

G: sí. Bueno, ahora no sé si yo...

E: ¿cómo comprobarías eso?

G: pues a la práctica, ahí haciéndolo con las rectas.

E: ... ¿y a dibujar?

G: sí, como son diez rectas, pues...

E: vamos a ver... ¿se te ocurre alguna otra forma de manera que no tuvieras que fijarte en el caso anterior?

G: ... ¿qué no tenga que ver con el caso anterior?

E: aja. Porque con diez rectas, te apañas. Pero ¿y cuando yo te diga cien? ¿lo harás una a una?

G: ¡uf! Ponerse a hacer cien líneas a ver cuántas regiones salen...

E: a ver ¿cómo lo harías? ... o más o menos ¿cómo se te ocurre a ti que podrías plantearlo?
(28 de cinta 2/2)
G: es que...
E: venga, dale unas vueltas a ver si sale.
(se queda pensando un rato)
(42)
G: ... estoy viendo a ver si... si con el diez... a ver si con esos datos.
E: (después de ver los cálculos que hace) ¡ah! con el diez y el número máximo que habías obtenido con diez, ¿no?
G: ... a lo mejor... se puede hacer algo así con la regla de tres.
E: pero no te compliques con diez, vete a números más pequeños.
G: ... con el dos. ¿Puede ser, a lo mejor, el número siguiente menos el anterior, el doble de ese número menos el anterior?
E: mira a ver, no sé.
G: ... no, no saldría porque el doble de cuatro es ocho... no saldría...
(se queda pensando)
G: ¡uy!, es que no se me ocurre.
E: a ver, piensa un poquillo, si no vas mal, estás haciendo cosillas... venga, a ver.
G: más que salir cosillas, estamos desechando métodos.
E: bueno, pues estás viendo cómo no va a ser.
(risas)
E: bueno, pero al final te queda lo que es, o lo que puede ser.
G: ... pero es que hay muchos métodos.
E: a ver, una forma ya la has encontrado, pero esa era muy trabajosa cuando tenías muchos casos, ¿no?
(G piensa un rato)
G: ¡uff!... no se me ocurre... cuando te preguntan, por ejemplo por el número de regiones directamente... yo creo que la haría de la forma que te digo.
E: ¿las vas dibujando?
G: yo creo que sí... porque otra forma.
E: ¿tú crees que hay otra forma?
G: tiene que haber otra forma...
(G pensando un rato)
G: ... no.
E: ¿no? bueno, pues ya está. Está bien, has encontrado una forma, ¿no? Si quieres, te dejo un poquillo más para que lo pienses.
G: no.
E: bueno, pues ya está.
G: es que además estoy encabezonado en que tiene que ser por regla de tres y por regla de tres no es.
E: ¿y siempre acabas pensando en la regla de tres?
G: sí, es que se me va la cabeza porque además, como los problemas que solemos hacer son de regla de tres, pues estoy acostumbrado... pues se me va. Y no caigo en otra cosa.
E: como tú veas, si quieres lo dejamos ya y ya está.
G: ahora... dime cómo es...
(insiste mucho en que le diga cómo se hace la segunda actividad)
(98)

SUJETO: 1BACH1

FECHA Y HORA: 17-1-02, 8:30-9:15

TAREA 1

E: bueno, como ya te he contado, más o menos esto para lo que es... mira, no hay ni respuestas buenas ni malas. Tú simplemente, lo que vayas pensando, pues me lo vas contando. No hay un resultado que sea "el resultado".

RR: vale.

E: ... y si en algún momento no sabes seguir, pues me lo dices y ya está. Lo piensas un poco y, si no sale, sin problema. ¿Vale?

RR: vale.

E: son muy facilitas, ya verás. Vamos a ver, la primera actividad pregunta qué resultado da al sumar dos números pares.

RR: ... un número par.

E: vale, ¿estás segura?

RR: ... sí.

E: ¿sí? A ver, cuéntame.

RR: ... espera que lo piense...

E: venga, piénsalo un poquillo, sí.

(se queda pensando un rato)

E: a ver, ¿por qué me has dicho tan rápido que da un número par?

RR: ... pues, vamos a ver... los números pares van de dos en dos. Entonces, siempre va a ser par, ¿no? Es que no sé cómo explicarme bien.

E: tú cuéntame...

RR: vamos a ver, tú tienes dos números pares y entonces ese número par, por ejemplo, siempre va a ser múltiplo de dos... o sea, por eso es par, ¿no?

E: sí.

RR: entonces claro, al sumarlos, siempre te va a dar un número que también va a ser múltiplo de dos. O sea, que va a ser par.

E: ¿por qué... por qué al sumarlos te va a dar un múltiplo de dos?

RR: ... no sé, eso ya...

E: piénsalo un poquito, que sí lo sabes. Tómate tu tiempo, que no hay prisa.

RR: aja.

(25)

(se queda pensando)

RR: vamos, yo creo que... no sé, yo es que más bien por la experiencia, siempre que sumas dos números pares, te va a dar uno par. O sea, si sumas dos múltiplos de dos, te va a dar un múltiplo de dos. Vamos...

E: pero ¿tú estás pensando en algún caso?... porque tú me estás diciendo que siempre que sumas un número par... pero a lo mejor te encuentras con alguien que te dice que porque tú hayas encontrado en cien casos que se da que la suma de dos pares da par, eso te dice que siempre te va a dar par... ¿tú cómo convencerías a esa persona que siempre que tú sumas dos número pares, da un número par?... ¿por qué esa suma te da que es múltiplo de dos, como tú me estás diciendo?

RR: pues... es que, es que no sé ya cómo explicarlo... porque por ejemplo cuando tú... no sé, quizá al factorizar. Ahí puedes realmente comprobar...

E: a ver ¿cómo factorizas eso?

RR: por... bueno, pues siempre, al final, te va a dar que es par, ¿no?

E: ¿por qué?

RR: porque... o sea, al factorizar siempre te va a quedar el dos ahí...

E: o sea ¿tú coges la suma que tienes y esa es la que factorizas... o factorizas los otros?

(40)

RR: no hombre... para... o sea si yo, por ejemplo me dijeran mira... así todo bien, pues por ejemplo factorizaría a los sumandos y luego pues el resultado también se factorizaría y tendría... donde se puede ver más o menos de qué está formado y puedes, más o menos, comprobar.

E: ¿y eso te valdría para cualquier número? ¿o tú harías esa factorización para el número que te digan? ¿o lo harías en general?

RR: ... pues... yo lo haría en general.

E: ¿cómo es en general?

RR: ¿te refieres a todos los números reales?

E: ... yo te digo que vale pero que si para cualquier número te vale ese razonamiento que tú estás haciendo. Si tú me haces el ejemplo con 1520 y 3700, pues me dices que sí, lo factorizas y me dices que sí porque... pero ¿eso mismo te sirve para cualquier número?

RR: ya, ya. Pero lo hago también con decimales o algo así...

E: no, me refiero para cualquier número, según vayas aumentando el número... tú imagínate que te dicen un millón...

RR: sí, sí.

E: entonces ¿lo harías con cualquier número?

RR: sí, sí.

(54)

TAREA 2

E: vale, te voy a proponer la siguiente actividad. Determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

RR: ¿puedes repetirla?

E: sí, determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

RR: ¿y eso de regiones?

E: regiones son trozos. O sea, en cuántas partes se divide el plano cuando tú trazas rectas.

(RR se queda pensando)

E: ¿el plano sí sabes lo que es, no?

RR: sí, sí. Bueno, más o menos por encima, pero no lo hemos tratado mucho.

E: bueno, puedes considerar el plano como...

RR: una mesa, por ejemplo.

E: eso es, o el suelo... en realidad es ilimitado, no tiene fin por ningún lado.

RR: sí, sí.

E: pero puedes tomarlo más chico para poder manejarlo. Entonces tú vas trazando rectas y tienes que ver en cuántas partes dividen esas rectas al plano.

RR: o sea que tomo las rectas que quiero, una por ejemplo, ¿no?

E: sí, las que quieras.

RR: aja... pues eso no lo sé yo... o sea, yo creo que infinitas, ¿no? Si puedes poner infinitas rectas... y el plano al ser así, tan infinito, tan infinito.

E: sí... vamos a ver. Puedes trazar infinitas rectas, tienes razón. Pero no te está preguntando por el número de rectas que puedes trazar, si no por las regiones que te van a determinar esas rectas que tú traces. ¿Lo entiendes?

RR: aja... o sea que por ejemplo si se cruzan... o sea cuatro, te sale un cuadrado, ¿no? ¿Algo así es a lo que te refieres por región?

E: no. Por ejemplo, tú trazas... si no trazas ninguna recta, ¿cuántas regiones tienes?

RR: tengo el plano, ¿no?

(73)

E: entonces, ¿cuántas regiones tienes?

RR: una.

E: pues así.

RR: ¡ah! Vale. (RR se queda pensativa)... pero sigue pareciéndome infinito... la verdad es que este tema no lo he tocado mucho y no...

E: verás como no sigues pensando así... imagínate que trazas una recta.

RR: aja.

E: ¿cuántas regiones tienes?

RR: dos... ¡ah! ya cambia la historia.

E: ¿ves? O sea, no son regiones que digas que tienes que formar un cuadrado o algo así... si tuvieras un cuadrado, no te saldría sólo una región. Porque... ¿ahí qué rectas has trazado? La recta va de un borde a otro del plano, no te puedes quedar... hacer un cuadrado y quedarte aquí (señala un cuadrado que ha dibujado en medio del plano) porque eso serían segmentitos, ¿no? Porque si formas un cuadrado en el centro del plano, esto (señalando los lados del cuadrado) son segmentos, no son rectas.

RR: aja.

E: ... igual que el plano es ilimitado, las rectas tampoco tienen longitud limitada.

(84)

RR: aja.

E: pues venga.

RR: pero bueno... se pueden cruzar...

E: sí, la posición de las rectas como tú quieras.

RR: pues no sé... la verdad es que yo ahí no... no tengo yo mucha idea, la verdad.

E: tú piénsalo que verás como sí. Me has dicho ya algunas cosas, ¿no?

(RR se queda pensando un rato)

E: a ver ¿qué piensas? Cuéntame.

RR: pero si es que en parte también es un poco... porque si puedes poner rectas superpuestas... puedes poner dos rectas superpuestas y siguen dividiendo al plano en dos.

E: ... ten en cuenta que te está diciendo el número máximo de regiones. Si las pones superpuestas...

RR: ¡ah! el número máximo.

E: si pones dos rectas superpuestas vas a obtener, como tú estabas diciendo, las mismas regiones que con una. Entonces ése no va a ser el número máximo porque si no las pones superpuestas, ya tienes más.

RR: ¡ah! ya.

(RR pensando)

(104)

RR: ... no sé... es que yo seguiría con lo de infinito porque... es algo tan grande lo que... supuestamente tan infinito que puedes poner... tan infinitas rectas... que probablemente dividiría... también varía mucho la posición en que pongas las rectas.

E: aja. Y según esa disposición, ¿cómo obtendrías el número máximo de regiones?

(RR se queda pensando)

RR: ... pues no lo sé... probablemente con diez rectas...

E: piensa con números pequeños, no te vayas a los números grandes. Razónalo mejor con números pequeños, que te va a resultar más fácil.

(se queda pensando)

RR: ... no sé, quizá haría rectas perpendiculares.

E: a ver, venga. ¿Qué obtendrías?

RR: ... pues... a ver... supuestamente quiero dividir así (dibuja)... pues obtendría como cuadraditos muy chiquititos, como puntitos. O sea, si las pusiera todas así muy rectas y todas muy seguidas aquí, obtendría... muy pequeñitos, muy pequeñitos... y probablemente luego, cuando salgan tan pequeñitos, pues volveré a pasar una recta y casi volveré a pasar otra. Entonces así obtendría...

E: ¿y tú así serías capaz de decirme cuál es el número máximo de regiones cuando traces, por ejemplo, cinco rectas?

(RR se queda pensando)

E: ... porque tú estás pensando que haces cuadraditos y luego... pero tú no estás hablando de cuántas rectas trazas, lo estás diciendo en general.

RR: sí.

E: entonces, si yo te digo vale, y con ese planteamiento, qué pasa cuando yo tenga cinco rectas ¿cuál es el número máximo de regiones? ¿cómo lo calcularías?

(RR se queda pensando)

E: ... porque yo no te he dicho cuántas rectas tienes que trazar...

RR: sí, sí.

E: entonces ahora, si yo te digo que tienes cinco... o diez... ¿cómo lo harías?

RR: pues...

(RR se queda pensando)

RR: ... es que yo he pensado una cosa... y es que... a ver, voy a dibujarlo porque...

E: sí, sí.

RR: por ejemplo con cuatro. (dibuja las rectas) O sea uno, dos, tres y cuatro, como yo he dicho, ¿no?

E: sí.

RR: y dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho. Pero también puedo cruzarlas así... vamos a ver. Dos, tres y cuatro (hace otro dibujo con cuatro rectas). (cuenta las regiones) Y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho. Me ha salido igual.

E: siempre... ten en cuenta una cosa... tienes que ver, con esas rectas que estás trazando, si hay otra forma de manera que tú obtengas más regiones... porque te están pidiendo el número máximo.

RR: aja.

E: entonces, a ver si esas rectas, trazándolas de otra manera, obtienes más regiones. ¿No? Porque tú has hecho ahí una división del plano con cuatro rectas pero ¿hay otra forma de trazar esas rectas de manera que tú obtengas más regiones?

(145)

RR: es que...

E: a ver, si con cuatro te lías, vete a otro número más fácil, más pequeño todavía.

RR: bueno, por ejemplo con dos, ¿no? Quizá debería probar antes con una pero con una ya es que... pero con dos sería así... y el número de regiones sería uno... dos, tres, cuatro. Y el número de regiones es uno, dos, tres... no, ya he hecho una... bueno, en el caso de cuatro aquí ya hay menos, ¿no?

E: ¿ves? Según las traces, obtienes un número distinto de regiones..

RR: aja.

E: y ¿cómo obtienes el máximo?

(154)

RR: pero tengo... siempre deberían cruzarse, ¿no? Tengo que si hacemos así... o sea en la de cuatro... uno, dos, tres, cuatro... hay cinco... bueno, ahí tampoco se cruzan y hay cinco también.

E: aja.

RR: entonces, por lo pronto, pienso que deberían cruzarse porque darían como un poquillo de más juego o algo así... y... pues no lo sé ya... podría ser así en diagonal... y en perpendicular... y luego haces así ya cosas más raras... que prácticamente... pues yo opinaría que eso, la verdad es que no estoy muy segura pero... pues la verdad es que nunca me he preguntado estas cosas... (risas) pero vamos.

E: este tipo de problemas no los suelen poner, ¿no?

RR: que va, nunca.

E: pues son entretenidos, ¿no?

RR: pues sí, la verdad es que sí.

E: a ver, venga. Eso sería con dos. Y con dos ¿cuál crees que es el número máximo de regiones?

RR: ... tres y cuatro... yo veo que el número máximo es cuatro.

E: ¿tú crees que esas dos rectas las puedes trazar de otra forma que obtengas más regiones?

RR: a ver que piense (prueba con más dibujos)... siempre saldrían cuatro, ¿no?... porque... sí, porque si las rectas se cruzan, hay una, dos, tres y cuatro.

E: vale. (hace el plano sin borde) Ahí ves mejor el plano como ilimitado...

RR: sí.

E: a ver... ¿y qué pasa conforme vayamos aumentando el número de rectas?

(178)

RR: ... pues que, por ejemplo si se cruzan tres (dibuja), tiene que ser... ¡ah ya! Lo que tengo es el doble, ¿no? ¿O es casualidad?

E: no sé, a ver si esas tres rectas las puedes trazar de otra forma que obtengas más regiones. Eso es lo que siempre te tienes que preguntar, ¿no? Si vas buscando el máximo...

(RR prueba a dibujar las rectas de otra forma)

RR: ... salen las mismas... por ejemplo si ésta viniese por aquí... salen seis... no, sale una más... tres, cuatro, cinco, seis, siete... ya hemos conseguido algo. Y con cuatro... antes salían ocho... y ahora tengo... uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

E: aja.

RR: si no he contado muy mal... a ver, es sorprendente esto, ¿eh? Nunca me lo había planteado. Entonces pues... pues nada, perpendiculares las dejamos porque realmente... vamos, yo creo que... las rectas deben cruzarse siempre... o sea, porque si no, nada. O sea, es mejor que se crucen porque así, aunque sean regiones muy chiquitillas pero al menos algo se consigue.

E: aja. A ver, ve organizando la información que tienes ahí, ¿cómo la puedes organizar?

RR: vamos a ver.

E: tú has ido haciendo ahí una serie de dibujos, a ver cómo organizas eso porque si no, no vamos a llegar a ningún sitio, ¿no?

RR: hombre, claro.

E: a ver, todos esos numeritos cómo los ponemos... de forma que si a mí me dicen que lo he hecho para dos rectas y para tres, pero dime cuál es el número máximo de regiones cuando tenemos cien rectas. No te vas a poner a pintar las cien rectas, ¿no?

RR: nooo.

E: entonces a ver cómo haríamos eso.

E: con tres salían siete, ¿no?

RR: ... cinco, seis y siete. Hay siete.

E: (refiriéndose a los dibujos en los que RR está contando las regiones) ahí tenías seis y en este siete.

RR: bueno, vamos a ver... a ver con dos, está claro que forman cuatro. Con tres, más o menos por la experiencia, hemos dicho que siete. Y con cuatro hemos dicho que diez. O sea que es que tengo como una progresión, ¿sabes? Pero hombre, tampoco es muy de fiar.

E: a ver, te voy a decir una cosa... mira a ver si con cuatro eres capaz de obtener alguna región más por ahí... (RR se queda pensativa) porque con tres has tenido que probar unas cuantas veces hasta que has sacado un numerillo más. Y con cuatro lo has hecho a la primera y te has plantado, ¿no?

RR: sí, sí. A ver si hay alguna forma por ahí que veas...

(239)

(RR prueba a dibujar cuatro rectas de otra forma)

RR: a ver así... uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho.

E: así has obtenido menos, ¿no? O sea, que ese caso ya no nos interesa...

(RR sigue probando)

RR: vamos a ponerlas así como... vamos a ver... uno, dos,... y diez. Ha coincidido otra vez.

RR: es que ya no sé cómo hacerlas.

E: a ver ¿sigues alguna sistematicidad a la hora de trazar las rectas o las estás haciendo al azar?

RR: hombre, aquí por ejemplo, las he hecho al azar, se ve un poquillo claro... y aquí no sé... es más, es ir un poquillo al orden, ¿no?

E: aja.

RR: ... utilizas un sistema que te resulte familiar o algo así, ¿no? A ver, si corto por aquí... un, dos,... y siete. He obtenido hasta menos que aquí.

E: pero ten cuidado porque ahí sólo has trazado cuatro... mentira... tres. Una, dos y tres (señalando el dibujo).

RR: ¡ah, es verdad! Me queda otra... a ver así... una, dos, tres,... y diez. Pues ya no sé si decir diez o algo así... pero la verdad es que...

E: mira, aquí has cortado al plano aquí... este borde es el que ha cortado tu plano, ¿no?

RR: aja.

E: ¿qué pasa si no lo hubieras cortado ahí con esas rectas?

(269)

RR: ... pues que hubiera hecho así... y cada uno... probablemente... pues probablemente formaría más regiones otra vez.

E: a ver, ¿cuántas regiones obtendrías ahí?

RR: a ver, éste de aquí más o menos...

E: bueno, aquí la región diez sería ésta de aquí, ¿no?

RR: sí.

E: a ver.

RR: en el dibujo... de aquí...

E: cuéntalas de nuevo.

RR: ¿también las de dentro?

E: sí claro, todas.

RR: sí, sí. A ver, tenemos ahí diez y he sacado once y... o sea, he encontrado una más.

E: once, ¿no?

RR: sí.

E: ya hemos encontrado una más.

RR: aja... es que es relativo, no sé.

E: ¿sabrías decirme por qué ése ya es el número máximo? O tú seguirías dibujando a ver cuál es el número máximo...

RR: no, hombre... es que si probablemente siguiéramos alargando lo que son las rectas, probablemente hasta si estuvieran así más derechillas, pues también tendríamos así paralelas... parece que se abren, ¿no?

E: sí.

(300)

RR: probablemente podrían cruzarse o... yo qué sé.

E: o sea, que no tienes tú muy claro que ése sea el número máximo.

RR: no, que va. O sea, habría que seguir alargando un poco las rectas y tal para realmente comprobar si se vuelven a cruzar y bueno, y ya no solo en esta disposición. Y con otra disposición seguir estudiando si puede dar la casualidad de que se crucen porque... hombre, los dibujos a lo mejor no están muy bien pero al final lo que está derechito pues puedes ver si más o menos se puede volver a cruzar... o se separa. O sea, habría que estudiar las rectas ya para decir bueno, pues éste es ya el número final y no se puede hacer más.

E: vale.

RR: ... vamos, yo he llegado a esa conclusión.

E. bueno, pues entonces te voy a dar una pistilla... con cuatro rectas, has obtenido once, ¿no?

RR: aja.

E: pues ése sí es el número máximo con cuatro rectas. ¿Sabrías decirme, de alguna forma, por qué, con el dibujo que tienes ahí? ¿o lo sigues viendo lioso?

RR: hombre, liosillo está... por ejemplo éstas (refiriéndose a uno de los dibujos) difícilmente... porque mira lo que pasa, se abren... bueno y éstas (señala a otro dibujo) ya ni te cuento. Éstas, aunque no estén muy derechitas, pues mira lo que pasa también... y por aquí ya ni te cuento, éstas van totalmente a su bola. Bueno probablemente así, tan grande digas... pero así ya... difícilmente creo que puedan llegar a juntarse... y ya con tres pues no sé... lo mismo. Yo he cogido, por decirlo así, un cachito del plano ¿no?

E: sí.

RR: también tendrías que pensar que eso no es el plano realmente, que el plano es muchísimo más grande. Y que las rectas, pues tienen una dirección y tal que habría que tener muy en cuenta.

(340)

E: ... vale, entonces vamos a ver. Con cuatro hemos dicho que lo íbamos a dejar en once. Entonces ahora tenemos que con dos hemos obtenido cuatro, con tres hemos obtenido siete, y con cuatro once. Ahora si yo te digo que me digas cuál sería el número máximo de regiones que puedes obtener cuando traces diez rectas, ¿cómo me lo dirías tú... sin tener que hacer las diez rectas?

RR: hombre, de aquí prácticamente... bueno, no.

E: ¿qué vas viendo en esos datos que has obtenido?

RR: ... hay como una progresión, ¿no?

E: y ¿cómo es esa progresión?

RR: ... no me fío... a decirla como verdadera porque eso no...

E: a ver, lánzate y dime.

RR: (basándose en la tabla) es que aquí veo que es éste más tres, y éste es más cuatro... probablemente aquí sería más cinco.

E: ¿y cómo pondrías eso de forma que me pudieras decir a mí cuántas salen con un número de rectas?

RR: ... estoy pensando que... con la de tres sería el doble más uno. De cuatro...

(364)

RR: ... sería... ¡puf! Y ésta sería dieciséis y en ésta serían veinticuatro.

E: cuidado porque me parece que te has equivocado al sumar. Éste era once más cinco dieciséis...

RR: ... ¡ah! y aquí serían veintidós.

E: eso.

RR: por ejemplo aquí sería el doble más uno. Aquí sería el doble más tres. Aquí sería el doble más seis. Y aquí sería el doble más diez... o sea, tendría que... no sé, pues ya...

E: a ver qué se te ocurre.

RR: lo único que así... quizá por el más seis ya...

(RR se queda pensando un rato)

RR: pues no sé ya... hay que buscar la relación... vamos es que lo di el año pasado o sea que, más o menos, me tenía que haber acordado pero...

E: pero tú razónalo un poquitín a ver cómo, ¿qué relación observas tú ahí? Si ves alguna... porque has visto alguna, ¿no?

RR: sí.

E: me estás diciendo que ésa podría ser, entonces ¿cómo sería?

RR: es que no me fiaría mucho, no sé... probablemente tendría que experimentar más.

E: ¿te harían falta más casos?

RR: sí.

E: pues si quieres, hazlos.

RR: no sé, ya es que se complica más sabes... pero estudiarían un poquito más. Sobre el caso, antes por ejemplo de decir venga ya está, he visto que con cuatro hay once y ya pues de ahí tengo que partir... no porque a lo mejor la cinco la puedes disponer de otra forma que quizá aquí, según la relación que yo he dicho sale dieciséis... a lo mejor con cinco salen veinti y pico.

E: aja.

RR: o salen más o salen menos. Tendría que seguir... estudiarían por lo menos unos diez casillos. Al menos hasta los diez primeros o hasta los nueve primeros y ya a partir de ahí ya... ya estudiaría un poquillo pues mira aquí está esta relación o simplemente pues, no hay ninguna.

E: entonces, ¿lo dejarías así?

RR: sí.

(431: fin cara A)

SUJETO: 1BACH3

FECHA Y HORA: 21-1-02, 11-11:35

TAREA 1

E: bueno, esto es para mi trabajo de investigación, ya os comenté el otro día un poquito. Entonces te voy a plantear dos cuestiones, pero no hay respuestas buenas ni malas. Tú me contestas como piensas que es y ya está. Me interesa cómo lo vas pensando.

AI: desarrollando.

E: exacto. Y hasta donde llegues. Yo no tengo ningún objetivo marcado, ni tienes que acabar la actividad ni nada de eso. Lo que tú seas capaz de explicarme. Vamos a ver, la primera actividad dice qué resultado da al sumar dos números pares.

AI: un número par. (respuesta inmediata)
E: ¿seguro?
(6)
AI: sí.
E: a ver ¿por qué? Explícame un poco.
AI: es que...
E: cuéntame.
(AI se queda pensando)
E: a ver, ¿por qué me has contestado tan rápido que la suma de dos números pares da otro par?
AI: es que... es automático. Cualquier número par más otro número par, te va a dar siempre otro número par.
E: ¿por qué?
AI: yo qué sé... por.. eh... ni idea.
E: piénsalo un poquito, ¿por qué lo has dicho tan rápido?
AI: porque sé que un número par y un impar te da de resultado un impar y... par y par, pues dará par.
E: pero ¿por qué da par? Tú imagínate que tienes que convencer a alguien de que siempre que sumes dos números pares te da un número par.
AI: ... porque si cojo una escala del uno al diez y empiezo a sumar los números pares... voy obteniendo números pares y si sumo los impares también me dan pares. Pero ahora, al sumar par e impar, me da impar.
E: sí.
AI: entonces saco la conclusión que los números pares sumados entre sí y los impares entre sí, dan par.
E: sí, pero tú lo has hecho del uno al diez. Si es un número muy alto, ¿cómo lo haces?
AI: igual.
E: ¿cómo es igual?
(25)
AI: yo cuando voy a hacer una suma y miro los números, me fijo siempre en el último número. Por ejemplo, si es el mil once... no sé, al ver la terminación si es par o impar, el resultado sé lo que va a salir, si es par o impar. Entonces, cuando lo realizo me da un número distinto a lo que yo pensaba, pues entonces sé que lo tengo mal.
E: ¿y con ese razonamiento tú serías capaz de convencer a alguien de que siempre que tengas dos pares y los sumes, te da un número par?
AI: sí.
E: vale. ¿Si termina en un par, es par y si no, no?
AI: vale.
(32)

TAREA 2

E: a ver, la siguiente dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano. (pone cara de extrañado) ¿Lo entiendes?
AI: ¿puedes repetir?
E: sí. Determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
AI: infinitas.
E: ¿infinitas regiones o infinitas rectas?

AI: infinitas rectas.

E: vale, pero te está preguntando el número máximo de regiones, no de rectas.

AI: y región ¿a qué se refiere?

E: región es trozo. Preguntan por las partes en las que se divide un plano cuando tú traces rectas.

AI: pues si trazas una recta en un plano pues habrá una.

E: a ver, si trazas una recta en un plano, ¿cuántas regiones tienes?

AI: pues... por ejemplo, trazo esta recta (dibuja)... y me da aquí el punto de esta coordenada y esta coordenada. Pues entonces el tramo que tengo es desde este punto hasta este punto.

E: no, vamos a ver... la recta tiene que ir desde aquí hasta aquí... es infinita, no tiene fin.

AI: entonces hay infinitos tramos.

E: espera, no son tramos sino las partes en las que te divide al plano. Esa recta, ¿en cuántas partes te ha dividido al plano?

AI: en dos.

E: sería lo que hay por arriba de la recta y lo que hay por abajo.

AI: pues el máximo de... en dos.

(47)

E: en dos. Entonces, si tienes una recta sería en dos.

AI: y... ¿la pregunta era?

E: ¿cuál es el número máximo de regiones que se determinan en un plano cuando tú vas trazando rectas?

AI: ... el máximo... o sea el número de regiones...

E: con una recta has obtenido dos regiones, ¿no’

AI: sí.

E: y la pregunta te dice que determines el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

AI: son infinitas.

E: ¿por qué?

AI: porque esto continuaría por aquí...

E: sí, pero si continúa ¿cuántas regiones tienes?

AI: una.

E: (refiriéndose al dibujo) sería ésta de arriba y ésta de abajo. Aunque tú lo alargues esto por aquí, tendrías dos regiones, ¿no?

AI: sí.

E: a ver.

(59)

AI: pasaría siempre por una región.

E: ¿la recta?

AI: claro. Bueno, también depende de cómo esté situada... depende de la recta. Porque si pasa así, pasa por las dos regiones.

E: vale, pero si tienes así la recta, ¿cuántas regiones tienes?

AI: dos, ésta y ésta.

E: pero sigues teniendo dos regiones.

AI: siempre... la recta la pasas por dos regiones.

E: la recta va a determinar dos regiones, ¿no?

AI: sí.

(se queda pensando)

AI: esa recta va a tener infinidad de... yo qué sé, es que...

E: pero imagínate que, en vez de una recta, tienes diez rectas, ¿cuál es el número máximo de regiones que determinarían?

AI: ¿con las diez o cada una?

(70)

E: con las diez.

AI: pues serían veinte regiones.

E: ¿seguro?

AI: no, cuatro, cuatro regiones.

E: a ver.

AI: depende de... poniendo el conjunto de rectas, yo aquí en total tengo cuatro regiones.

E: pero ten en cuenta que ya son rectas que tú has trazado, ¿no?

AI: sí pero a lo que me refiero es que yo trazo rectas en horizontal y en vertical.

E: aja.

AI: en horizontal tengo dos regiones, ésta y ésta. Y en vertical tengo ésta y ésta. Pues trazando diez rectas en diferentes posiciones, pues siempre van a pasar entre estas dos y estas dos. O sea que la suma son cuatro regiones. Estas dos y estas dos.

E: aja. Vamos a ver, tú con dos rectas, ¿cuál ha sido el número máximo de regiones?

AI: cuatro.

E: cuatro, ¿y con tres?

AI: cuatro... depende de cómo las sitúes.

(81)

E: te están pidiendo el número máximo.

AI: ¿de rectas?

E: de regiones.

AI: (dibuja) ... si yo trazo esta recta, ésta y... otra así...

E: pero ahí estás trazando más de tres rectas. Yo aquí estoy viendo una, dos, tres, cuatro y cinco.

AI: ¡ah sí! Entonces, cuando tengo tres rectas... (dibuja) pasa por dos regiones.

E: y ¿ahí cuántos trozos tienes?

AI: ... éste es el eje de coordenadas.

E: vale, llámalo eje de coordenadas pero también son dos rectas, ¿no?

AI: pues entonces siempre pasa por dos. Ésta siempre va a pasar por ésta y por ésta, ésta va a pasar por ésta y por ésta y ésta por ésta y por ésta.

E: pero ahí ¿en cuántos trozos tienes dividido al plano?

AI: en seis.

E: pues esas son las regiones.

AI: ¡ah!

E: pues mira a ver si puedes trazar... ahí has trazado tres rectas y te están pidiendo el número máximo de regiones.

AI: ¡ah! yo es que me creía que se refería la recta en el eje de coordenadas. Entonces ya así...

E: pero es que el eje de coordenadas son también rectas.

AI: sí.

E: es lo que te quería hacer ver.

(96)

AI: ... que... las regiones son infinitas porque depende del número de rectas, las regiones van a ser el doble.

E: ¿siempre va a ser el doble?

AI: sí.

E: mira a ver si eres capaz de dibujar tres rectas de forma que obtengas un mayor número de regiones, mayor que seis.

AI: ... siempre me da seis.

E: mira a ver si hay alguna forma. Piénsalo un poquillo. Ten en cuenta que tienes que dibujar el máximo número de regiones. Yo estoy viendo ahora mismo otra.

(AI se queda pensando un rato)

AI: puede haber cuatro porque puede haber una recta que sea coincidente con otra.

E: pero como te están pidiendo el número máximo... ese lo tienes que descartar. Tienes que estar buscando, como aquí has encontrado seis... mira a ver si puedes encontrar más de alguna manera.

AI: no, no hay más.

E: mira a ver.

(AI se queda pensando)

AI: regiones es cuando corta una recta con otra, ¿no?

E: no, el espacio que te queda. (refiriéndose a los dibujos) Aquí, fíjate, aquí tendrías una, dos, tres, cuatro, cinco y seis. Y ahí (refiriéndose al último dibujo que ha hecho) ¿cuántas tendrías?

AI: siete. Entonces las regiones es según el...

E: son los trozos en los que se divide, que no tienen porqué ser limitados. Porque éste seguiría. Éste, sin embargo sí es limitado, ¿ves?

AI: sí, sí.

E: a ver ¿qué vas obteniendo por ahí?

AI: sería que... cuando tienes por ejemplo tres rectas y las cruzas entre sí, te va a dar el doble más uno.

E: aja.

AI: es lo que yo...

E: antes habías dicho el doble... parece que ya no vale, ¿no?

AI: no, el doble más uno. Por ejemplo un número de rectas... me va a dar, en regiones, siempre el doble de ese número más uno.

E: aja. A ver, ¿eso va a pasar siempre?

(132)

(se queda pensando un rato)

AI: sí... porque dos rectas forzosamente se van a cortar y te van a dar cuatro regiones. Ya según sitúes la tercera recta... no, voy a probar con cuatro.

E: a ver.

(AI se pone a dibujar las cuatro rectas)

AI: no... no me cuadra.

E: espera... ¿ahí cuántas has obtenido con cuatro?

AI: quince.

E: pero eso ha sido con cinco, ¿no? Con cuatro ¿cuántas habías obtenido?

AI: había obtenido... diez.

E: pero a lo mejor hay alguna forma de obtener más de diez. Acuérdate que con tres tuviste que dibujar varias veces a ver si obtenías alguna más.

AI: sí.

E: ... y ya parecía que ése era el número máximo, ¿no?

AI: sí pero...

E: a ver si con cuatro hay alguna manera, mira a ver.

(prueba a trazar cuatro rectas de una forma distinta)

AI: ... once.

E: o sea, que ya te ha salido más que antes, que tenías diez... ¿qué vas observando ahí?

(se queda pensando)

AI: pienso que no hay ninguna norma fija, algo que determine... según el número de rectas, el número de regiones.

E: a ver. Mira a ver, ve escribiendo lo que has obtenido en algún sitio a ver si observas algo más.

(AI organiza la información)

AI: con una recta obtengo dos regiones. Con dos rectas, cuatro. Con tres rectas... siete... Entonces con cinco me tiene que dar forzosamente dieciocho.

E: ¿por qué? A ver.

AI: yo, fijándome en estas tres rectas... cuando corto cuatro rectas, me dan once regiones, que es la suma de tres rectas más la diferencia que hay entre la que tengo ahora.

E: ¿cómo? Tres rectas más ¿qué diferencia?

(189)

AI: o sea... yo tengo siete rectas...

E: siete regiones, ¿no?

AI: eso, siete regiones... entonces al trazar otra recta pues sumo de regiones, la diferencia que hay entre... las... el número de regiones que había en las otras rectas anteriores cruzadas. O sea, si de aquí a aquí hay tres, pues el siguiente me va a dar... no... no llego así a una norma fija.

E: a ver, a ver. Dale vueltas a eso a ver qué sale.

(se queda pensando un rato)

(208)

E: a ver, ¿sigues algún sistema a la hora de trazar las rectas o lo haces a boleo?

AI: no porque... trazando las rectas así... inclinadas. Y después trazo otras horizontales y verticales es como obtengo mayor número de regiones. Ése es el sistema que estoy siguiendo, o sea que va a llegar un punto en que... como una libreta de cuadros (dibuja)... y después todo se cruza, así es como obtengo el mayor número de regiones.

E: pero ¿eso fue lo que hiciste, por ejemplo, con tres rectas? Fíjate, ¿qué hiciste con tres rectas?

AI: con las tres rectar trazo aquí una horizontal y una vertical y la que tracé, inclinada... o sea, para obtener mayor número.

E: y ¿con cuatro cómo lo hiciste?

AI: con cuatro...

E: ¿cómo trazas la cuarta?

AI: ... trazo dos inclinadas, una vertical y otra horizontal... bueno, pero más arriba (refiriéndose al dibujo).

E: aja. ¿Y ahí estás haciendo una libreta de cuadros?

AI: bueno, si continuase sí.

E: ¿tú crees?

AI: sí porque yo hago esto (dibujando).

E: sí.

AI: entonces si continúo...

E: pero párate ahí. Ahí has trazado cuatro rectas, ¿no?

AI: bueno, no me salen cuadrados, me salen triángulos.

E: sí pero ¿ahí tienes el número máximo de regiones, las once?

(232)

(se queda pensando)

AI: yo es que nunca me había planteado esto... o sea, la pregunta es cuántas regiones...

E: cuál es el número máximo de regiones que obtienes al trazar rectas.

AI: infinitas. No, según la posición de las rectas. No es lo mismo trazar tres así, que me dan seis. Que trazar tres así.

E: exacto, y ¿qué vas viendo ahí?

AI: que según la forma que forme con esas tres rectas, me da más regiones o menos.

E: y eso lo tienes con tres rectas. Y con cuatro ¿qué ha pasado? Tienes ya las once regiones...

AI: ... con cuatro... que, al trazar las rectas y formar con ellas un triángulo equilátero.. pues obtengo mayor número de regiones.

E: vale, ¿ahí cuántas has obtenido?

AI: diez, ¿no?

E: pero ¿es el número máximo?

AI: once.

(AI se queda pensando un rato y sigue dibujando)

E: mira, vamos a hacer una cosa... si te lías con los dibujos de las rectas, para en cuatro rectas.

AI: sí.

E: tenemos ya el caso con una, con dos, con tres y con cuatro. Mira a ver si ahí ves algo que se repita, ¿no? Tú estabas tratando de ver ahí alguna relación, ¿no?

AI: sí.

E: pues a ver si ves algo de forma que tú, con eso que tienes ahí me supieras decir que con diez rectas te van a salir tal número de regiones, a ver si lo ves.

(AI se queda pensando un rato)

(299)

AI: lo que estoy observando es que... según... se va progresando el número, o sea uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho... con el tres he observado que me daba el doble más uno. Con el cuatro me daba el doble más tres. Con el cinco me va a dar el doble más cinco. Pues según la serie esta de números... enteros seguidos... al doble de ese número, al sumarle uno, tres, cinco... estoy viendo que la diferencia siempre a ser dos, entonces...

E: a ver, ¿cómo pones eso?

AI: entonces, tengo que probar que... esto (refiriéndose al caso en que trace seis rectas) me tendría que dar el doble más siete... (sigue probando con más dibujos) Sí me da, son diecinueve. Me daría, o sea, seis por dos doce más siete diecinueve. Y aquí me ha dado diecinueve (compara dibujo con lo que había pensado).

E: pero... fíjate en una cosa. Si tú eres capaz de trazar estas dos de forma que se corten, obtienes más regiones, ¿no? O sea, que ya no se cumpliría eso que tienes ahí.

(330)

AI: o sea...

E: éstas dos (señalando en el dibujo) en vez de hacerlas paralelas, que se corten en algún punto.

(AI dibuja)

AI: o sea... ni idea.

E: es que con tantas rectas te puedes liar, quédate en casos más simples.

AI: pero es que al quedarme simple y salga la norma, al hacerlo con un número grande me contradigo a mí mismo.

E: pues trata entonces de buscar una norma en la que no te contradigas.

(AI se queda pensando un rato)

AI: yo no...

E: a ver si se te ocurre algo. Si no, pues ya está. Cuando tú te canses lo dices.
AI: me estoy dando cuenta de que soy tonto.
E: no, que va, ¿por qué?
AI: esto parece muy simple pero...
E: no, no es tan simple.
(AI se queda pensando)
AI: esto tiene que tener una fórmula por...
E: a ver. Y esa fórmula ¿qué va a hacer?
AI: ... determinarme cuando trazo un número de líneas, ver un número de regiones.
E: vamos a ver... hasta ahora ¿qué dibujos tienes claros?

(378)

AI: cuando trazo una recta me dan dos regiones. Cuando trazo dos me dan cuatro. Cuando trazo tres me dan siete.
E: y cuando trazabas cuatro te daban once, ¿no?
AI: sí.
E: pues entonces mira con esos números porque te estás dando cuenta de que cuantas más rectas tienes, más te complicas, ¿no?
(AI escribe algunos de los datos que ha obtenido)
E: eso es el número de regiones que has obtenido, ¿no? (refiriéndose a los datos que ha organizado)
(AI se queda pensando)
E: ¿y el número de rectas que trazabas?
(AI anota el número de rectas junto al número de regiones)
E: a ver esa tablita que has hecho ahí...
AI: espérate a ver si me estoy colando ya... esto lo di yo el año pasado.

(398)

E: a ver si te sirve de algo lo que diste, no lo sé.
AI: ... esto es una serie de números contiguos el uno al otro. Entonces esto sería... (se queda pensando) ... ya está, si... si es que... a ver, por ejemplo estos dos me dan éste, estos dos me dan éste, estos dos me dan éste... o sea, cinco me debería dar dieciséis. Y así sucesivamente.
E: a ver, y eso ¿cómo lo escribes?
AI: pues... (se queda pensando)

(430: fin cinta 1/2)

AI: (escribe una fórmula) a ver, cojo un número, o sea, el uno más dos por uno dos menos dos, cero. Sale esto cero... espera, es que con uno es un mal ejemplo. Por ejemplo con dos... no, sería n... dos por dos cuatro, menos dos, dos. Tres por dos seis, menos dos, cuatro. Cuatro por dos ocho... vamos a ver.
E: vamos a ver, n ¿quién es? ¿el número de rectas?
AI: sí, el número de rectas.
E: vale.
AI: esto serían las rectas.
E: ¿y el número de regiones sería 2n-2? (leyendo lo que AI ha escrito)

(12)

AI: sí porque... n es esto...
E: pero entonces ¿tendrías con una región dos por una dos, menos dos, cero?
AI: pero... es que me da el anterior... o sea... que... que por ejemplo si quiero saber el número de regiones que me da con diez rectas, pues tengo que coger el número que cortaría once rectas. O sea, r igual a dos por once menos dos y me da el número que... de regiones que

hay en diez rectas. Porque lo que estoy hallando es, con el número éste, con la casilla ésta, al sustituir 2n en éste pues me da siempre el número de regiones de uno.

E: aja.

AI: o sea... sería...

E: según eso, el número de regiones con once rectas sería...

AI: vamos a ver, yo he llegado a esto... veintidós menos dos veinte. O sea que con once rectas me tienen que dar veinte regiones.

E: fíjate en el caso de tres rectas, ¿qué es lo que sumas ahí? Con tres rectas, ¿cuántas regiones obtienes?

AI: siete.

E: vale y ese siete ha salido de...

AI: ¿siete? Ha salido de... el número de serie siguiente...

E: (antes hizo el razonamiento con el anterior) ¿del siguiente o del anterior?

AI: por ejemplo para saber el número de regiones que hay cuando se cortan tres rectas, pues... me voy al número siguiente, o sea al cuatro y digo cuatro por dos... pues no... que me da con los números pares.

E: a ver, ahí, en el dibujo ese parece que te vale para todos, ¿no? ¿Cómo se escribiría eso? Porque hasta ahí te ha valido ¿para pares y para impares? Para el tres te ha servido también...

(AI se queda pensando un rato)

E: a ver, si eso casi está, ¿no?

AI: pero estoy...

(AI se queda pensando otro rato)

(71)

AI: lo tengo pero... ¡uf!

E: lo tienes pero se te va, ¿no?

AI: he llegado a la conclusión... aquí va progresando n. n+1, n+2, n+3, n+4 (refiriéndose al número de rectas) y aquí esto va... de aquí a aquí hay uno, de aquí a aquí hay dos, de aquí a aquí tres, cuatro y cinco. Y así, esto iría sucesivamente... ahora, ¿cómo relaciono yo esto?

(AI se queda pensando)

(84)

AI: o sea, voy a poner el caso de que... quiero saber el número de rectas que se cortan en diez, ¿no?

E: el número de regiones.

AI: eso, el número de regiones que hay en diez... pues haría n+10... n+5... (hace cálculos).

E: bueno, lo vamos a tener que dejar ya.

AI: sí.

E: has sacado ya alguna relación, ¿no?

AI: sí pero si me pongo así a desarrollarlo sí llega pero una norma que generalice sería... sería n+10 más la diferencia que...

E: venta, nos tenemos que ir, está bien.

AI: que va, ahora yo esta tarde llego a mi casa y lo saco, esto lo tengo que sacar yo ya, vamos.

(124)

SUJETO: 1BACH2

FECHA Y HORA: 31-1-02, 8:30-9:25

TAREA 1

E: ... te voy a dar un par de folios por si necesitas escribir algo. El otro día conté un poco en clase de lo que iba esto, ¿te acuerdas? Yo estoy haciendo el doctorado y tengo que hacer un trabajo de investigación. Yo te voy a hacer unas preguntillas de matemáticas, que no es sobre algo que hayáis hecho y lo tengas que saber de memoria, sino que tú lo que vayas pensando pues me lo vas diciendo y ya está. No hay ni respuestas buenas ni malas, así que no pienses si lo estás haciendo bien o mal. Tú simplemente lo que pienses. Son dos actividades sólo.

JLL: vale.

E: Lo primero que te pregunto es ¿qué resultado da al sumar dos número pares?

JLL: un número par.

E: a ver, ¿por qué?

JLL: porque... vamos a ver... por lógica.

E: a ver, ¿siempre te va a dar un número par?

JLL: vamos a ver... sí, siempre.

E: cuéntame.

JLL: porque... cómo lo explico yo... en una sucesión, los números pares siempre... es que no sé cómo explicártelo porque... pues...

E: ¿tú por qué me has contestado tan rápido que da un número par?

JLL: ... es que es de lógica.

E: a ver, cuéntame un poco más.

(147)

JLL: pues... yo diría... no sé, es que no sé.

E: tú sin prisa, piénsalo a ver porqué. Aparte de porque me suena... ¿tú crees que siempre da un número par?

(JLL lo piensa un momento)

JLL: sí, siempre da un número par.

E: pues tú imagínate que me tienes que convencer a mí de que siempre da un número par. A ver cómo me convences.

JLL: pues... como se hacía era simplemente... ver la práctica. O sea la demostración es simplemente... es la práctica. Tú empiezas a sumar números y vas viendo que todos dan número par... no sé.

E: ¿y tú cogerías tooodos los números pares que existen y los sumarías con tooodos los números pares que existen...?

JLL: no, vamos a ver pero... no sé, no hace falta más que coger números aleatorios, sumarlos entre sí y te das cuenta de que siempre te da un número par.

E: ¿se te ocurre otra forma de hacerlo que no sea sumando...? Porque tú imagínate que yo te digo que me digas qué pasa con la suma de mil setecientos veintiocho y cuatro mil quinientos veinte y tú me dices que claro, los dos son pares, los sumo y da par. Pero eso te está diciendo que esos dos números son pares y la suma te da un número par. Pero ¿tú crees que eso te dice que siempre que tú tengas dos números pares y los sumes, vas a obtener un número par? Pero que siempre, siempre da un número par... a ver cómo lo harías...

JLL: pues... podría ser... mira, cualquier número que tengas, por ejemplo mil doscientos cuarenta, siempre coges la última cifra. Y luego tienes otro, mil trescientos treinta y dos. Y luego coges la última cifra. Los números pares del cero al nueve... el diez ya sería de dos cifras. Si tú sumas los números pares... cualquier número par del cero al nueve que sumes, te va a dar un número par. Cualquier pareja de números pares, el cero con dos, el dos con cuatro, el cuatro con ocho, el cuatro con dos. Siempre te va a dar números pares. Pues... todo está en coger la última cifra de cada número y sumarla. Si la última cifra que has sumado te da un número par, pues te da un número par.

E: entonces, ¿te fijas en las terminaciones?

JLL: exacto.

E: la sumas y como te da un número entre esos...

JLL: ... y siempre tienes cero, dos, cuatro, seis, ocho. Sumes lo que sumes, siempre te va a dar un número par.

E: sí.

JLL: y en la última cifra sólo puede haber un número que esté entre éstos.

E: aja.

JLL: si no, sería impar. El nueve, el tres o el cinco sería impar... Tienen que ser los dos pares, te fijas... siempre va a dar un número par.

E: vale, y ¿eso lo haría con cualquier número?

JLL: claro.

E: venga, te voy a proponer otra.

(189)

TAREA 2

E: determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

JLL: no entiendo la pregunta.

E: te la repito y, si no, te la intento explicar. Dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

(JLL parece no haberla entendido)

E: ¿regiones sabes lo que son?

JLL: no.

E: son trozos. Tú tienes un plano y vas trazando rectas. Entonces tienes que determinar el mayor número de regiones o de trozos en los que se te queda dividido el plano. ¿Lo entiendes ahora?

JLL: sí pero... ¿tomamos siempre como que la recta tiene que pasar por un punto o algo?

E: no, las rectas las trazas como tú quieras.

JLL: pues... infinitas.

E: ¿infinitas qué? ¿rectas o regiones?

JLL: infinitas regiones... regiones hemos dicho que son la partes en las que queda dividido, ¿no?

E: sí.

JLL: pues infinitas regiones e infinitas partes. Porque si las rectas son infinitas, el número de regiones que tú halles, serán infinitas también.

E: pero yo no te he dicho que el número de rectas sea infinito.

JLL: ¿cuántas rectas tienes?

E: las que tú quieras.

(209)

JLL: ah, vale, vale.

E: ¿sí? Tú vas trazando las rectas que tú quieras. Entonces a ver cuál es el número máximo de regiones que obtienes.

JLL: pues... pues yo creo... el número de regiones está en proporción al número de rectas... eh... siempre está en proporción al número de rectas. Por cada recta que traces, conseguirás dos regiones.

(218)

E: vamos a ver. Tú ahí has trazado tres rectas.

JLL: sí.

E: y has obtenido seis regiones. Mira a ver si hay otra forma de trazar tres rectas de manera que tú obtengas más regiones. Porque te están preguntando por el número máximo de regiones, ¿no?

JLL: ya, ya.

(JLL prueba con distintos dibujos)

JLL: yo creo que nunca vas a poder... nunca podrás conseguir más de seis regiones con tres rectas. Porque el máximo número de regiones estará cuando las tres rectas tengan el mismo... punto central.

E: ¿seguro?

(233)

JLL: espera...

E: venga, piénsalo.

(JLL se queda pensando y probando con los dibujos)

JLL: si...

E: ¿qué pasa ahí?

JLL: ... ¿cuál era la pregunta? ... es que ya, con las rectas...

E: tienes que determinar cuál es el número máximo que obtienes al trazar rectas sobre un plano. Entonces tú hasta ahora, ¿qué tienes? ¿qué has obtenido?

JLL: me han salido siete.

E: ¿con tres rectas?

JLL: sí.

E: y antes ¿qué tenías?

JLL: seis.

E: entonces, entre esos dos cogerías el de siete, ¿no? Pero mira a ver si hay otra forma de trazar tres rectas porque lo mismo obtienes más regiones.

JLL: pues...

(se queda pensando un rato)

(269)

JLL: yo creo que no...

E: ¿cuántas has obtenido ahí? (refiriéndose al último dibujo de JLL)

JLL: seis.

E: no, siete también, ¿no?

JLL: uno, dos, tres, cuatro... ah, ésta. Siete.

E: entonces parece que no salen más de siete, ¿no?

(JLL sigue probando)

JLL: parece que son siete.

E: pues venga, a ver, ¿qué vamos sacando?

JLL: que tendrían que ser seis (risas, lo dice de broma)... no, no... Sacamos...

E: te ha roto los esquemas, ¿no? Bueno pero vamos a seguir a ver. Has obtenido ya que con dos rectas eran cuatro regiones, ¿no?

JLL: sí.

E: ¿y con tres?... siete.

(JLL se queda pensando y se pone de nuevo a dibujar)

E: ahora ¿vas a probar con cuatro?

JLL: a ver a qué proporción va.

E: a ver. ¿Cuántas te salen?

JLL: diez.

E: ¿las has dibujado a ojo o has seguido alguna sistematicidad?

JLL: pues... como antes... antes he visto que pasando por el centro no salía el mayor número de rectas, tendrías que pasar una de las rectas cortando a dos porque así salen más regiones.

E: aja.

JLL: pues entonces lo que he hecho es hacer esa cruz en ambas (refiriéndose al dibujo) y las otras dos rectas, antes en el de cuatro las he pasado...

E: ... ¿que corten a las otras dos?

JLL: y en ésta, como sólo tengo una...

E: aja.

(309)

(JLL se queda pensando un rato)

(325)

JLL: es que lo veo yo esto muy raro.

(JLL sigue pensando y probando con los dibujos)

JLL: no sé... pues... yo no lo saco... no sé.

E: venga, dale vueltas, verás como sale. Ya vas sacando por ahí cosillas, ¿no? (refiriéndose al dibujo con cuatro rectas) ¿Cuántas te han salido con cuatro?

JLL: diez.

E: pues mira a ver si puedes sacar alguna más. Si no, pues será diez el número máximo. Tú siempre tienes que ir buscando el máximo número de regiones, a ver cómo las puedes ir obteniendo.

(JLL traza las cuatro rectas de otra forma)

E: ése es el mismo que tenías antes, ¿no?

JLL: ... pero es que no se puede hacer de otra forma... claro que... tienen que ser líneas rectas, ¿no?

E: claro.

JLL: a ver, tres, cuatro,... (sigue dibujando).

E: mira, te voy a decir una cosa. Con cuatro, puedes buscar otra región más.

(JLL sigue probando)

E: ¿la ves o no?

JLL: ... si lo pongo así... (dibuja) once.

E: salen once, ¿no?

(JLL prueba a trazar cinco rectas)

E: ¿cómo trazarás la última ahora?

(406)

JLL: pues... cortando el mayor número de rectas posible.

E: aja.

(JLL traza las cinco rectas de distintas formas y va contando el número de regiones que obtiene)

(436: fin cara A)

JLL: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ... (se lía al contar las regiones). No me digas que ningún amargado se ha puesto a ver esto. ¡Ojú!

E: entretenido está, ¿no?

JLL: sí.

E: a ver.

JLL: ahora, cuando llegue a mi casa no puedo estudiar, tengo que ponerme a hacer cuadradicos... a ver, hablamos... pues claro, pero en una está bien... entonces... pues... vamos a ver...

(se queda pensando un rato)

JLL: la pregunta era ¿cuál es el mayor número de regiones? ¿no?

E: aja.

JLL: tengo la teoría aquí pero no sé expresarla.

E: a ver, pues dímela. Si no te sale escribirla, cuéntamela y luego ya vemos cómo la podemos escribir.

JLL: pero... a ver... está en una progresión que... que... vamos a ver, es que no sé. El número siguiente a... vamos a ver... el número siguiente al anterior pues será... tendrá una diferencia de rectas de n+1. Es decir, que si había una diferencia de rectas de... o entre uno y dos, de dos rectas... o sea, al empezar... pues a la siguiente...

E: ten cuidado, no te líes... entre una y dos no hay una diferencia de dos rectas.

JLL: de dos regiones, perdón.

E: aja.

JLL: si entre uno y dos hay una diferencia de dos regiones, pues entre dos y tres habrá una diferencia de n+1. Y la siguiente de n+2 y la siguiente de n+3.

E: pero ¿a quién le llamas n? ¿quién es n para ti?

(43)

JLL: eh... el número inicial de rectas, dos regiones que es lo que consigues con una recta. El número mínimo de rectas es uno.

E: bueno no.

JLL: pues... cero... no.

E: ¿por qué no puede ser cero?

JLL: porque...

E: con cero rectas, ¿cuántas regiones tienes?

JLL: una.

E: vale.

JLL: ya está... pues... como el número de regiones no tiene una proporción exacta, porque no. Pues tienes que irte a la diferencia que hay entre una y la anterior.

E: aja.

JLL: entonces, nos vamos por ejemplo... n va a ser... cero rectas. Es decir, dos regiones, n va a ser uno. Pues... la diferencia en el siguiente... dándole el valor siguiente, el valor más próximo, va a ser n+1. Y dándole el siguiente valor va a ser n+2.

E: fíjate en una cosa. Lo que estás escribiendo no es lo mismo que me estás diciendo, ¿no? Porque tú me estás diciendo que hay una diferencia aquí... fíjate éste es el uno, tienes una región. En el siguiente vas a tener n+1... en este caso sí tienes n+1 porque tú has partido de una región.

JLL: no, pero me refiero a la diferencia de rectas. Hay una diferencia de n+1.

E: ¿entre el número de rectas del caso primero y del segundo?

JLL: claro. O sea tú restas, tú siempre restas un número x vamos a ponerle... por ejemplo el cinco a... vamos a ver, tú le restas... entre cuatro y cinco hay una diferencia de x rectas. Pues en el siguiente paso, que será de cinco a seis, habrá una diferencia de x+1.

E: vale. Y si yo te digo que, según eso, ¿cuál sería el número máximo de regiones que tienes con diez rectas?

JLL: ¿con diez rectas?

(75)

E: aja.

JLL: ¡ah! ya vas a sacar la teoría, ¿eh? (risas)

E: es que con diez rectas ya la cosa se complica para dibujar, ¿no? Si con cinco ya estaba la estrella difícil (refiriéndose al dibujo que había hecho JLL antes)

JLL: con diez... habrá una diferencia... que era... no vayas a presentarlo luego así, ¿eh?

E: no, no te preocupes.

JLL: pues con diez será... ¡uf!

(se queda pensando un rato)

(93)

JLL: si es que... pero...

E: si lo tenías, con diez sí lo sabes hacer, ¿no?

JLL: sí, pero estoy sacando... no hacerlo a la cuenta de la vieja para sacar esto porque...

E: en principio, si te preguntan por diez, ¿lo puedes hacer por la cuenta de la vieja? Hazlo como quieras. Pero ya si te preguntan por cien...

JLL: por eso.

E: pero si, por ejemplo, te preguntan por ocho ¿sí lo sacarías rápido?

JLL: sí porque ya sé seis... sería veintidós más siete... veintinueve.

E: sí.

JLL: y con ocho serían... treinta y siete... y ésta...

E: vale.

JLL: pues...

E: parece que con diez y un número así bajillo, nos manejamos, ¿no?

JLL: parece que sí.

E: ahora... ¿y si te suben el número?

JLL: pues... y todo porque tenían que ser seis (haciendo referencia a su intuición inicial de que con tres rectas salían seis regiones como máximo).

E: si hubieran sido seis habrías acabado tú muy rápido, ¿no?

JLL: pues sí.

(se queda pensando un rato)

(121)

JLL: la verdad es que yo lo que tenía pensado... lo hallas si tienes, por ejemplo, el número de recta anterior.

E: aja.

JLL: porque claro, si tienes cuántas regiones te dan nueve rectas, pues sabes que la diferencia es nueve y entonces no tienes más que sumarle, y esto va a ser una más.

E: sí, ¿y eso qué te va diciendo?

JLL: pero no consigo relacionar las que están distantes... vamos a ver, no puedo yo ser tan tonto.

E: hombre, que estás diciendo muchas cosas, no vas a ser tonto por eso. A este tipo de problemas no estáis acostumbrados, ¿no?

JLL: que va.

(JLL se queda pensando un rato)

(162)

JLL: no sale.

E: a ver.

JLL: (refiriéndose a los datos que ha ido obteniendo) es que... vamos a ver... siempre... ahora lo que he hecho, los vas sumando... uno y dos... vamos a ver. Sumas éstos y te dan tres. Y siempre es una menos que la que... que el número de regiones de ésta. Si sumas éstas te va a dar... esto una menor que esto...

E: a ver, con eso ¿a que llegas?

JLL: con eso ya...

(178)

E: el número de regiones ¿de qué estás viendo que va a depender?

JLL: ¿el número de regiones?

E: sí, según los dibujos, ¿de qué estás viendo que va a depender el número máximo de regiones?

JLL: de... depende del número de rectas.

E: aja.

JLL: pero...

E: ... y luego has visto que hay una relación entre un caso y el anterior.

JLL: claro, la diferencia entre un caso y el anterior.

E: y eso, aunque no lo sepas escribir, porque a lo mejor no lo sabes escribir pero lo tienes en mente, a ver cómo ves tú esa relación.

JLL: ¡uf! Pues... ya te digo que la relación es que siempre... teniendo una relación de... teniendo una relación de dos rectas, para conocer la... para conocer la diferencia que hay entre ellas pues te va a dar "z" por ejemplo... "z" va a ser la diferencia y "x" es un número de rectas, "y" es otro número de regiones y "a" es otro número de regiones. Pues "z" va a ser... va a ser... jolín...

(se quedan pensando un rato)

JLL: pues... la siguiente... vamos a poner... aquí tenemos un conjunto de regiones, que van a ser "x", "y" y "h". Entonces, la diferencia entre "x" e "y" va a ser "z". La diferencia entre "y" y "h" va a ser z+1. La diferencia entre "h" y "j" va a ser z+2.

E: pero ese era el caso en el que tú obtenías el número de regiones, conociendo el número de regiones que había en el caso anterior. ¿no?

JLL: sí.

E: pero hemos dicho que si yo te pido un número grande tú decías que eso ya te fallaba.

JLL: pues sí.

(213)

E: pues a ver si hay otra forma porque ésa, aunque lo hayas escrito ahí con muchas letras que parece lioso, sí se entiende porque has sido capaz de explicarlo y de calcular el número de regiones máximo que obtienes con diez rectas. Luego el procedimiento te ha salido, ¿no?

JLL: sí, claro.

E: pero si yo te digo ahora un número alto... yo te he dicho cien pero ¿y si son mil? Ya las cosas cambian, ¿no?

JLL: claro. A ver...

(JLL se queda pensando un rato)

(239)

JLL: pues... tiene que estar esto por aquí... ya no sé ni lo que tengo...

(JLL sigue pensando)

JLL: ... pues si sumas...

E: venga, un último intento que nos tenemos que ir.

JLL: lo tengo que sacar ya... si sumas... si sumas la diferencia de rectas que hay entre... vamos a ver... a ver, te lo voy a decir con... con mis palabras.

E: venga, como salga.

JLL: es que no lo sé escribir.

E: pero lo tienes en la cabeza, ¿no?

JLL: pero es que... lo mismo te lo digo y te estoy diciendo una chorrada.

E: bueno, venga, lo que tú pienses.

JLL: si sumas la diferencia entre dos rectas, te va a dar un número que va a ser igual a... al número de regiones pero... espérate... lo que te he dicho antes... si tú tienes por ejemplo tres, que es la suma entre dos diferencias. Pues tres más uno te va a dar el número de regiones que tiene... por ahí no sacas ninguna regla...

E: bueno, ya está, no pasa nada, has sacado una forma de hacerlo. Lo que pasa es que cuando tengas un número muy grande, pues te vas a complicar la vida pero... hasta un número razonable te ha salido, ¿no?

JLL: pero ahora me dices cómo es.

(296)

SUJETO: 2BACH2

FECHA Y HORA: 14-1-02, 12:40-13:35

TAREA 1

E: ... bueno, yo este año tengo que hacer un trabajo de investigación, mi Memoria de Tercer Ciclo. El tema es que yo te voy a hacer una entrevista. Te iré haciendo una serie de preguntas, son muy fáciles y además no tienen ni respuestas buenas ni malas, si no que tú me vas a decir cómo tú pienses que es. Pero no es la respuesta buena y además no hay sólo una. Si no te sale y te atrancas en algún momento, pues no pasa nada, donde se llegue, se ha llegado. ¿Vale? No se trata de evaluar ni de ponerte una nota ni nada de eso, ¿de acuerdo?

NG: vale.

E: empezamos con la primera que dice qué resultado da al sumar dos números pares.

NG: par.

E: a ver, ¿por qué? Explícamelo. ¿Por qué me has dicho tú tan rápido que da un número par?

NG: pues... por ejemplo dos y dos son cuatro. Cuatro y dos es seis. Siempre un número par porque... al ser dos números pares pues da par.

E: vale, y tú me has dicho dos y dos son cuatro... ¿y si yo te digo un número muy grande, muy grande? ¿qué haces... lo sumas también...?

NG: uhm... no.

E: ¿cómo lo harías?

(25)

NG: eso es como las rectas de las sucesiones porque, por ejemplo a un número par, siempre que le sumes uno, te va a salir un número impar. Y siempre que le sumes dos, va a ser un número par. Entonces como son múltiplos de dos, pues... no sé.

E: a ver, me estás diciendo que los números pares son múltiplos de dos. Pero si yo de digo que cómo me convencerías a mí en general. Porque tú puedes coger algunos casos y te da un número par. Pero ¿y si yo te digo un número muy grande, cómo me convencerías de que cualquier número par – porque tú me estás diciendo que da siempre un número par- entonces eso cómo lo explicarías?

NG: porque al ser todos múltiplos de dos, todos se pueden factorizar y se pueden expresar todos como dos por un número. Y entonces si tú dos, que es un número par, lo multiplicas por cualquier número, pues siempre... es par.

E: ¿y al sumarlos? ¿me estás hablando del resultado final? ¿lo de la suma cómo lo haces?

NG: a ver... como los dos son múltiplos de dos, pues... es como dos, factor común, por una suma y entonces, al realizar esa suma, es el número por dos y entonces va a ser siempre par.

E: vale, vale. Entonces ¿tú con eso ya convencerías a alguien?

NG: no sé yo... la verdad.

(42)

E: ¿tú te quedarías convencida?

NG: yo sí. Porque cualquier número multiplicado por dos... creo que sí.

E: a ver, hazme el razonamiento entero, que yo me entere bien.

NG: porque todos los números pares se pueden descomponer en un número multiplicado por dos y entonces, al hacer la suma de dos números pares pues sería dos factor común de la suma. Y entonces sigue siendo dos por cualquier número y entonces, al multiplicarlo por dos pues siempre es par.

E: vale, vale, me has convencido.

(50)

TAREA 2

E: vamos a ver otra... dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.

NG: ¿qué número de rectas?

E: las que quieras.

NG: el mayor número de regiones que puedes obtener...

E: tú vas trazando rectas sobre un plano. Tienes que ver cuál es el máximo número de regiones al trazar esas rectas.

(55)

NG: depende del número de rectas.

E: a ver.

NG: por ejemplo si trazas dos, no habría ninguna región porque... o sea, regiones cerradas, ¿no?

E: no, no tienen que ser regiones cerradas.

NG: pues entonces no sé a lo que se refiere.

E: ... tú imagínate el plano, que puede ser esta mesa, aunque el plano en realidad es ilimitado. Tú imagínate que trazas una recta desde aquí hasta allí. Entonces...

NG: ¡ah! habría dos.

E: has contado dos, luego no son regiones limitadas, cuentan también las ilimitadas. Son trozos en los que divides.

NG: sí, que si esto así fuera el plano (dibuja)... sí claro, yo decía que si trazas dos, por ejemplo así...

E: no, pues se supone que ésas cuentan también.

NG: pero si es una, serían dos. Si fueran dos, serían cuatro... sería dos por el número de rectas.

E: ¿cuántas has obtenido con...? ¿Ahí has trazado cuatro?

NG: sí, cuatro.

E: ten en cuenta una cosa...

NG: pero es que también depende de cómo las traces.

E: te están pidiendo...

NG: pero es que si las trazas así, ya...

E: tienes que tener en cuenta que te están pidiendo el número máximo. Estás viendo que según las traces...

NG: claro.

E: entonces ¿cómo obtendrías –te repito la pregunta- el número máximo de regiones al trazar rectas sobre un plano?

(76)

NG: no sé.

E: piénsalo, piénsalo, no te preocupes, si hay tiempo.

(NG se queda pensando un rato)

NG: pues yo creo que para obtener el número máximo de regiones, habría que hacer las rectas lo más próximas posibles entre sí, que no guarden una distancia muy grande porque así las regiones serían más pequeñas...

E: aja.

NG: y entonces habría más... pero depende del número de rectas que traces. Es que, sin saber cuántas... es que puedes trazar infinitas entonces.

E: bueno tú me has dicho que dependería del número de rectas que trazaras, ¿no?

NG: claro. Y de lo grande que sea el plano.

E: ¿influye lo grande que sea el plano?

NG: claro. Porque si el plano es... por ejemplo de veinte decímetros cuadrados, pues llegará un momento ya en que no...

E: vamos a ver... tú has dibujado el plano ahí como si fuera un rectángulo.

NG: sí.

E: pero el plano es ilimitado. O sea, que da igual que sea esta mesa que... que sea el suelo de la habitación.

NG: ... pues te saldrá lo mismo.

E: tú lo coges eso como una representación de lo que es el plano en realidad, que no tiene límite. Igual que una recta. Tú trazar la recta y tampoco tiene límite. Entonces lo que te quiero decir es que no puedes decir que a lo mejor llega un momento en el que no te caben las rectas porque no tiene límite de extensión.

NG: ah, es verdad.

E: entonces, si me has dicho que depende del número de rectas, a ver cómo manejas eso. Tú has dibujado ahí algunos casos, ¿no?

NG: ¡uf! Yo qué sé.

E: quizá hayas empezado por algunos muy difíciles, empieza por algunos más fáciles.

NG: pero ¿sin tener en cuenta... o sea, sin dibujar antes el plano?

E: como tú quieras. Puedes dibujar, si quieres, el plano.

NG: pero es que si dibujo las dos rectas por ejemplo así (las dibuja cruzadas en el folio), no tendría ninguna región, ¿no? o... ¿sí tendrías cuatro?

E: ahí (refiriéndose al dibujo), ¿qué estás considerando el plano?

NG: indeterminado.

E: vale. Entonces estas rectas no son rectas. Si tú te centras en la mesa, las rectas al dibujarlas, tendrán que ir desde este filo hasta aquél... o hasta éste... o hasta donde quieras, pero tienen que llegar hasta el límite del plano. Si tú consideras el suelo de la habitación y coges una cuerda, tendrá que ir desde uno a otro extremo, pero no te puedes parar en medio.

NG: vale.

E: porque si el plano tiene un límite, a la recta le tienes que poner el mismo límite. Ahora, si tú te coges este rectangulito de aquí, tu recta irá desde este borde hasta este de aquí. También las puedes dibujar como lo has hecho pero ten cuidado al contar las regiones.

NG: vale.

E: porque en realidad dividirían al plano, ¿no?

NG: sí.

E: ahí hacen de límite entre cuatro zonas distintas, ¿no?

(121)

NG: claro, es como si pintara el plano así...

E: ahí está.

NG: ¡uy, no sé!

E: ahí ¿qué has obtenido? Organiza esa información.

NG: porque yo creo que deberías dibujar las rectas... primero delimitando el plano... para ya saber...

E: bueno, pues tú considera que tu plano es un dibujo así siempre, y sobre él pues dibujas siempre las rectas.

NG: ¿las diagonales del plano me darían el mayor número de regiones...?

E: no sé... ahí, ¿cuántas rectas has trazado?

NG: dos.

E: y has obtenido...

NG: cuatro.

E: cuatro regiones, pues venga.

NG: a ver... si trazo otra por aquí, por ejemplo, ya tendría tres.

E: y acuérdate de que tienes que sacar el número máximo de regiones.

(134)

NG: si las hago así... sí me salen. Ah claro pero así no. Si las hago así... uno, dos, tres, ... y siete.

E: ya has obtenido más, ¿no? O sea, que entre esos dos casos, cogeríamos el segundo, ¿no?

NG: y ahora la siguiente se podría trazar así y entonces delimitaría más regiones que si... que si la trazásemos por ejemplo paralela a ésta.

E: aja.

NG: serían cinco más y de esta manera... ocho regiones más. Es que no lo sé. Esto ya es más complicado, mucho más.

E: ve anotando en algún sitio lo que vas obteniendo. Porque si no, te vas a perder. A ver, ¿cuántas regiones has ido obteniendo con cada número de rectas?

NG: pues con tres, bueno con tres... lo que pasa es que debería de probar más... ¿sabes? Probar con otras opciones porque si no...

E: prueba con otro dibujo, a ver si salen más.

NG: tenía con dos... que con dos está claro que sólo se pueden obtener cuatro porque como siempre son así...

(se queda pensando)

NG: sí. Es que tiene que ser la tercera recta para que sea el número máximo de regiones... tiene que ser cortando a las otras dos.

E: aja.

NG: cortándolas a ambas porque si simplemente cortase a una, sólo... obtendría dos más. Así... uno, dos, tres, ..., siete. Obtienes siete y entonces aquí también... siempre que corte a las dos.

E: aja.

NG: entonces el número máximo de regiones sería haciendo que cada recta que dibujas más cortase a todas las anteriores.

E: pues venga, a ver, sigue ese razonamiento a ver si...

(161)

NG: ¿no? No sé, podría ser. Entonces ahora, si dibujásemos la cuarta siguiendo ese razonamiento, debería cortar a la tercera, a la primera y a la segunda. Por ejemplo...

(NG trata de trazarlas como ha dicho)

NG: claro, es más fácil que esté dibujada así. Si así también corta a las dos, al dibujarlas de esta manera, como las tenía antes (se basa en el dibujo que le había servido para hallar el número máximo de regiones al trazar tres rectas)... y ahora para dibujar la cuarta hay que volver a cortar a las tres y... O mejor casi, así... uno, dos, tres, ... diez y once.

(NG se queda pensando)

NG: y ahora... una quinta que vuelva a cortar a todas. ¡Uf! Esto ya es más complicado.

E: a ver, te estás dando cuenta de que cuantas más rectas tienes, más se te complica la cosa, ¿no?

NG: sí.

E: pues tú imagínate que yo te digo que me digas el número máximo de regiones que se obtiene cuando traces veinte rectas.

NG: pues lo que hay que hacer es hallar la función que diga el número de regiones que se delimitan con cada recta.

E: y a ver cómo haces tú eso que me has dicho.

NG: ... haciendo la primera derivada y todas esas cosas.

E: a ver, ¿cómo lo harías?

NG: lo que pasa es que, claro... yo pensaba que era siempre el número de rectas que había por dos... pero me he dado cuente de que no. Entonces si fuese el número de rectas que había por dos, sería dos por n.

E: ¿n quién es?

NG: n es el número de rectas que trazas.

E: aja.

NG: y n+1 porque no podía ser cero rectas. O sea, si es cero rectas no tienes ninguna, sería dos por n. Entonces...

E: espera, si hay cero rectas, ¿cuántas regiones hay?

NG: una muy grande. Entonces sería n-1.

E: a ver, ¿qué estás tratando de hacer ahí?

NG: ... es que nosotros, el año pasado vimos una cosa que era en cuántos puntos cortaban... cuántos puntos cuando cortas un conjunto de rectas. Entonces decía que si eran dos pues la forma de que cortasen era así (y hace dibujo). Pero que si era tres, para que se cortaran entre sí en los máximos puntos posibles. Pues en vez de ponerlas así, por ejemplo cruzadas, sería así. Y ya ésta la corta en dos puntos. Y si fueran cuatro, no sé qué y así cinco... y al final acababa como con un ramillete de rectas así, que todas cortaban por este punto y al final... se obtenían el máximo de puntos posibles y yo estaba pensando que, a lo mejor, podía ser algo parecido.

E: a ver, como tú veas. Pero no te cierres si no consigues relacionar lo que te estoy preguntando con algo que hayas dado. Porque yo no te estoy evaluando sobre lo que has dado.

NG: pero es que además, se me está ocurriendo otra cosa... o no... claro. Si fueran dos rectas (sigue probando con otros dibujos), no siempre tiene que ser cuatro porque puedes trazarlas de tal forma que sólo haya dos... y no tienen porqué cortarse las rectas. Entonces puedes dibujar las dos rectas así y hay cuatro... o sea, hay tres. Y ahora la otra así y ya hay... no porque a lo mejor así...

(221)

E: a ver, piénsalo un poquito. Usa lo que sabes pero ten en cuenta que yo no te estoy pidiendo sobre algo que sepa que has dado. No te cierres en una forma de resolverlo porque yo no sé lo que te han explicado. A mí me interesa cómo resuelves ese problema, como quieras.

NG: es que no sé.

E: si vas bien, sí que te sale. A ver ¿cómo lo expresarías? Tú me has dicho ahí una serie de cosas... a ver si sale algo. ¿Qué has obtenido hasta ahora?

NG: pues que si cada recta que dibujas corta a las que ya tenías dibujadas, se obtienen más regiones que si... a lo mejor simplemente corta a una o...

E: vale. Además me has dicho que no se cortaran en un punto todas porque si no, no era el número máximo lo que obtenías. Vale, eso te ha servido para hacer ahí una serie de dibujos. Y ahora ha sido cuando yo te he dicho que estaba muy bien pero cuando yo te diga que tienes treinta, ya la hemos liado, ¿no? Porque es un número muy alto y va a ser más complicado.

NG: sí, ya no es tan fácil.

E: y tú me has empezado a hablar de una serie de cosas que... a ver.

NG: es que si fuese de esta forma, y estudiásemos así el recinto, ésta corta aquí y entonces pues... todas las que he dibujado ahí seguirían... y entonces ya, de esa forma, habría una, dos, tres, cuatro, cinco. Habría muchas, es decir y si aquí vuelvo a dibujar otras así... a ver.

E: pero ten en cuenta que aquí también tendrías que contar éstas de arriba...

NG: claro, pues por eso digo que serían más todavía.

E: a ver, ¿cómo harías eso? Ten en cuenta que aquí has dibujado muchísimas rectas. Y aquí has empezado con unos números más pequeños.

NG: sí.

E: entonces, ¿cómo pasarías de aquí (refiriéndose a los casos con pocas rectas) a un número tan grande como el que estás trabajando ahí? ¿cómo harías ese paso?

(251)

NG: con este método, ¿no? de decir que todas tienen que cortar... que cortarse entre sí...

E: aja.

NG: porque... aquí he dibujado cuatro, ¿no? Si aquí dibujase otra vez cuatro... pero es que... es que han salido más. Uno, dos, tres, ... diez y once. Esta forma es mejor... no, es que he dibujado cinco... entonces serían dos menos... sí, serían once. Es el mismo caso.

E: aja.

NG: pues entonces no es necesario que todas corten a... a las siguientes. O sea, a las que ya había antes y sí pueden pasar por el mismo punto.

E: a ver.

NG: ... no sé.

E: piénsalo a ver qué sale.

(NG se queda pensando y no avanza)

E: y ¿ese tipo de problemas con qué lo vísteis?

NG: pues... creo que cuando vimos las... no sé seguro si es cuando vimos las diferentes ecuaciones de la recta y luego ya pasamos a hacer derivadas...

E: ¿con haces de rectas quizá?

NG: sí, creo que era algo de eso. Porque no lo vimos eso... lo que pasa es que... me acuerdo que la página venía justo antes de la página de ejercicios y venían así con distintos dibujos. Venía que encontráramos rectas con tantos puntos de corte.

E: ah, bien.

NG: y me acuerdo de haberlo leído y de eso, de los dibujitos así (señala los dibujos que ha hecho recordando el ejercicio). Lo que pasa es que no...

(280)

E: a ver.

NG: tengo un lío ya...

E: cuéntame lo que has obtenido hasta ahora, ¿qué has ido sacando? Cómo me podrías decir que si trazas treinta rectas, obtienes esto. Y si trazas cincuenta, obtienes este número de regiones. ¿Eso cómo lo puedes controlar? Si antes me has dado unas explicaciones para trazar de convencerme, ¿por qué ahora te echas para atrás?

NG: ... porque no sé expresar eso.

E: a ver, cuéntamelo con tus palabras.

NG: con el cero ya es muy lioso. Porque yo pensaba, como es el máximo pues yo pensaba como los problemas éstos de maximización, cuando te preguntan el volumen de un cilindro, el área mínima y todas esas cosas.

E: sí.

NG: que hallas la función que... la función que expresa lo que tú quieres maximizar y entonces, a partir de ahí haces la derivada y encuentras el valor máximo. Y entonces pues yo he pensado que podría ser algo así.

E: y tú con eso, ¿a qué querías llegar?

NG: pues a construir una función que... pues que expresase el número de espacios que tú puedes delimitar con las rectas.

(301)

E: vale. O sea, que tú buscar ahí una relación, ¿no? Con el número de rectas y el número de regiones, ¿no? Pero si con las funciones, maximizar y todo eso que me estás contando no te sale, a ver cómo la puedes obtener.

NG: es que así no me sale.

E: pues a ver cómo lo puedes obtener de otra forma. Inténtalo a ver, que yo creo que sí te puede salir.

NG: es que no he hecho nada... no hecho nada más que...

E: sí has hecho...

NG: es que con dos, el número máximo que he podido obtener ha sido cuatro. Y con tres ha sido siete. Y con cuatro ha sido once. Es que va aumentando de tres en tres. ¡Ah! porque va aumentando según... claro. Si son... es que aquí aumenta justamente en tres, que es el número de rectas que tienes entonces. Y aquí aumenta justamente en cuatro, que es las que tienes.

E: ¿entonces?

NG: y si fuesen cinco, deberían de ser dieciséis.

E: según lo que estás diciendo...

NG: según lo que digo, aumentarían cinco.

(NG se queda pensando y tratando de obtener la relación)

NG: sería como dos por... n más n-1. Que para dos serían cuatro. Serían... claro, por dos menos uno, que serían dos. Para tres sería dos por tres seis, más tres menos uno dos,... me da a mí que no... por cuatro, ocho... es que para el tres no va.

E: ¿para tres no funciona?

NG: no porque dos por tres serían seis, y ahora serían seis más dos...

E: pues parece que no sale con ése.

NG: pero con el cuatro sí.

(duda sobre si los que ha encontrado son el mayor número de regiones)

E: éstos sí son los números máximos. Te lo digo para que no te vayas a liar con eso ahora.

NG: y si fueran cinco, ¿serían dieciséis? Porque es que dibujarlas ahora...

E: a ver.

NG: aquí había obtenido las once... Pero es que ahora dibujar una recta que corte ahora a todas... es muy difícil. Porque debería de cortar ésta, ésta... pero claro, no puede ser curva.

E: no.

(360)

NG: es que cortaría simplemente... o sea, a ésta no la corta. Dibujándola de otra manera... pero es que es más fácil... a ésta no la corta. Uno, dos,... catorce y quince. Me falta una... si cortase ésta.

E: a ver.

(NG sigue dibujando)

NG: sería... es que ahí me falta una de las once. Porque ésta quizá la debería de poner así y entonces sería... uno, dos, tres, ... trece. Y son cuatro... ah, no porque me falta... una, dos, ...

diez. Por ejemplo así y ya sí sería. (va buscando partir desde las once regiones que había obtenido, como máximo, para cuatro rectas)

E: pues copia el dibujo que tenías antes.

NG: a ver así... (sigue dibujando) porque quizá ésta la podría dibujar un poco torcida, ¿no? Y ahora ya, pues de esa forma es más fácil...

E: tú puedes dibujarla como tú quieras.

NG: y... que pasase la quinta por ahí.

E: a ver.

NG: no, pero es que por ahí no... es que pasaría por el centro ése... no sé.

E: venga, haz otro dibujo que veas tú las rectas más claras, que ahí tienes un lío...

NG: pero es que así tampoco, ni torcidas tampoco porque son... no pasa por... no puede pasar por las cuatro.

(430: fin cara A)

(NG se queda pensando)

NG: es que para sacar la recta que dibujes es el número anterior más el número de rectas que hay.

E: y ¿eso cómo lo pones?

NG: lo voy a escribir porque se me olvida.

E: venga.

NG: son las que ya había... entonces el número de rectas sería n.

E: aja.

NG: ... y las que ya hay, serían n...

E: las que ya hay ¿estás hablando de rectas o de regiones?

NG: de regiones. Las regiones que ya había... porque es que es el número de regiones que obtienes más el número de rectas que trazas. El número que había ya antes... antes había cuatro, ¿no?

E: aja.

NG: y entonces cuando dibujas la tercera –que ya habría tres rectas, es siete- entonces es el número de regiones que había antes, cuatro, más tres que son siete.

E: ¿cómo escribes eso?

(16)

NG: ... no sé.

E: pero si me lo estás diciendo. Lo que me estás diciendo de palabra, ¿cómo lo podrías poner en general de forma que cuando tú tengas un número grande de rectas, sepas...?

NG: y con una recta habíamos dicho que había dos regiones, ¿no?

E: aja.

NG: que es el número de regiones que había antes más las rectas que has dibujado... es que tiene que ser así, seguro. ¿No? no sé.

E: a ver.

NG: y entonces para cero había una, ¿no?

E: aja.

NG: es que a lo mejor me he confundido... espera...

(NG se queda pensando un rato)

NG: ... es que no sé cómo expresar los números... es que hay algo ahí que no... que no sé cómo escribirlo porque es que claro, si es el número de rectas que ya había, entonces necesitas saber las que había... y es lo mismo... las que había era las que había antes más...

E: y ¿cómo pones eso?... si no te sale, no te preocupes. Piénsalo un poquito a ver.

NG: ahora voy a estar todo el día... como no la sepa... me la tienes que decir porque si no...

NG: es que... ¿por qué no encaja esto con tres? Es que no lo entiendo. Si esto encajara para el tres... sería ya... con lo que no encaja es con los números impares, ¿no?

(43)

E: vamos a ver.

NG: con el dos serían cuatro más...

E: más uno.

NG: es que cuando lo he pensado para el dos, cuando lo he comprobado para el dos, he pensado que era cuatro y entonces he dicho que claro, cuatro por una cuatro. Y por eso ha sido por lo que estaba...

E: si eso no te cuadra, trata de buscar otra cosa, ¿no? A ver cómo lo harías.

(NG se queda pensando un rato)

NG: ¿y no podría ser...? ...

(NG sigue pensando)

NG: que va... es que por ejemplo, puede ser siete por cuatro, veintiocho. Menos dos y partido por dos... y para el tres creo que también vale porque tres por cuatro, doce. Menos dos,... no, no.

E: la fórmula que encuentres te tendrá que valer para los casos que tienes ahí, ¿no?

NG: sí, por lo menos para esos.

(62)

(NG se queda pensando)

NG: y ¿no puede ser el número de rectas que tengo, o sea cuatro bueno, n por n-1... sería cuatro por tres... doce y menos uno? Y si fuera tres sería tres por dos... no porque aquí sería más uno.

E: le has llamado n al número de rectas, ¿verdad?

NG: sí, pero no... no me sale. (refiriéndose a cómo lo había obtenido antes, por recurrencia) Es que hacerlo con dos variables no interesa porque a partir del número de rectas, lo suyo es calcular es el número de regiones. Entonces no puedes incluir ahí las que te habían salido antes... no vas a calcular... es que entonces, si te dicen para diez mil... tendrías que empezar a calcular desde el cero para ver cuáles son las que te habían salido antes.

E: pero en función de las que te habían salido antes, ¿sabrías ponerlo?

NG: no... más o menos, pero...

E: esa relación la ves pero crees que no es lo suyo, ¿no?

NG: no.

E: pues a ver cómo lo pondrías.

(NG se queda pensando un rato)

NG: es que... vamos a ver.

E: venga, tú concéntrate a ver si sale algo y si no, pues ya está.

(NG sigue pensando)

E: ahí tienes algunos números, ¿te pueden ayudar, no?

NG: claro pero es que lo que... porque ésta fórmula, sumándole uno, encajaría para todos menos para el cuatro. Para todos estos encajaría porque... sí porque éste sería cero, más uno pues uno. Éste sería uno... no, pero aquí sería cero y entonces éste tampoco.

(NG se queda pensando)

NG: que va, si es que no, si es que hay... tiene que ser algo así... pero no...

E: cuando tú quieras lo dejamos.

NG: yo qué sé.

E: está muy bien, no te preocupes.

(116)

SUJETO: 2BACH3

FECHA Y HORA: 15-1-02, 12:50-13:40

TAREA 1

E: esto es para un trabajo de investigación, ya os comenté ayer un poquito, ¿no?

RD: sí.

E: yo con la información que obtenga, realizaré mi trabajo. Te voy a dar un par de folios por si quieres escribir algo. Si necesitas más, pídemelos. Yo te voy a hacer una serie de preguntas y tú vas contestando según creas. No va a haber... no pienses que hay respuestas o malas, tú me cuentas lo que tú pienses.

RD: ¡ah! vale.

E: tú luego serás un alumno que has contestado tal cosa.

RD: voy a ser x, ¿no?

E: sí, luego no se te va a evaluar ni nada por el estilo. La primera propuesta es qué resultado da al sumar dos números pares.

RD: un número par (respuesta inmediata).

E: ¿estás seguro?

RD: sí.

E: ¿por qué? Necesito que me vayas explicando lo que tú vas pensando.

(132)

RD: la suma de dos números pares da un número par.

E: ¿por qué?

RD: pues yo qué sé, porque siempre ha sido así.

E: explícame.

RD: son dos números iguales que, al sumarlos, tienen... no sé por qué explicarlo, ¿eso tiene explicación?

E: yo no te he dicho iguales, te he dicho pares.

RD: dos números pares...

E: sí.

RD: si son los dos pares, el resultado tiene que ser par.

E: ¿por qué?

RD: pues...

E: te suena porque el resultado lo has escuchado por ahí o porque tú...

RD: yo porque... dos números pares, te da un par. ¿Eso tiene explicación?

E: no sé... tú imagínate que yo te digo que por qué va a dar un número par. Porque tú lo digas y ya está...

RD: no.

E: pues a ver... tú imagínate que se lo estás explicando a un niño chico y que tú le dices que la suma de dos números pares, siempre da un número par. A ver cómo lo podrías explicar.

RD: ... pues, de verdad que no sé cómo sabría explicar eso. Es que la suma de dos números pares, da un número par, ¿no?

E: pero si yo no digo que no sea ni que sea.

RD: no sé cómo explicarlo.

E: a ver, piénsalo un poco. ¿Por qué? ¿Por qué has dicho tú eso tan rápido aparte de porque lo ves que es así y ya está?

(RD se queda pensando)

E: eso te lo han dado como resultado en el instituto o algo así.

(156)
RD: ¿el qué? La suma de... (extrañado porque no le suena como resultado)
E: ¿entonces?
RD: yo qué sé, de haber hecho tantas sumas.
E: y ¿qué pasa al haber hecho tantas sumas?
RD: ... da un número par. Yo qué sé cómo explicar...
E: tú has dicho que era siempre, ¿no?
RD: pues claro.
E: a ver, ¿por qué?
RD: ¡uf! La suma de un número par...
E: tú tranquilo si aquí no pasa nada...
RD: no hay prisa, ¿no?
E: pero a ver si se te ocurre algo.
RD: ... ¿tiene trampa la pregunta?
E: no, que va.
(risas)
RD: ... es que no sé cómo explicar eso...
E: ¿no?
RD: no.
E: imagínate que tienes que convencer a alguien de que lo que estás diciendo es así.
RD: ¡oju!
E: o tú dime cómo lo has dicho tan rápido. Me has dicho que hacen falta sumas. Y ¿qué pasa, que has hecho tantas sumas que ya sabes que la suma de dos números pares da un número par?
RD: ... si un número par tiene que ser divisible por dos siempre. Si los dos son divisibles por dos, al sumarlos, deberían ser también divisibles por dos.
E: ¿por qué?
RD: porque... no sé. Por ejemplo el dos y el cuatro... dos es par, cuatro es par. Son los dos divisibles por dos. Al sumarlos da seis, que también es divisible por dos. O sea, son números que tienen en común que pueden ser divisibles por dos.
E: eso. ¿Y qué?
RD: pero si son tres números pares, también da un número par.
E: no te líes... yo sólo te estoy diciendo dos. Con dos es un caso más sencillo.
RD: si los dos números son divisibles por dos, el resultado es par también.
E: ¿por qué? A ver ese pasillo te falta por enganchar. Porque ¿qué te dice de la suma el que los dos sean divisibles por dos?
RD: ¡uff! Ni idea.
E: piénsalo un poquillo, que ya van saliendo cosas y al principio también decías que no tenías ni idea o sea que...
RD: ... a ver que yo piense...
(RD se queda pensando)
RD: pues dos números... a ver... tienen en común que son divisibles por dos...
E: eso es.
RD: o sea... tiene que ser un número en común... y el resultado también tiene que ser... debe ser divisible por dos... debería...
E: a ver cómo ponemos eso.
RD: ¡jo! Es que no sé.
E: venga, que al principio me has dicho que no tenías ni idea y ya me estás diciendo cosas...

RD: vamos a ver...

E: tú imagínate que me tienes que convencer de que lo que has dicho es verdad. Y que lo has hecho con dos y cuatro, pero que si lo haces con tres mil quinientos veinte y con siete mil cuatrocientos, pues también es verdad. Porque cuando tengas números pequeños vale, pero con números más grandes a ver cómo me convences de eso.

RD: ... a ver. Números que sean divisibles por dos... por ejemplo, de dos y de cuatro, el máximo común... por un lado es el dos... pero por ahí no es...

E: ... estás haciendo una mezcla de nombres... Vamos a ver, me has dicho máximo común denominador...

RD: no, es máximo común múltiplo.

E: vamos a ver. Una cosa es el máximo común divisor, otra cosa es el mínimo común múltiplo y otra cosa es el factor común.

RD: ¡eso es! El factor común es dos.

E: no pasa nada, ya sabes cómo se llama para otra vez, venga.

RD: pues ya está, que el factor común es dos.

E: y ahora ¿qué?

RD: que el resultado también tiene que dar factor común dos, entonces es divisible por dos y entonces tiene que ser par.

E: ¡ah! ¿Eso te convence?

RD: a mí sí... vamos a ver. Tiene un factor común que es el dos... o sea que el resultado, para que sea par, tiene que tener como factor común el dos también. Si los dos tienen el mismo, éste tiene que tener también el mismo. ¿No?

E: y eso ¿ya te dice que el resultado es par?

RD: ... ¿todas las preguntas son así, de este tipo?

E: ... venga, acábame de contar. Explícame ¿por qué? Repíteme todo lo que has pensado.

RD: por qué... el número par tiene que ser divisible por dos. Entonces, la suma de dos números pares tiene como factor común el dos porque los dos son divisibles por dos. Ahí vale... entonces, ese factor común también tiene que estar en el resultado. Entonces si el factor común es el dos, y los números que hay son divisibles por dos, tiene que ser un número par. ¿No? Me estoy liando. Por ejemplo estoy pensando en... tipo de... la suma de tres y nueve. El factor común es tres y el resultado también es divisible por tres.

E: a ver, ¿tres y nueve son pares?

RD: no. Bueno, tres y nueve sí es par porque es doce.

E: ¡ah, vale! Estás pensando en la suma.

RD: no, no, estoy pensando en que... da igual, el tres y el nueve también tienen un factor común igual, que es el tres. Y la suma, que es doce, también tiene factor común tres, ¿no?

E: sí.

RD: ... cuatro y doce también tienen eso, suman dieciséis y el factor común también es cuatro pero no sé cómo...

E: pero estás mezclando ahí factores comunes, ¿no?

RD: ya, por eso.

E: antes me has dicho que tenías como factor común, el dos.

RD: sí, era el dos.

E: entonces, ¿en qué quedamos, era el dos o es el cuatro?

RD: no... estoy dando otros ejemplos...

E: sí, estás probando a ver si hay otros que...

RD: sí, pues eso es. Estaba viendo que con el tres y con el nueve, también tiene como factor común el tres, y que el resultado también es divisible por tres, con ese factor común. Entonces estoy viendo a ver si por ahí sale algo.

(293)

E: pero ten en cuenta que tú lo que has cogido ahora para ver qué pasa con la suma...

RD: sea un número par...

E: y además tú has cogido números impares.

RD: no, ya, ya.

E: tú me has dicho que tres y nueve, doce. Y luego dices que... ocho y cuatro también son doce.

RD: no, pero es que... no sé si me entiendes.

E: a ver explícame.

RD: el dos y el cuatro, por ejemplo, tiene que los dos son divisibles por dos. Y el resultado, que sería seis, también es divisible por dos. Tienen el factor común todos que es el dos. Por ejemplo, ahora digo el tres, que se puede dividir por tres. Y el doce que también se puede dividir por tres. Tienen el factor común. Y el resultado... no, y el nueve. A ver, no me lío. El nueve también tiene el tres. Y el resultado es doce, que también se puede dividir por tres, que es también otro factor común.

E: sí.

RD: pues por eso estoy a ver si... lo de los factores comunes... pero ya me he liado otra vez.

(RD se queda pensando un rato)

RD: a ver... dos números pares tienen que ser divisibles por dos... eso siempre.

E: y yo te estoy preguntando por la suma.

RD: vamos a ver y el resultado de dos números pares me da otro número par... pero ¿por qué? Ahora como no lo averigüe, me voy a estar tirando un montón de tiempo pensando en por qué... no vale. A ver...

E: a ver.

RD: no caigo... no lo sé.

E: ¿no te convence lo que habías pensado antes?

RD: en parte sí, un poco. Y como también he comprobado...

E: ¿qué es lo que no te acaba de convencer?

RD: es que si me dices ¿te convence? Ya te hace dudar.

E: pero no, yo es que no te puedo decir si puede ser así o no, me tengo que quedar igual y preguntarte si estás convencido porque lo mismo me lo has dicho para que ya me calle...

RD: no. Es que como también lo he visto con el tres y con el nueve. Yo creo que sí.

E: si mi postura ha sido lo que te ha hecho dudar, olvídate de la pregunta.

RD: es lo del factor común, yo creo que es eso.

E: vale.

RD: vamos a dejarlo ya porque si no, me voy a liar más todavía.

E: pero, aparte de todo, no te veo yo muy convencido.

RD: no, no, ahora cuando terminemos, paras eso y me lo explicas porque si no me paso toda la tarde dándole vueltas.

E: vamos a ver la siguiente...

(375)

TAREA 2

E: dice... determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano. ¿Hay algo que no entiendas?

RD: el número de regiones... o sea, en cuánto se puede dividir un plano.
E: sí, al trazar rectas.
RD: ¿un plano?
E: el plano se supone que no tiene límite.
RD: o sea, un plano, puede ser esto, ¿no? (hace un dibujo en el folio)
E: claro. La mesa puede ser un plano.
RD: y ahora cortas...
E: trazando rectas.
RD: líneas, ¿no?
E: sí.
RD: ¿infinitas? Se supone que podría trazar infinitas.
E: cuidado que no te estoy preguntando cuántas rectas puedes trazar.
RD: ¡ah! cuántas regiones...
E: tú, trazando rectas, ¿cuántas regiones consigues en el plano?
RD: rectas, rectas... (se pone a dibujar)
E: ¿cuántas regiones vas obteniendo si trazas rectas?
RD: a ver si yo me entero... plano lo tengo aquí. Una recta... pero ¿tiene que cortar entero al plano o...? Por ejemplo, si el plano es éste, hasta aquí...
E: pero cuidado con las rectas. ¿Qué has cogido como plano?
RD: ¿esto? Ese espacio.
E: sí, el folio. Pues entonces la recta tendría que ir desde el borde de aquí...
RD: hasta el otro borde.
E: eso es, hasta el otro borde. Si no, no es recta, la recta tampoco tiene límite.
RD: por eso te estoy preguntando si... la esquina.
E: o sea, la recta la puedes hacer de aquí a aquí, de aquí a aquí (señalando distintas posibilidades de trazado)... como tú quieras puedes trazar las rectas.
RD: entonces ahora yo trazo una recta y me quedan dos partes.
E: aja.
RD: y si yo trazo otra recta, me quedan otras dos partes.
(417)
E: te estoy preguntando una cosilla y no sé si te has dado cuenta. Es el número máximo de regiones.
RD: regiones... hemos quedado que son partes, ¿no?
E: sí. Las regiones son las partes que te quedan.
RD: yo, por ejemplo, esto lo he partido con una recta y quedan dos regiones.
E: eso es.
RD: o sea, que cuando trace otra recta me van a quedar más regiones.
(430: fin cinta ½)
RD: ¿número máximo de regiones al trazar rectas? O sea, que no hay un número definido de rectas. ¿Puedo trazar todas las rectas que quiera?
E: en principio no te dice ningún número. Tú me has dicho que si trazas una recta...
RD: te dan dos. Eso es siempre al trazar la primera.
E: ¿y si trazas dos?
RD: si trazas dos, te puede quedar una, dos y tres. Pero si la trazas cortando a la otra, te quedan cuatro.
E: aja, y te están pidiendo el número máximo de regiones. Entonces, ¿con cuál de esos dos casos te quedas?
RD: ... con el que corta a la otra. Porque obtienes cuatro.

E: que son más que antes, ¿no?
RD: claro.
E: entonces, ¿cómo podríamos seguir? Tú lo estás haciendo para números facilitos y haces bien porque si no, sería más complicado.
RD: claro.
E: y conforme vaya aumentando el número de rectas... ¿cómo lo hacemos eso?
(9)
RD: si se van cortando... las rectas se van a seguir cortando y van a salir dos partes. Van a ir saliendo... vamos a ver, tengo una, dos... Pero es que tengo otro problema... yo tengo ésta y si trazo aquí, son cuatro. Y si corto aquí son seis, ya no sale el doble. ¿Entiendes lo que te quiero decir?
E: sí.
RD: ... y si corto aquí... uno, dos,... cinco y seis. Siguen quedando seis. Pero es que si corto aquí, siguen quedando muchas más. Vamos a ver... ¿me puedes volver a leer el problema?
(19)
E: sí, claro. Determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
RD: tampoco tiene truco, ¿no?
E: no... (risas) no voy a venir aquí a quedarme contigo, hombre.
RD: a ver... la primera recta quedan dos. Si corto a esa recta, quedan cuatro. Ése sería el número máximo de esas dos rectas que hemos trazado de ese plano.
E: aja.
RD: claro, como no te dice el número de rectas...
E: tú imagínate que yo te digo ¿y si tienes veinte rectas? ¿cómo me podrías decir cuál es ahí el número máximo de regiones?
RD: dibujando otra recta... que vaya cortando... pero vamos a ver...
E: y ¿cómo trazo esa recta?
RD: o sea, vas dibujando paralelas...
E: aja.
RD: has dicho lo de las veinte rectas... quedaría uno, dos, tres... veinte, veintidós. Si pongo veinte rectas y corto los dos, quedarían veintidós... dibujo una, dos, tres, cuatro...
E: a ver, te veo con problemas porque estás considerando que el plano es el folio, ¿y si achicas el rectángulo?
RD: ¡ah, bien!
E: y si no quieres empezar con veinte, empieza con un número más chico, con un número intermedio.
RD: con una recta, salen dos. Ahora, si la siguiente recta corta, salen cuatro. Si no corta, salen tres.
E: aja.
(43)
RD: pero ahora, corte por donde corte, van a salir seis.
E: ¿siempre van a salir con tres rectas, seis?
RD: no hombre, pueden salir tres si las pongo paralelas...
E: pero ¿puedes obtener más de seis?
RD: ¿con tres?
E: sí. Porque con dos se ve claro que no hay forma de obtener más de cuatro... puedes hacer más dibujitos, si hay más folios, te veo agobiado con el planillo...

RD: una,... ahí ha salido una más... ¡ahí ha salido otra! ¡Eh! Han salido una, dos,... seis... ¿o ya no sé contar?... no ¡Han salido siete! Con tres líneas salen siete... pero es que también pueden salir más...

E: a ver.

RD: esto tiene que tener una respuesta rápida, ¿no?

E: hombre, rápida, rápida... no.

RD: como la de antes.

E: hombre, a lo mejor tienes suerte y das una respuesta rápida y vale, no sé.

RD: ya tengo dos trozos... ya tengo cuatro... ¡uff! ... ¡jo! Es que parezco un niño chico...

(risas)

RD: no, es verdad, parezco tonto... uno, dos, ... seis y siete. Me siguen saliendo siete. Vamos a ver, el número máximo de regiones que puede salir en un plano, al trazar rectas... si yo me pongo a trazar rectas, es igual que trace trece millones de rectas, me van a salir todos los posibles. Cuantas más rectas trace, más regiones me van a salir. Siempre y cuando una recta no está encima de otra, sean diferentes. A ver...

E: aclaremos, ¿no?

RD: ... si empiezo primero a trazar rectas verticales... pum, pum, pum... hasta que no me quede espacio. Después empiezo horizontales... hasta que no me quede espacio. Después diagonales. Y puedes poner todas las rectas que me quepan en el plano... te van a salir... miles de regiones...

(75)

E: ten en cuenta una cosa. Me estás diciendo todas las rectas que te quepan en el plano y el plano en realidad...

RD: no es nada.

E: no tiene límite.

RD: pues entonces puedes trazar infinidad de rectas, te van a salir infinidad de regiones. Da igual donde pongas las rectas que vayan cortándose, que van a ir saliendo regiones... cuantas más rectas pongamos, más regiones van a salir, siempre y cuando no sean la misma recta.

E: vale, ésa es una idea que obtienes de todos los dibujitos que has hecho. Y ¿qué más? ¿Qué mas ideas has sacado de esos dibujos?

RD: que va a haber más, va a ir aumentando. Con... vamos a ver, que voy a pensar...

E: sí, sí.

RD: ahora digo... con cuatro líneas me salen ocho... pero si con tres me salen siete, con cuatro me tienen que salir más de ocho.

E: mira a ver.

RD: ¿más dibujitos?

E: si será por dibujitos...

RD: (lo dibuja) lo mío no es dibujar, ¿eh?... dos, tres, ... ¡fo! Ahí están saliendo muchos, ¿eh?... no veas, ¡qué panzada de dibujar!

E: ¿cuántas rectas has trazado?

RD: ocho.

(99)

E: ah.

RD: ... ya me he perdido.

E: ten en cuenta que has dado un salto muy grande. De tres rectas que tenías, has pasado a ocho...

RD: ¡jo! Me sale veintisiete.

E: y ¿ese es el número máximo que puedes obtener con ocho rectas?

RD: eso de que me respondas con una pregunta...

E: pero que te han salido veintisiete, fíjate en una cosa... cuando tú tenías tres rectas, has tenido que darle un poquillo de vueltas hasta que te ha salido el número máximo...

RD: sí, y me han salido siete.

E: y tú, en un principio dijiste que seis.

RD: sí.

E: y, sin embargo, luego has conseguido otro número mayor.

RD: pues... mejor voy a probar con cuatro, voy a dejarme de ocho... a ver si deduzco algo.

E: a ver.

(111)

RD: de uno me han salido dos. De dos me han salido cuatro y tres.

E: pero ese tres ya no te hace falta considerarlo porque te están pidiendo el número máximo, ¿no?

RD: sí. Entonces, con tres tengo siete. Cuatro, ¿no?

E: aja.

RD: y esto voy a ponerlo... aquí, al lado...

(prueba con diferentes dibujos y cuenta el número de regiones que va obteniendo)

RD: ... con éste salen nueve... pero es que si salen nueve, pueden salir más.

(RD se queda pensando un rato)

RD: esto me está poniendo mosca... vamos a ver... de dos, de dos... vamos a ver, de tres... por dos son seis, más una siete. Cuatro por dos son ocho, más una nueve. Cinco por dos son diez, más una once. Esto me está poniendo a mí mosca ¿eh? Pero es que después, con el ocho, se me rompe esa táctica. Porque ocho por dos, dieciséis. Más una, diecisiete y me salían veintisiete.

(138)

E: a ver, te voy a decir una cosilla. Mira a ver si con cuatro rectas, eres capaz de conseguir más regiones de nueve.

RD: más de nueve... ¿con cuatro?

E: sí. Porque lo has hecho muy rápido y no has probado con otra forma de trazarlas.

RD: sí, ya, otras posibilidades. Con tres el máximo son siete, ¿no? Y con dos, cuatro. Vamos a ver... hemos quedado que con cuatro.

(RD prueba a dibujar las cuatro rectas de distintas formas)

RD: ... es que quiero que me corte ésta también... ¡uf! Uno, dos, tres, cuatro, ... nueve y diez. Me han salido diez.

E: ya vamos aumentando, ¿no?

RD: me ha salido una más.

(RD sigue probando)

RD: ¿cuántas llevo puestas...? ¡Ah, tres!... es que me pierdo. No valen líneas curvas, ¿no?

E: no, tienen que ser rectas. Bueno pero ahí, más o menos, hasta ahora no están curvas.

RD: no.

E: bueno, no están rectas de haberlas hecho con regla pero... es normal.

RD: (observa los datos que tenía de antes) vamos a ver, aquí tengo una, dos, ... seis, siete. Tengo siete por tres. Con una línea que haga, si corto en tres, me van a salir las diez que tengo... ¡ey! Voy a intentar hacer... para que se vea mejor eso... no, ahí me van a salir diez porque he hecho el mismo dibujo de antes a todo esto, con las tonterías. Una, dos, ... nueve y diez. Me vuelven a salir diez.

(RD se queda pensando)

RD: ¡jo, qué torpe soy!

E: no, que va, ¿por qué?

(177)

RD: ah, no sé, porque sí.

E: que va...

RD: a mí aquí me tienen que salir más de la cuenta.

(RD se queda pensando un rato)

RD: y los diez estos... uno, dos, tres, ... nueve, diez. ¿Pueden salir más?... es que yo también... me he encabezonado en irme a un rincón a dibujar...

E: pues no te vayas al rincón, dibuja en el centro.

RD: bueno, pues ya tengo una, tengo dos partes. Tengo dos líneas ahora... uno, dos, tres, ... diez, once. Je, je, je... me han salido once. ¡Han salido once, eh! Hay que tenerlo en cuenta, me han salido once. Ya me voy superando. Ahora, me engancho sólo con un dibujo y con uno me lío a... Aquí, tengo tres, y tengo siete. (sigue haciendo cálculos según el número de rectas) Bueno, bueno, vamos bien, siguen saliendo once.

(RD se queda pensando)

RD: ... ¿pueden salir más?

E: te voy a decir una cosa para que no te sigas calentando la cabeza. Con cuatro no puedes obtener más de once.

RD: gracias.

E: de nada. Ahora a ver qué haces con eso.

RD: ¿con qué eso?

E: tú me has dicho que con uno, dan dos, ¿no?

RD: sí. Con dos dan cuatro. Con tres dan siete. Y con cuatro dan once.

E: y ahora yo te digo, ¿y con veinte? Porque ahora no se te ocurre ponerte a dibujar veinte, ¿no... o sí?

RD: nooo, no.

E: entonces, a ver cómo lo harías.

RD: es que...

E: bueno, y quien dice veinte, dice diez.

RD: y un millón.

(232)

RD: ... ¡uy! Mira, dos y dos, cuatro. Cuatro y tres siete. Siete y cuatro once. Once y cinco, tienen que salir dieciséis... con cinco.

E: aja.

RD: no me voy a poner a comprobarlo porque se me puede ir la cabeza.

E: a ver, ¿qué estás viendo por ahí?

RD: a ver... que el número. El uno... el máximo de regiones es dos. De dos es cuatro. De tres es siete, que es la suma del número de regiones máximo con el número dos y que... el tres. Ah no, ahí el tres ya no tiene nada que ver. El número máximo de regiones es tres que con el cuatro son once. Es la suma del número máximo de regiones que hay con tres pero con cuatro líneas.

E: aja.

(244)

RD: entonces si eso tú sigues así... once, que es el máximo de cuatro y con cinco, deben salir dieciséis. Entonces para veinte sería veinte más el número de regiones máximas del diecinueve... ¿no?

E: sí, según el razonamiento que estás haciendo sería así. Y... si yo te digo con mil.

RD: pues sería el mil más el número de regiones de novecientos noventa y nueve.

E: y ¿qué haces? ¿hacer el número de regiones con novecientas noventa y nueve?

RD: no, de novecientos noventa y nueve no... hay que ver... vamos a ver... De uno es dos. De dos son cuatro, que es el número máximo de regiones de dos. Cuatro y tres son siete, que es el número máximo de regiones de tres.

E: aja.

RD: siete y cuatro son once, que es el número máximo de regiones de cuatro. Entonces... novecientos noventa y nueve... hemos quedado que con mil, ¿no?

E: sí.

RD: y ¿si nos quedamos más abajo, con el veinte, a ver si...?

(270)

E: da igual. Y con el diecinueve ¿qué haces? ¿se te ocurre otra forma?

RD: veamos pues... hombre, a esa conclusión he llegado yo solo, a la de la suma esa de unos con otros.

E: sí.

RD: vaaaaamos a ver. Esto tiene que tener alguna formulica, de esas raras, tipo x al cubo o algo de eso...

(risas)

E: a ver qué formulica de esas raras sacas...

RD: yo es que para las fórmulas no soy bueno. A ver... una regla de tres va a salir... no, creo que no. No, es que estoy a ver... te tiene que salir... cuatro...

(RD se queda pensando un rato)

(299)

RD: estoy diciendo que... estoy pensando... cucha qué casualidad que si sumo tres y cuatro me dan siete. Pero si eso lo he dicho antes... (se rie porque ha caido en el mismo razonamiento anterior)

E: venga.

RD: estoy tonto... A ver, por poner un ejemplo... si el uno es x (y va escribiendo lo que dice)... y el resultado es "y"... tiene que ser igual a otro... pero así te van a salir infinitos. Vamos a ver, si esto es x, x+20... veinte veces... no, que va, por ahí no puedo ir yo.

E: lo vamos a tener que dejar.

RD: ¿y me quedo a medias?

E: no pasa nada pero ¿a medias de qué? Si has dicho un montón de cosas.

RD: sí, ya está...

(322)

SUJETO: 2BACH1

FECHA Y HORA: 21-1-02, 12:45-13:10

TAREA 1

E: ... son unas preguntas que, bueno, ya os comenté un poquillo a la clase de qué iban. Están relacionadas con matemáticas pero yo no vengo a ver si tú sabes hacer ecuaciones, funciones o logaritmos. Lo que quiero es que me vayas contando lo que vas haciendo. Según yo te voy preguntando, tú me vas contestando como creas que es y ya está. No hay respuestas buenas ni malas, así que no te preocupes. Y lo que grabemos lo voy a escuchar yo sola. ¿Vale?

AA: sí.

E: a ver... la primera actividad dice qué resultado da al sumar dos números pares.

(AA se queda pensando)

E: lo que tú creas.

AA: pues... par también.

E: ¿par también? ¿estás segura?
AA: sí.
E: a ver, cuéntame por qué piensas tú que da un número par.
AA: porque... porque por ejemplo, cuando decías que los números divisibles entre dos eran los que terminaban en número par.
E: aja.
AA: entonces, todos los que son pares, van a dar par.
E: ¿siempre?
AA: ... porque después, también, cuando haces del cero al diez... dos con dos da par, cuatro da par, seis da par y ocho da par. Y entonces, pues cuando sumas cualquier número que termina en par, al sumarlo siempre va a dar pa porque si el último número que sale... por ejemplo, dieciocho y dieciocho. El último número va a ser par.
E: aja. Pero tú me estás diciendo que como las terminaciones van a ser un número par, al sumarlos vas a tener un número par. Y ¿eso va a pasar siempre?
AA: sí.
E: a ver, explícame un poco más por qué crees tú que va a pasar siempre. Porque ahí, dieciocho más dieciocho...
AA: pero es que al sumarlos siempre obtienes otro de esos.
E: ¡ah! vale, vale. Entonces, según las terminaciones. Bueno, y para un número que sea muy grande, ¿también usarías ese razonamiento?
AA: claro, por muy largo que sea, si termina en número par y lo sumas con otro número par, daría otro número par (se fija en la última cifra).
(388)

TAREA 2
E: a ver, la siguiente actividad te dice determinar el mayor número de regiones que se pueden obtener al trazar rectas sobre un plano.
AA: ¿el mayor número de regiones?
E: venga, te voy a repetir el enunciado. Determinar el mayor número de regiones que puedes obtener al trazar rectas sobre un plano. ¿Lo entiendes?
AA: pues si trazo rectas... pues las que quepan.
E: pero... una cosa , no te preguntan el número de rectas que puedes trazar, sino el número máximo de regiones que obtienes al trazar esas rectas. ¿Ves la diferencia?
AA: pero puedes trazar tantas líneas como quieras y entonces puedes hacer tantas regiones...
E: sí, líneas puedes trazar las que quieras. Pero cómo dices tú, por ejemplo, cúal es el número máximo de regiones con diez rectas. ¿Cómo harías eso?
AA: el número sería... pero que ¿estén cerradas por todos los lados?
E: no, no tiene por qué, pueden estar abiertas.
AA: pero el mínimo sería dos, ¿no?
E: ¿cómo dos?
AA: el mínimo es que haya dos líneas, ¿no? para una región...
E: no, si tú trazar dos líneas, ¿cuál es el número máximo de regiones que obtienes?
AA: tres.
E: ¿por qué? ¿ése es el número máximo que puedes obtener? Mira a ver si alguna otra forma de trazar esas dos líneas, de manera que obtengas más regiones.
(434: fin cara A de 2/2)
(traza las rectas de otra forma y obtiene cuatro regiones)

E: entonces, con dos ya no son tres. Sino que ¿El número máximo cuál será?

AA: cuatro.

E: y ¿hay otra forma de trazarlas de manera que obtengas más?

AA: ¿líneas rectas?

E: sí, sí, rectas.

AA: ... yo creo que cuatro.

E: parece que no hay otra forma de trazarlas. ¿Qué podrías sacar de ahí?

AA: pues que... que... ¿sería el doble de las líneas?

E: ¿eso te valdría siempre?

(10)

(AA se queda pensando un rato)

E: a ver, piénsalo un poquito, tú tranquila que con esto no pasa nada, a ver qué se te ocurre.

AA: pues el año pasado vimos algo...

E: te suena, ¿no?

(AA se queda pensando)

E: de todas formas, aunque lo hiciérais el año pasado, trata de pensarlo a ver cómo se te ocurriría a ti.

AA: vamos a ver... pues en una serie...

E: a ver.

AA: porque con dos, eran cuatro como máximo. Con tres tendrías... a ver con tres... siete.

E: aja.

(AA se queda pensando un rato)

(32)

AA: yo intentaría hacer una ecuación o algo...

E: ¿estás trazando las líneas con alguna sistematicidad o a ojo?

AA: ... serían las dos y después la tercera que cruce a las dos. La cuarta que cruce a las tres, si puede ser. Y cuantas más cruces, mejor.

(AA se queda pensando)

AA: yo lo intentaría por... como si fuera una serie.

E: venga, si tú crees que es por una serie, pues a ver qué serie. A ver cómo lo pones.

(AA se queda pensando)

(53)

E: estás con el caso de cinco rectas, ¿no?

AA: sí.

(AA pensando)

AA: vamos a ver... por ahora sería...

E: ¿son quince seguro?

AA: no, son más.

E: es que estaba contando y me parecía que salían más.

AA: por ahora sería una serie que de cada serie que de... de cada recta... si de dos, son cuatro. Más tres, las de tres, quedarían siete. Le sumas cuatro y te darían once. Más cinco, que son las rectas, te dan dieciséis.

E: y de ahí ¿qué puedes decir? ¿qué se te ocurre?

(62)

AA: pues que sería el número de líneas... sería n. Más... vamos a ver... más n+1.

E: a ver... ¿quién es n?

AA: n sería el primero de la serie. Y n+1 sería el siguiente.

E: sí.

AA: sería el resultado de éste más éste (señalando la tabla en la que ha organizado la información que ha ido obteniendo).

E: en la tablita esa que has hecho, lo ves claro, ¿no?

AA: sí.

E: a ver cómo escribirías eso. Te das cuenta que con dos y con tres te ha salido fácil pero que, conforme vas aumentando el número de rectas, el dibujo se va complicando, ¿no?

AA: sí.

E: entonces tú imagínate que te dicen que cuál sería el número de regiones con cien rectas... no te vas a poner a hacer las cien rectas, ¿no?

AA: no, con...

E: ¿cómo expresas eso que estás viendo ahí, en esa tablilla?

AA: pues... con la fórmula de la serie ésta...

E: a ver, y ¿cómo haces esa fórmula?

AA: pero es que así tengo que usar el de antes...

E: y ¿qué pasa si usas el que antes has utilizado?

(80)

AA: pues que sería el que antes más las que le sume.

E: aja.

(AA se queda pensando)

E: a ver, ahí tienes cosillas que vas viendo, ¿cómo pondrías eso?

AA: es que claro, si fuera un número más grande pues... pues... pues habría que sumar todos éstos... (no parece estar convencida con lo que había pensando para números grandes)

E: venga, tú piénsalo un poquito y si ves que no se te ocurre más nada, pues lo dejamos, cuando tú quieras.

AA: ¡uff!

E: a ver, piénsalo un poco. Porque ahí estabas sacando alguna relación, ¿no?

AA: sí, pero...

E: y ¿eso cómo lo puedes poner de forma que a ti te sirva para decir el número máximo de regiones cuando tengas... te he dicho cien pero pueden ser diez o veinte, cualquier número de rectas?

AA: pues... (AA sigue dándole vueltas pero no saca nada)

(AA se queda pensando un rato)

(113)

AA: ... yo lo haría así, siguiendo los números.

E: seguirías así, ¿no? Pero ¿seguirías porque crees que es así o porque crees que hay otra forma y en la otra forma no te sale?

AA: no lo sé, a lo mejor al seguir, saldría alguna fórmula pero...

E: o sea, tú seguirías a partir del caso éste sacas éste. Y después haces el siguiente, y el siguiente, y los vas enganchando, ¿no? Y ¿cómo irías pasando de un caso a otro?

AA: pues con seis rectas serían... veintidós (suma dieciséis más seis).

E: vale. Y así conseguirías con los otros... vale, está bien. ¿Quieres seguir por si se te ocurre algo o estás cansada de darle vueltas al coco?

AA: ya está.

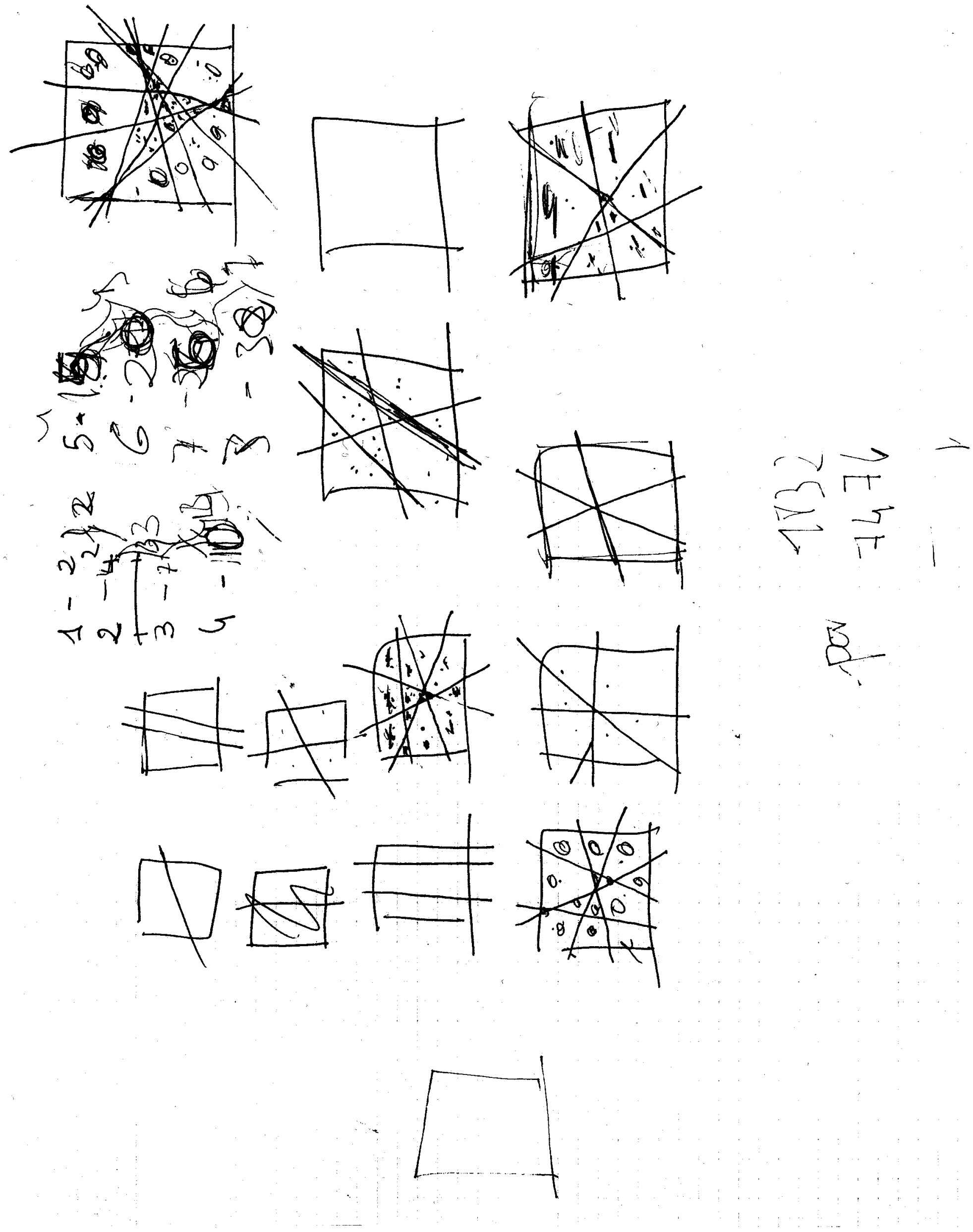
E: bueno, está muy bien.

(126)

Anexo II. Trabajo de los sujetos

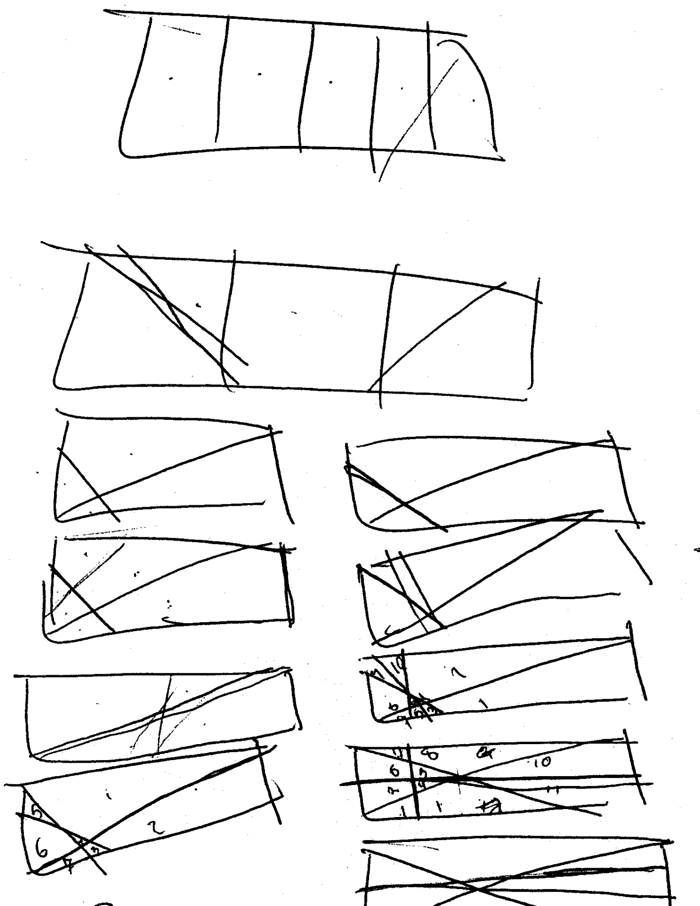
En este anexo presentamos el trabajo que cada uno de los sujetos realizó en los folios que se les entregaron para tal fin. El orden de aparición es el mismo en el que presentamos las transcripciones de las entrevistas en el anexoI.

3ESO1



7-1

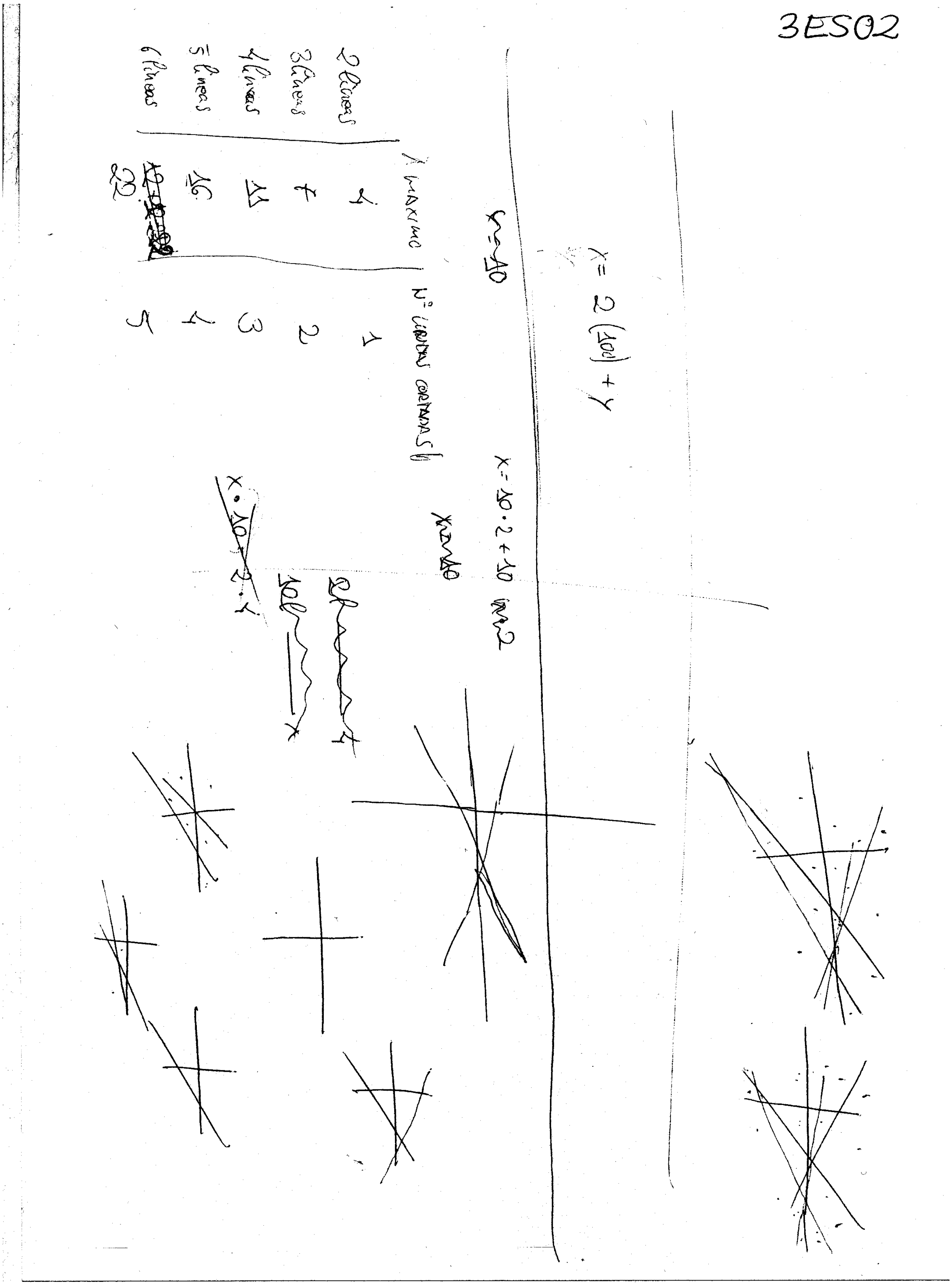
3ESO3

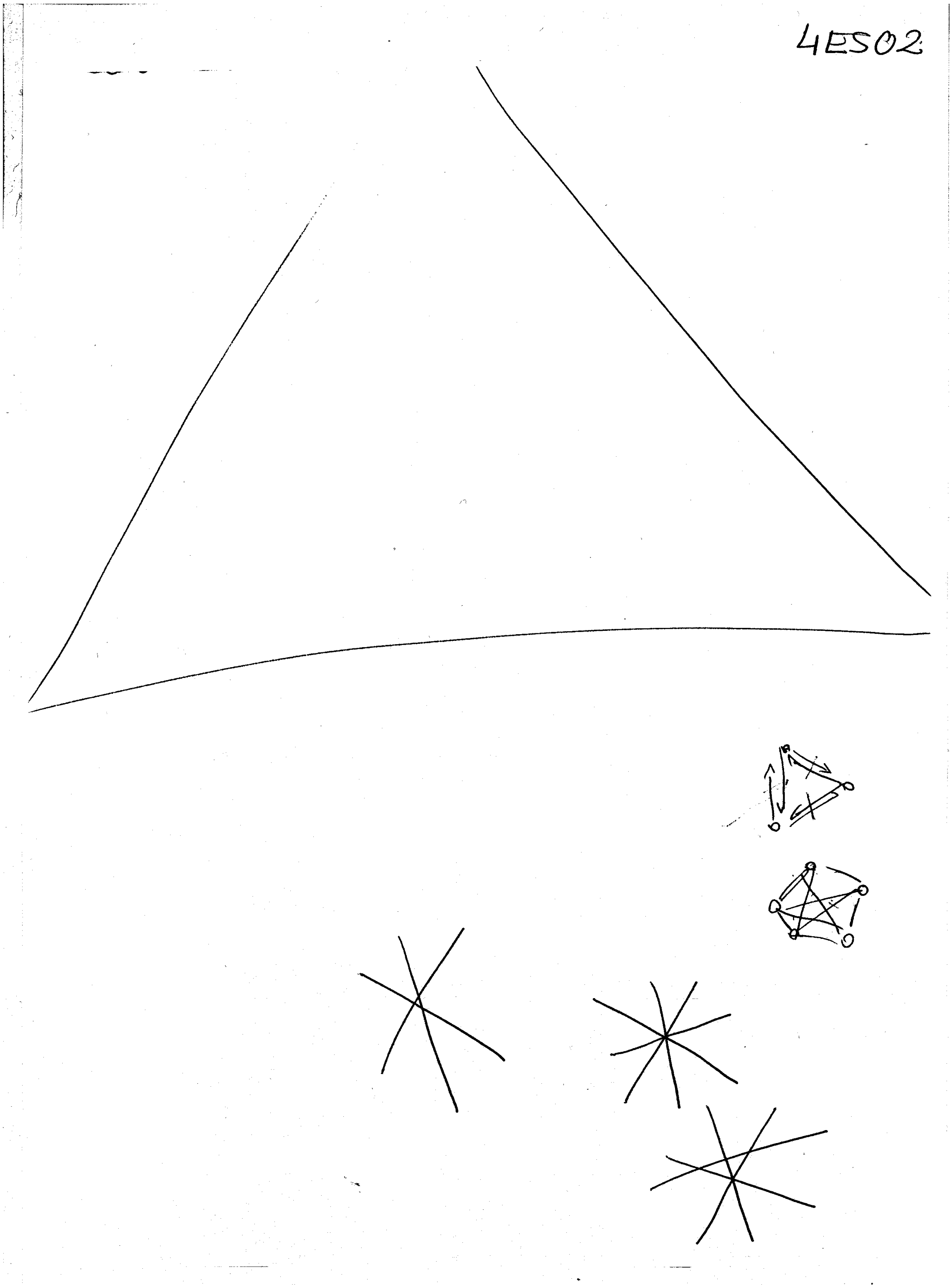


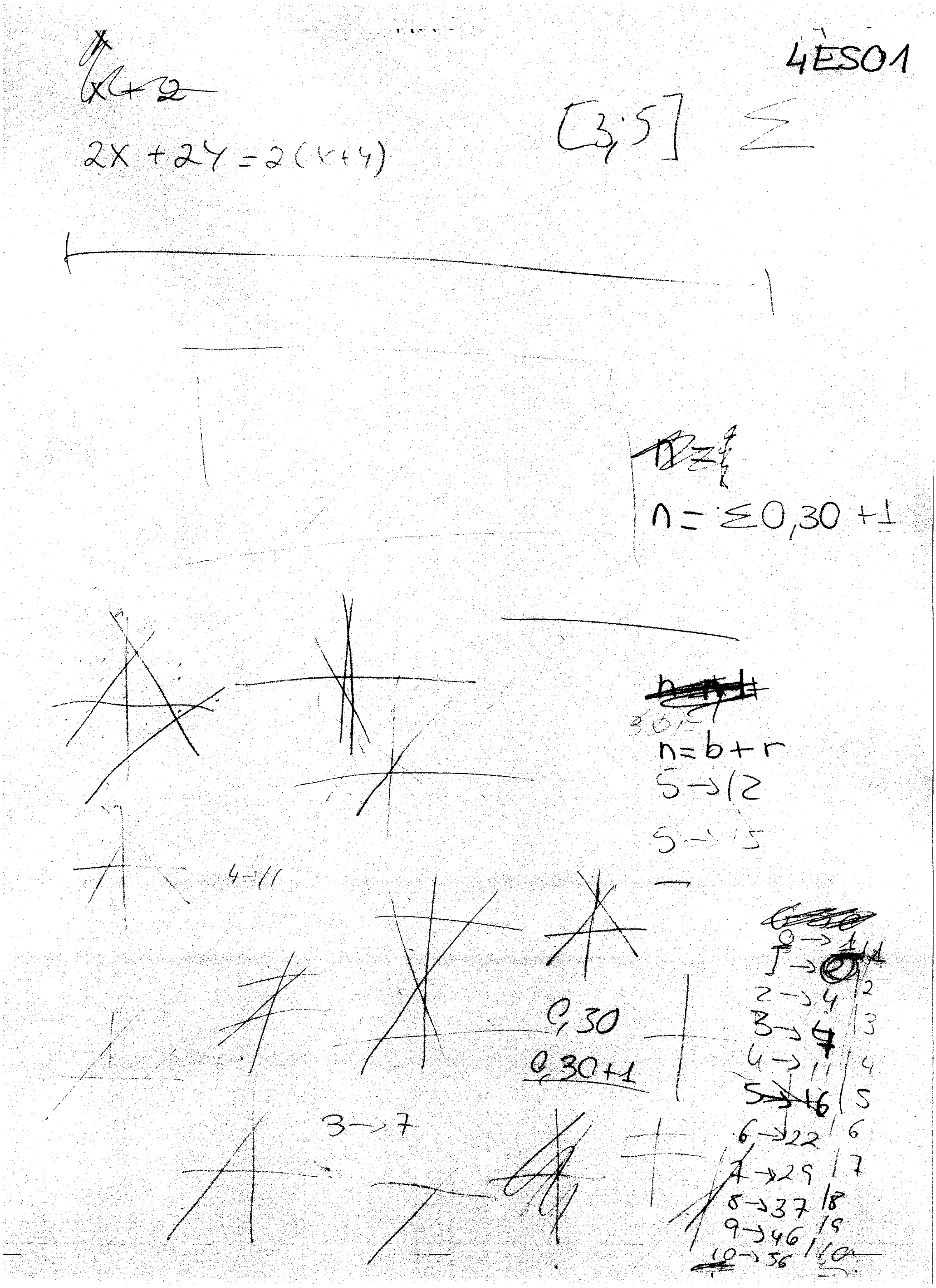
X + 1

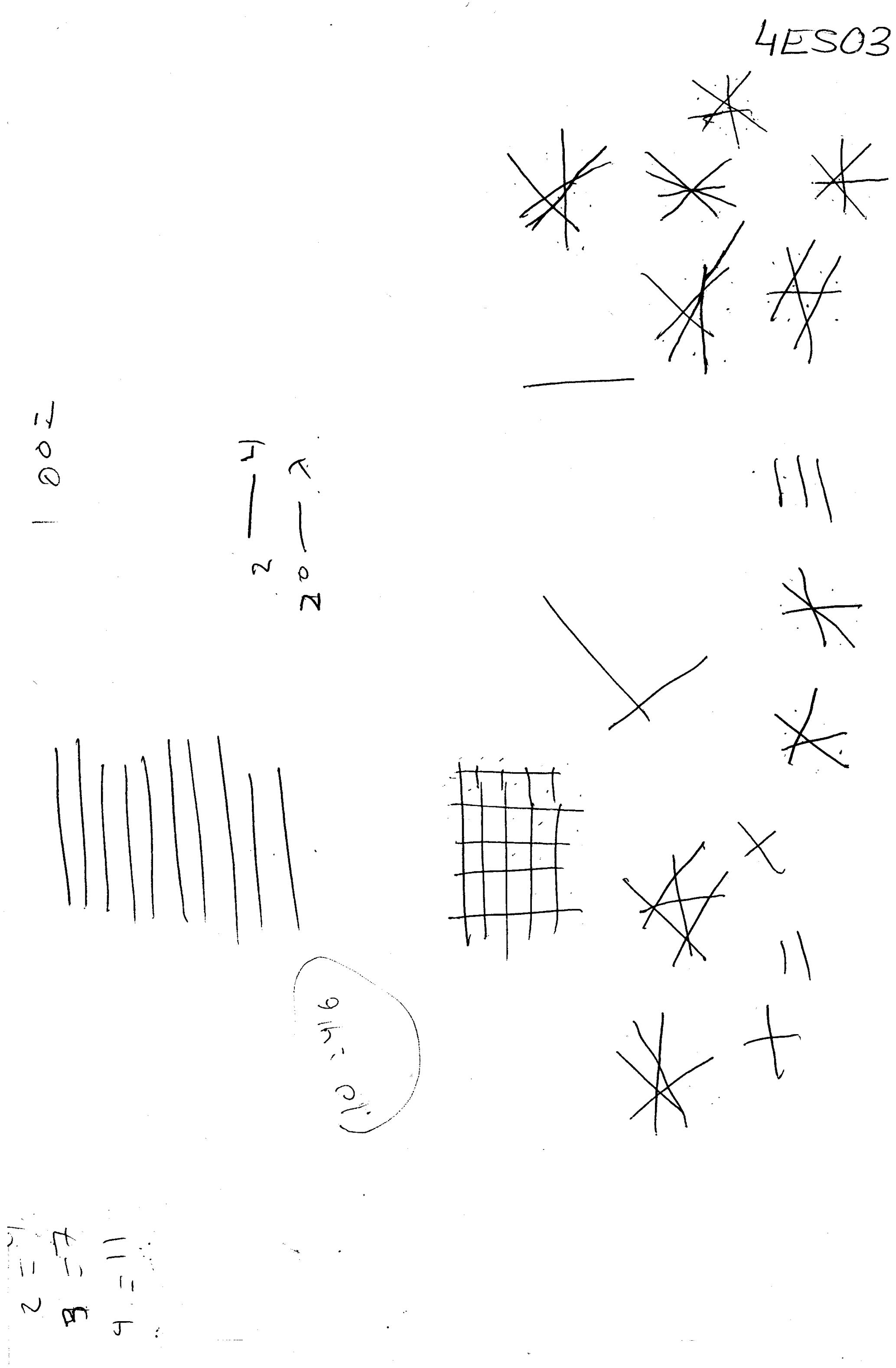
1 = 2
2 = 4
3 = 7
4 = 11

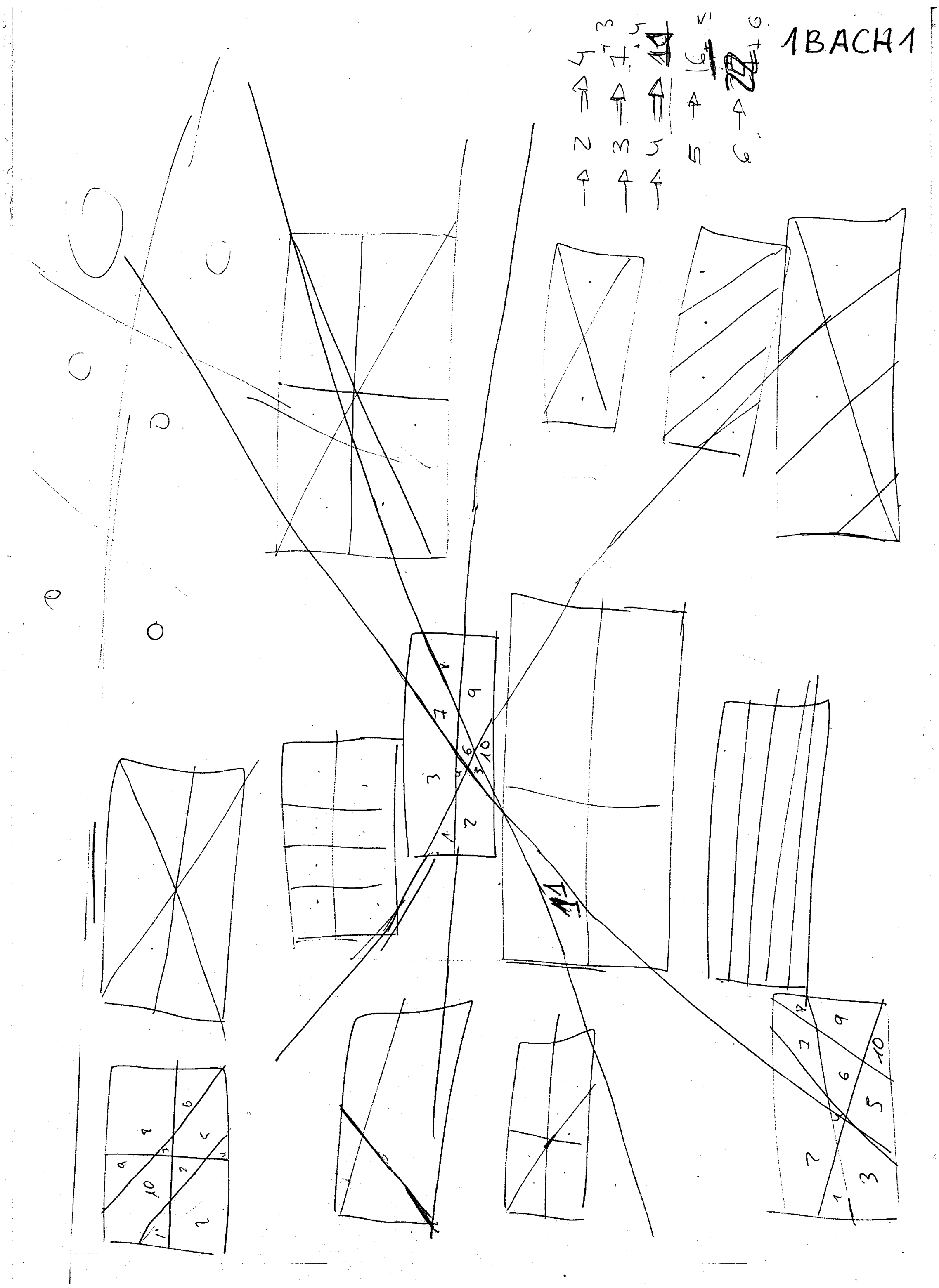
2
3
4


3ESO2


4ESO2

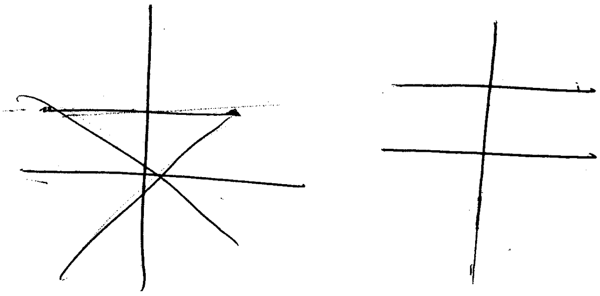

4ESO1
2x + 2y = 2(x+y)
[3,5]
n = Σ0,30 + 1
n = b + r
5 → 12
0,30
0,30+1
3 → 7
0 → 1
2 → 4
3 → 7
4 → 11
5 → 16
6 → 22
7 → 29
8 → 37
9 → 46
10 → 56

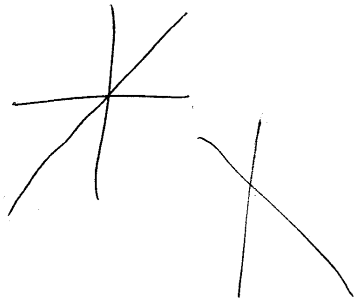

4ESO3

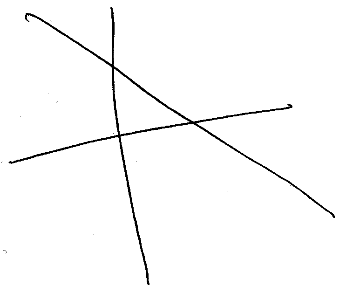

1BACH1

1

1BACH3







5

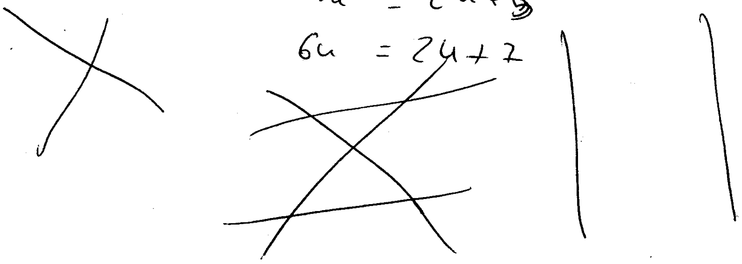
3

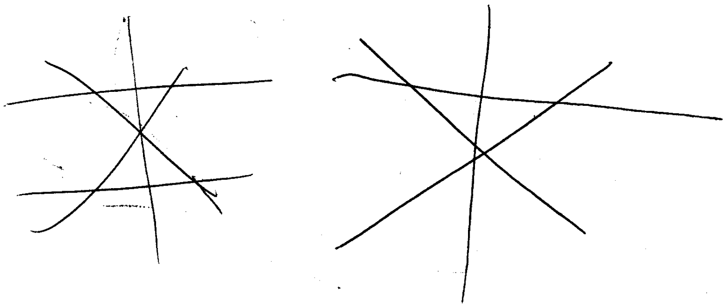
$u = 2u + 1$

$4u = 2u + 3$

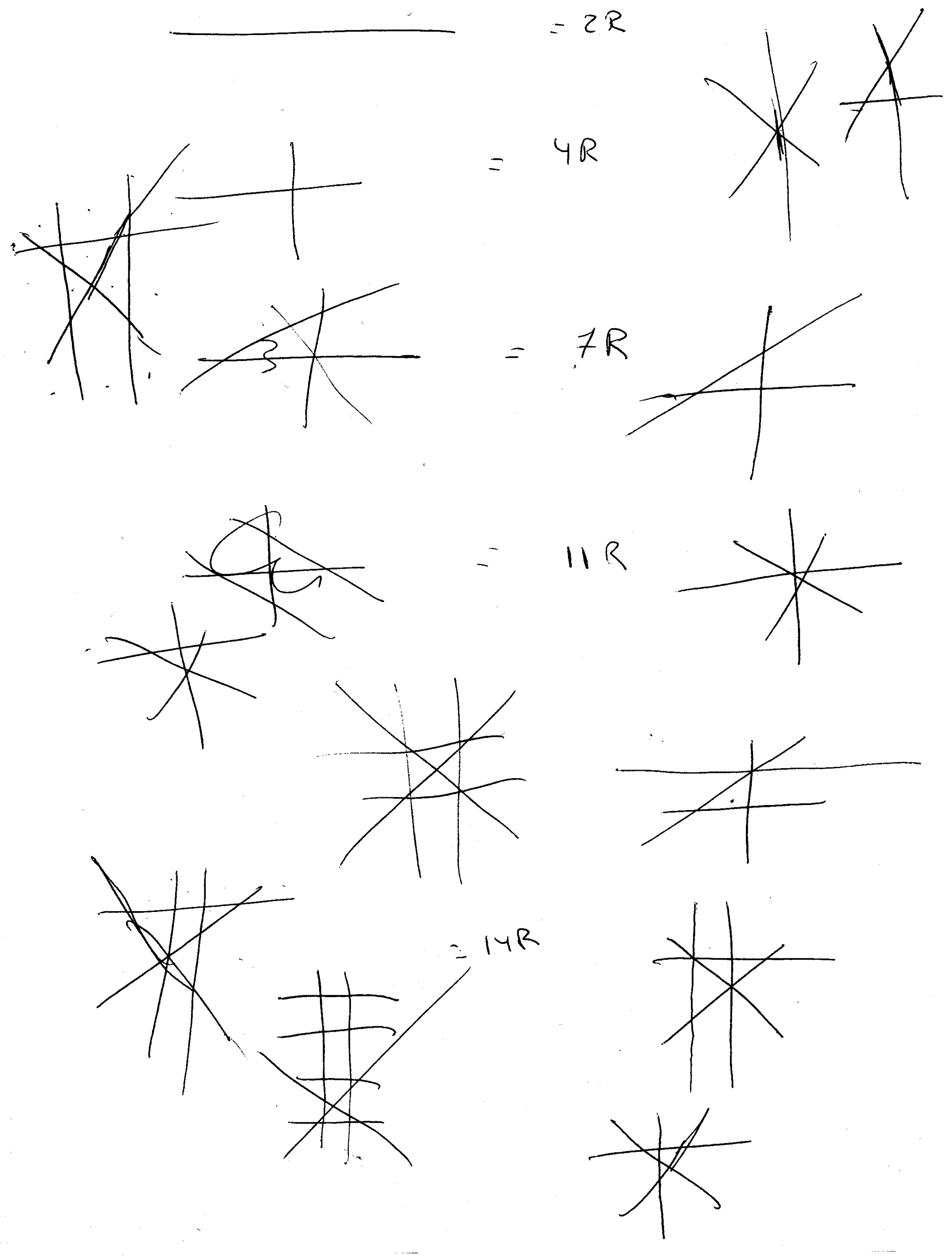
$5u = 2u + 5$

$6u = 2u + 7$

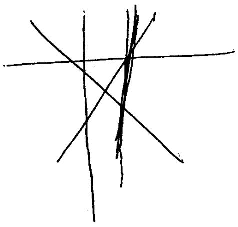


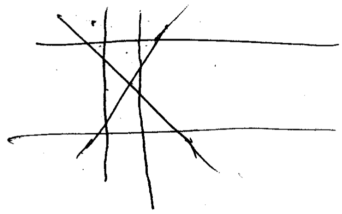


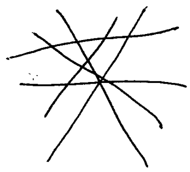
1BACH3



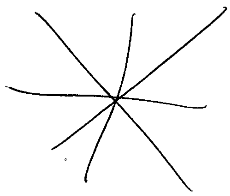
1BACH3



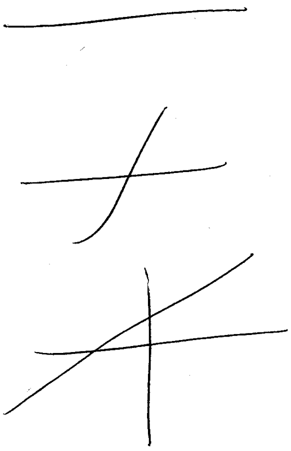


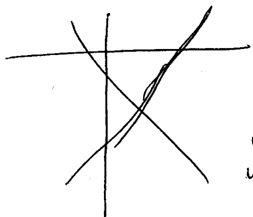


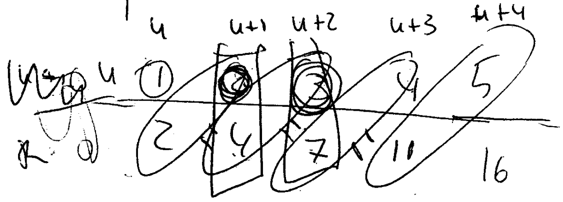
n+10 → n+55



n → n+1) 2
n+1 → n+3) 3
n+2 → n+7) 4
n+3 → n+11) 5
n+4 → n+16) 6
n+5 → n+22) 7
n+6 → n+28) 8
n+7 → n+34) 9
n+8 → n+40



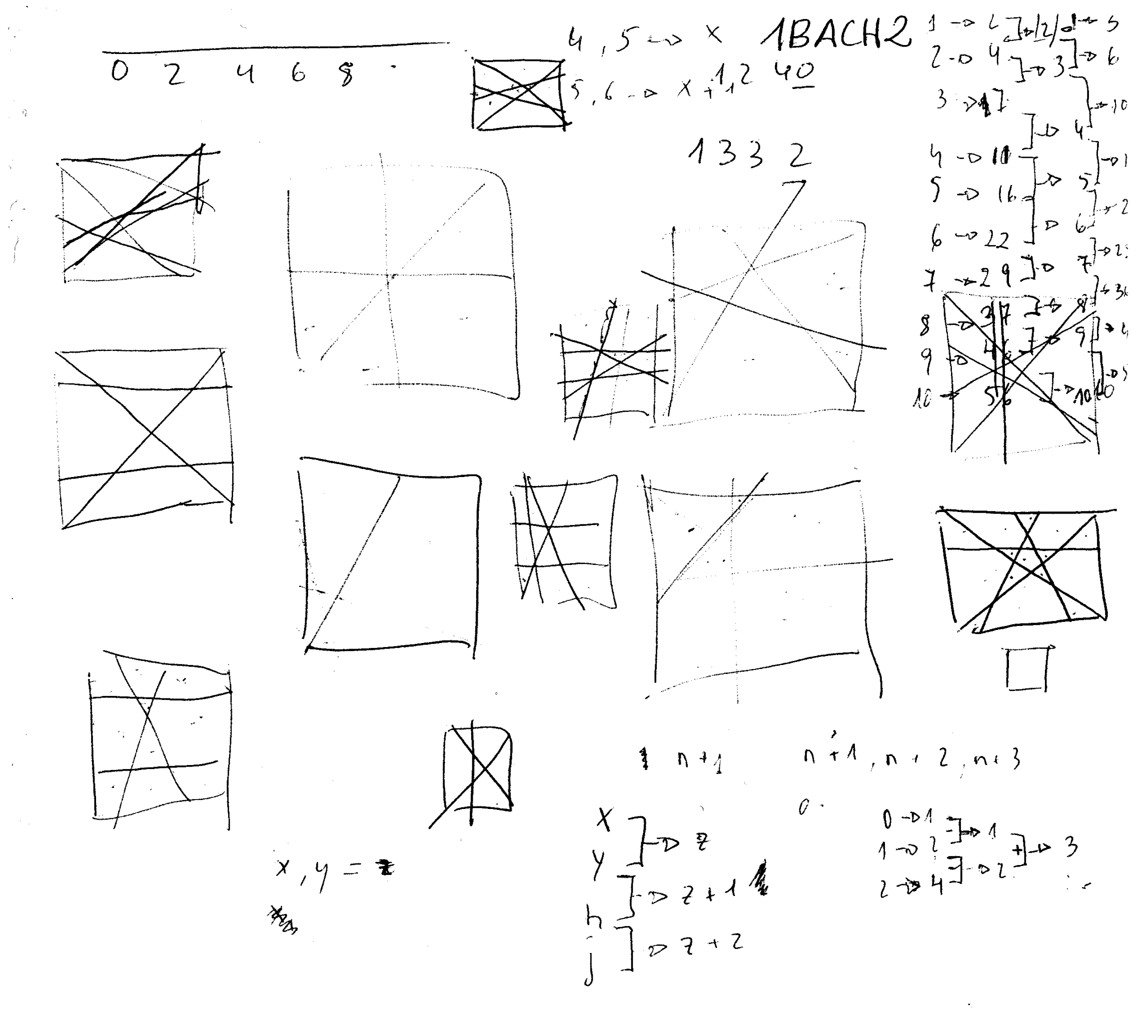




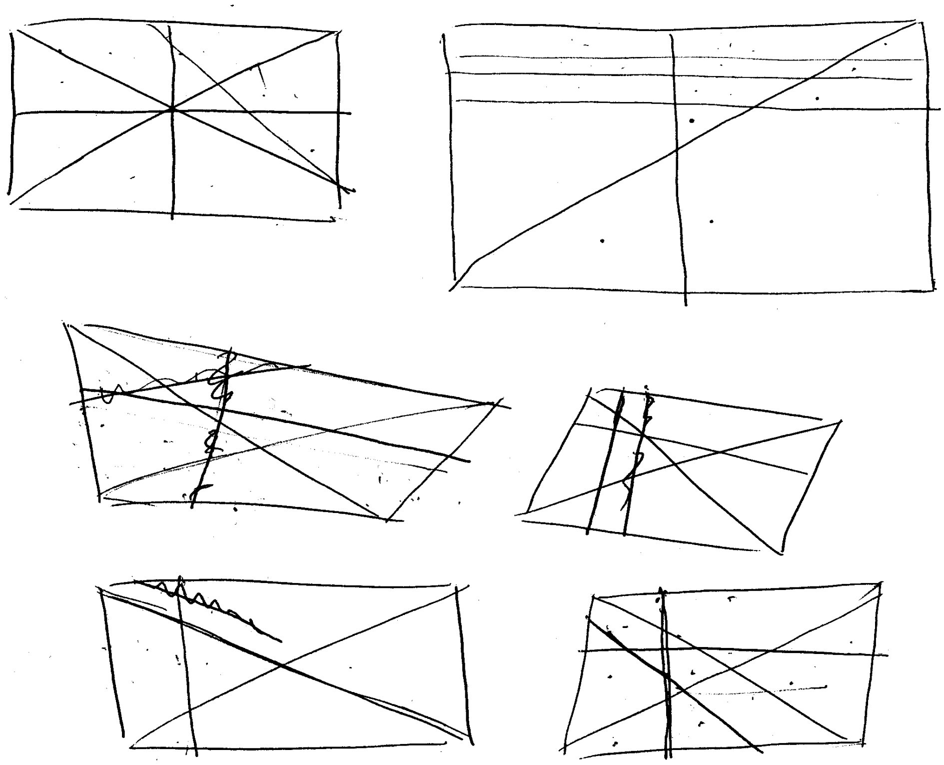
2(n+1) -2

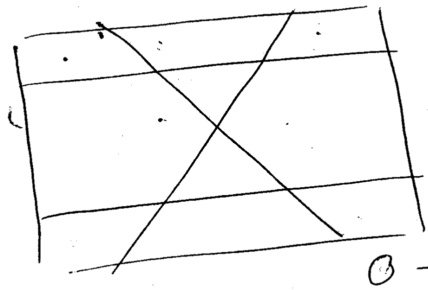
R = 2n-2 2(n+1

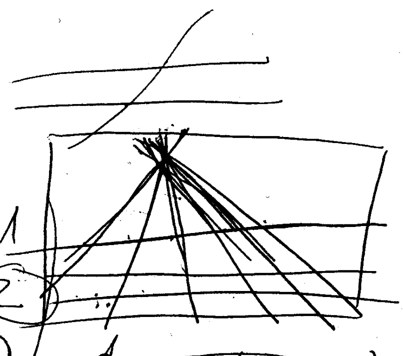
R = 2n-2


0 2 4 6 8
4 , 5 -> x
5 , 6 -> x + 1 , 2 40
1BACH2
1 3 3 2
n + 1
n + 1 , n + 2 , n + 3
0 -> 1
1 -> 2
2 -> 4
x , y = z
z + 1
z + 2

2BACH2







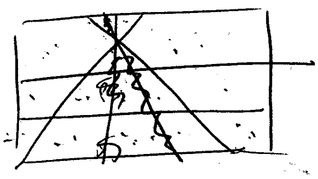
0 — 1

1 → 2

2 → 4

3 → 7

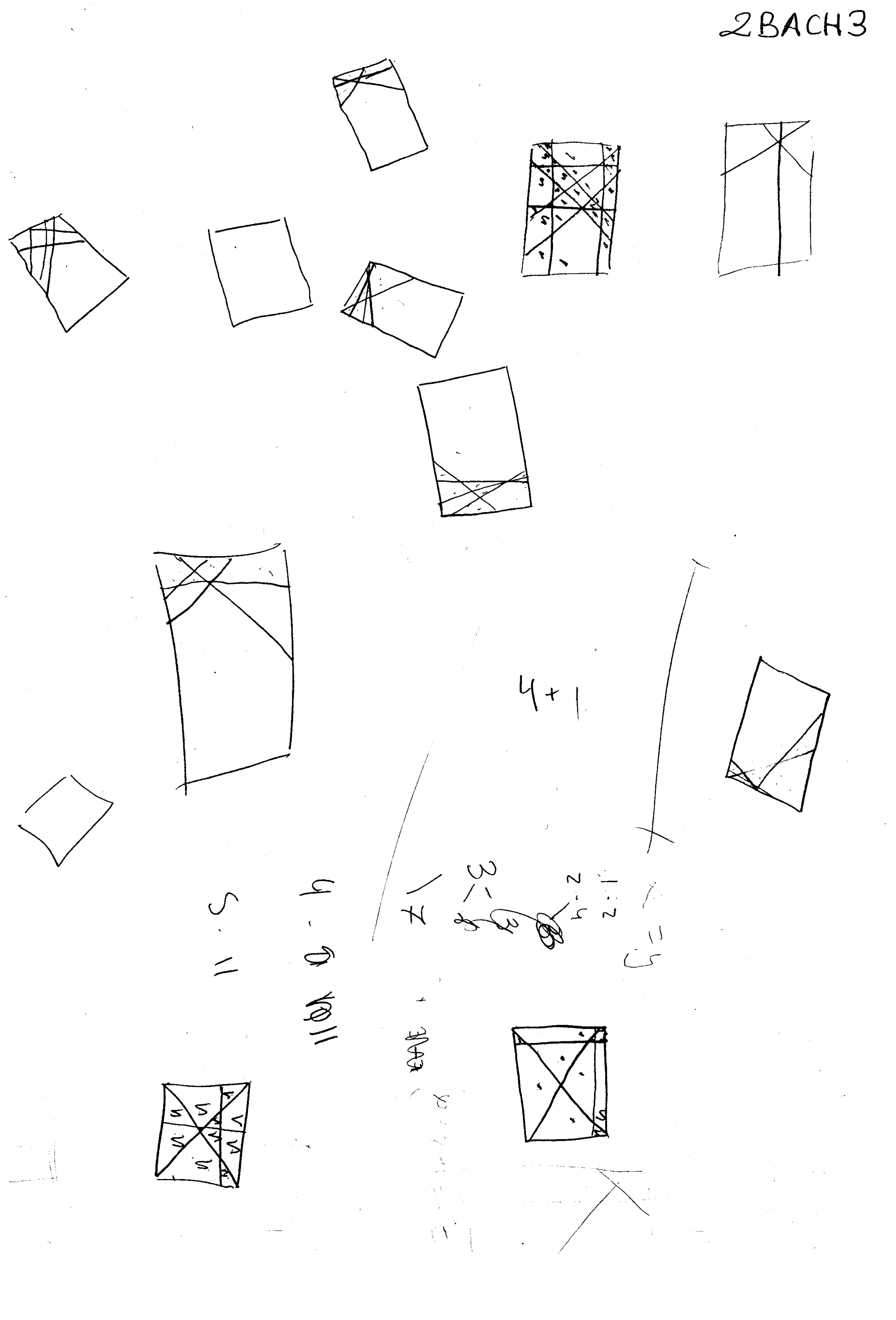
4 → 11



6 + 2 - 2n+(n-1)

4 (

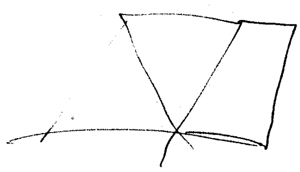
n(n-1)+1

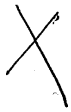

2BACH3
4+1

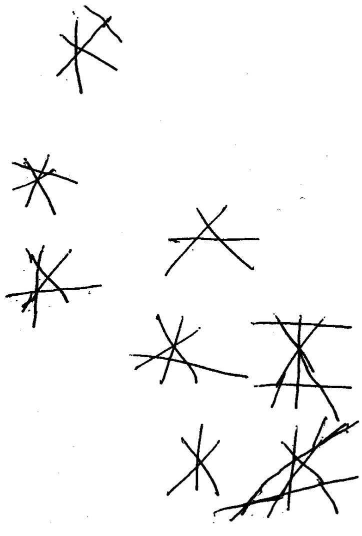
21-1-02. (1)

2BACH1

18
18
36







2 — 4 3
3 — 7 4
4 — 11
5 — 16
6 — 22
$n + (n+1)$

Anexo III. Notas de la entrevistadora

En el tercer anexo presentamos una recopilación de las notas que la entrevistadora tomó durante e inmediatamente después de cada una de las entrevistas. Ambos documentos escritos fueron recopilados en lo que mostramos en las siguientes páginas.

3ESO1

Actitud: al principio de la entrevista estaba muy nerviosa y, aunque se fue tranquilizando según fuimos hablando, cuando no sabía seguir algún razonamiento, se volvía a poner nerviosa. Se muestra muy interesada y atenta.

Tarea 1

Contesta inmediatamente que se obtiene un número par.

Razonamiento según terminaciones, usando la caracterización de que un número par acaba en 0, 2, 4, 6 y 8.

En esta actividad, no escribe nada en los folios. Todo lo comunica hablando.

Tarea 2

No entiende la actividad y se la explico refiriéndome a la mesa y el suelo de la habitación como planos y las cuerdas como rectas...

Plantea dudas sobre el enunciado y los conceptos de plano y rectas. Le cuesta entender el planteamiento pero al fin creo que lo consigue.

Va haciendo casos particulares pero observo que siempre traza rectas paralelas a las anteriores. Le digo que la actividad no dice nada en cuanto a la posición de las rectas.

Es consciente de que hay una relación entre el número de rectas y el número de regiones. Ve que cuantas más rectas, más regiones. Plantea la "regla de tres" como posible solución pero la hago caer en la cuenta de que eso no es cierto para los casos que ella misma ha representado y comprueba que no es válida para cuando traza 1 recta. Se pone nerviosa a la par que interesada en la cuestión pero se desespera porque se cierra en la idea de que no sabe seguir y que no es capaz de encontrar la "generalización" por la que le estoy preguntando.

Una vez que ha acabado su clase y que yo estoy acabando la entrevista con el siguiente alumno voluntario, vuelve a hablar conmigo porque ha pasado lo que quedaba de hora intentando resolver el problema que le había planteado (hoja de cuadros). Ha hecho más casos particulares y le ha estado dando vueltas, cree haber avanzado. Ha obtenido que el número de rectas que va aumentando en cada caso es 1, 2, 3,... Esto pone de manifiesto el interés que había señalado inicialmente por parte de la alumna, y que el tiempo es importante para resolver este tipo de actividades que no son con las que están acostumbrados a encontrarse, ya que no responden a ninguna teoría explicada anteriormente.

3ESO3

Actitud: Está nervioso y me da la impresión de que cuando yo tomo notas, más nervioso se pone. Se va tranquilizando conforme avanza la entrevista hasta tal punto de que se pone a silvar mientras piensa...

Tarea 1

Hace razonamiento por terminaciones.

Tarea 2

Trata de obtener el número máximo de regiones basándose en el nº de regiones del caso anterior.

Hace una tabla para organizar la información obtenida. Trata de encontrar "algo que sea periódico".

Entiende el plano como algo ilimitado y eso le facilita obtener el máximo nº de regiones porque puede alargar las rectas cuando observa que puede aparecer alguna región más. Parece haber encontrado alguna relación entre los números y comenta que con 5 rectas, tendría que obtener 16 regiones, si lo que dice es cierto.

Es sistemático a la hora de trazar las rectas: trata de conseguir el mayor nº de cortes con las rectas que ya tiene dibujadas. Pero esto le da algunos problemillas con la 5º recta porque no consigue que corte a las demás... al final sí lo consigue.

Me pregunta continuamente por el enunciado. Después de ir explicando su razonamiento, nunca pierde de vista qué es lo que tenía que averiguar (en otros alumnos, le tenía que recordar yo qué era lo que tenían que averiguar porque me parecía que se desviaban del objetivo).

Habla de proporcionalidad (ya lo había hecho anteriormente) pero ve que eso no le sirve. Hay un momento en el que trata de aplicar la regla de 3 pero cae en la cuenta de que si no hay proporcionalidad, esto no le va a servir de nada.

Para tratar de pasar a la generalización, le propongo cómo podría decir el nº de regiones que se obtienen con 10 rectas. Veo que se centra mucho en ese caso particular y yo le digo que ese nº se lo he dicho al azar, que también le podría haber dicho 20, 100, etc. Pero me dice que prefiere basarse en 10...

En la tabla considera 3 magnitudes: nº líneas, nº regiones y nº líneas cortadas. Trata de relacionarlas pero no sabe qué dos coger o cómo combinarlas. Ve que la 3ª columna no la puede conocer si no conoce la 2ª, luego concluye que esa relación no le sirve para lo que va buscando.

1ª fórmula: x*10 = 2*4. Va buscando una expresión algebraica y recuerda que debía haber un signo de igualdad en algún sitio. Cuando le digo que me la explique, ve que no tiene sentido lo que ha escrito porque el nº de regiones no variaría cuando vaya variando el nº de rectas.

Establece una relación entre los números:

11=2*4+3

16=2*5+2*3

24=2*6+2*2*3

Intenta comprobar si lo que ha obtenido para 6 rectas (24 regiones) es cierto. Al dibujarlo obtiene 22... o se ha equivocado en su relación o en el dibujo. Se fía más del dibujo pero no obtiene la relación entre nº de rectas y nº de regiones.

Creo que el factor tiempo hay que considerarlo porque hay algunos alumnos que en la Actividad 2, tardan mucho en obtener el nº máximo de regiones (debido a que no son sistemáticos, tienen escasa visión espacial y no lo ven como ilimitado o no ven "a ojo" cómo podrían obtener más regiones en unos casos que en otros, etc.) y eso hace que cuando buscan una fórmula válida haya pasado ya casi 1 hora. Aunque normalmente, cuando no son sistemáticos, al llegar a la obtención de la fórmula, se observan más perdidos aún. Sin embargo, los que han ido organizando la información y han sido sistemáticos al trazar rectas, parecen ser más esquemáticos y hacen razonamientos más elaborados para obtener una expresión general.

Hasta ahora tengo la sensación de que los "buenos alumnos" se ven más ligados a lo que le han explicado en clase y les cuesta más pensar en algo que no esté relacionado con lo que "han dado". Sin embargo, otros alumnos que no obtienen tan buenos resultados académicos se ven menos nerviosos y tratan de resolver el problema conforme a su intuición. Estos últimos, me avisan antes de empezar que ellos son muy torpes, que no se le dan bien las matemáticas... sin embargo, cuando empiezan con la actividad, se ven interesados, envueltos en sus explicaciones y parecen haberse olvidado de esos "complejos".

3ESO2

Actitud: se muestra tranquilo desde un principio. Pasotismo total cuando le digo que su nombre o los resultados no van a ser públicos como notas o algo parecido. Dice que le da igual. Colabora en todo momento y se ve interesado por todas las preguntas que le voy haciendo.

Tarea 1

Ve claro que da un número par. Recurre a casos particulares y cuando le pregunto por números mayores, razona por terminaciones.

No usa el papel para nada. Todo en lenguaje oral.

Tarea 2

Presenta dificultades para comprender el enunciado.

Usa el folio cuando empieza a pintar casos particulares.

Cuando le pregunto que cómo me podría decir, sin representarlo porque requeriría mucho trabajo, el número de regiones máximo que se obtendrían al trazar 20 rectas, se da cuenta de que le estoy pidiendo una generalización y dice: "habrá que sacar una ley de esas". Es capaz de detectar que existe una relación pero no sabe cómo escribir lo que va pensando y pide ayuda porque cree que eso es muy difícil. Aparece una idea en lenguaje algebraico que no llega a desarrollar.

También se va interesado por el problema e incluso me pregunta por la solución.

Este alumno es consciente de que no es lo que se considera un "buen alumno" en matemáticas y está preocupado porque piensa que su compañera lo habrá hecho bien y él no. Aunque no le comento nada de lo que ha hecho o dejado de hacer su compañera, tengo la percepción de que este alumno llega más lejos que la anterior en el razonamiento inductivo que ha llevado a cabo. Por ejemplo, habla de una relación entre número de rectas y número de regiones, y de una ley general entre esas dos cifras.

Creo que la primera alumna se sentía más presionada que el segundo. Quizá por una insconciente intención de que no defraudar a su profesor.

4ESO2

Actitud: Se ve una niña callada, no habló mucho camino al seminario pero no está nada nerviosa y conforme avanza la entrevista se la ve más confiada.

Tarea 1

Se basa en que siempre que suma dos números pares, da otro par.

Usa el lenguaje algebraico mentalmente, no escribe nada en esta actividad. Tiene dificultades al tratar de expresar algebraicamente el enunciado de la actividad. Ën un principio piensa en x como un nº par cualquiera... le hago caer en la cuenta que no puede ser... Piensa en la suma de dos números pares como 2x+2. Donde 2x ya sí tiene que ser par y si le sumo 2, sigue siendo par... Ella no va comprobando que las fórmulas que va obteniendo no son ciertas para determinados casos y le ayudo un poco para que vea que fallan. Después prueba con 2x+2x+2... pero finalmente no es capaz de encontrar una expresión que justifique lo que piensa.

Tarea 2

Entiende la pregunta y la primera cuestión que plantea es el nº de rectas que tiene que trazar.

No tarda en decir que dependerá de dos cosas: del tamaño del plano y del nº de rectas. Le digo que la primera cosa no influye (se lo explico) y que la segunda, que me la explique...

Piensa que se obtiene el nº de regiones, dividiendo el nº de rectas entre 2 y elevando al cuadrado porque está pensando en rectas paralelas que traza (divide entre “largo” y “ancho” del plano) y luego calcula su área. Le hago caer en la cuenta de que no es válido siempre.

Le comento que lo puede dibujar, si quiere, pero no lo hace y sigue: ahora piensa que es dividiendo el nº entre dos, le suma 1, y lo eleva todo al cuadrado. Pero piensa que eso sólo sería cierto para los números pares. Va comprobando las formulitas con números concretos.

Deduce que cuantas más rectas trace, más regiones obtiene.

Le propongo que pruebe con 4 para ver si es cierta su fórmula para todos los números pares... no sabe seguir.

Como se queda atrancada en la actividad 2, y creo que influye el dibujo con las rectas... y que el razonamiento queda tapado, le planteo la actividad 3. Pero llega aproximadamente al mismo nivel de razonamiento, a pesar de ver el enunciado más intuitivo y manejarlo mejor.

4ESO1

Actitud: Se muestra interesada por participar en la entrevista y el profesor la propone. No está nada nerviosa. Considera que siempre se le han dado bien las matemáticas, le encantan. Su padre es profesor del departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada. Le propone ejercicios entretenidos en verano y le gusta. Le gusta la actividad, le gustan las de ese tipo.

Tarea 1

Cualquier número que sea par tiene al dos como factor. Recurre al lenguaje algebraico.

Tarea 2

Le cuesta un poco captar el enunciado del ejercicio.

Considera el plano como una región ilimitada. Por intuición, cree que va a obtener un nº máximo de regiones que va a ser el cuadrado del nº de rectas que trace.

Va obteniendo rápido el número máximo de regiones. Desde el principio considera que el nº máximo lo obtiene cuando la recta nueva que traza corta a todas las demás que tengo ya dibujadas.

Ve la relación +1, +2, +3, ...

Hace un razonamiento equivalente a decir que para n rectas obtendré la suma de los n primeros números más 1. Intenta escribir esto en lenguaje algebraico pero no puede porque no conoce los símbolos para representar la suma de los n primeros números.

Le comento que cómo vería que eso es cierto siempre y me contesta que costaría mucho trabajo ir probando con todos los casos... quizá por ordenador.

Me ha sorprendido la facilidad con la que ha calculado el nº máximo de regiones para casos concretos y cómo ha obtenido la conclusión final correcta, por la suma de los n primeros números. En este caso se ve cómo no es imprescindible el lenguaje algebraico para describir situaciones generales, ella lo ha descrito expresando con sus palabras lo que pasaba por su cabeza. Aunque, sin duda, el lenguaje algebraico le habría facilitado las cosas.

Hasta el curso pasado estaba en "la Presentación" y comenta que allí, con que sacaras buenas notas un curso, los profes la conocían y, aunque le saliera un examen peor, al final seguía teniendo buenas notas. Sin embargo dice que el "el Manjón", cada año tienes nuevos profesores y eres un alumno más, te tienes que ganar las buenas notas por tu trabajo. De hecho en el primer trimestre no hizo mucho y obtuvo un "bien".

4ESO3

Actitud: No está nada nervioso. Se ha ofrecido voluntario porque la compañera del día anterior le comentó que era una actividad entretenida. Dice que sacaba buenas notas pero que este curso ha bajado. Cree que lo que le falla es el método de estudio. Antes se le "quedaban" las cosas y memorizaba. Ahora eso no le sirve.

Tarea 1

Se basa en casos particulares y no se le ocurre ninguna idea para tratar de convencer a alguien de que lo que intuye en casos concretos, es cierto en siempre.

Tarea 2

En principio, dice que infinitas regiones dadas por las infinitas rectas que puedo trazar sobre un plano. Ve el plano como región ilimitada.

Le propongo algún caso concreto para que capte la idea del ejercicio. Hace el dibujo para 2 y 3 rectas y dice rápido que para 4, obtendré 11. Dice que lo ha intuido porque lo obtiene sumándole al nº de regiones anterior el número de rectas que trazo.

Piensa en la regla de 3 como posible solución. Tras plantearle si se verificaría para los casos que lleva, ve que no.

Siempre que habla de generalizar, se va a casos grandes, no parte de números pequeños, de los cuáles ya tiene algunos cálculos hechos.

Ha hecho el razonamiento por recurrencia que le da el número máximo de regiones de un caso, conociendo el número máximo de regiones que tiene en el caso anterior pero no le convence del todo, cree que tiene que hacerlo de otra manera que dé menos trabajo. En ningún momento recurre al lenguaje algebraico (sólo habla de doble +1...)

Finalmente lo deja de intentar porque dice que siempre acaba pensando en la regla de 3, aunque sabe que así no es. Él mismo dice que ése es el método al que está acostumbrado y por eso acaba siempre dándole vueltas.

El razonamiento que le lleva a la regla de 3 en la 2ª actividad concuerda con la propia forma que tiene él de ver su método de estudio. Memorizaba... es probable que eso influya porque trata de aplicar lo que ha aprendido de memoria y no trata de escribir según lo que está pensando. Insiste para que le diga cómo se haría...

1BACH1

Actitud: Hablamos bastante hasta el seminario ya que su aula era una de las prefabricadas... No está nada nerviosa. Le cuesta mucho decidirse a decir algo, no se atreve a hacer afirmaciones por ella misma, a pesar de que le he dicho de que no hay respuestas ni buenas ni malas...

Tarea 1

Razonamiento por factorización: 2 como factor común.

No escribe nada.

Tarea 2

A pesar de decir que entiende el enunciado, demuestra que no lo ha hecho del todo.

Se va al caso general directamente. Creo que no consigue ver la utilidad de los casos particulares para la obtención del caso general.

Observa que si las rectas se cortan, se obtienen más regiones que si las traza paralelas. Piensa que se obtienen el doble de nº de regiones que de rectas trace.

Pasa de un caso concreto a otro sin ninguna sistematización, dibuja las rectas "a ojo".

Habla de que ve una progresión pero que no se fia porque tiene hechos muy poquitos casos. Ve una relación de un paso a otro: +3, +4, +5...

3---7 (doble +1)

4---11 (doble +3)

5---16 (doble +6)

Comenta que le harían falta más casos (9 ó 10 quizá) para fiarse de una determinada relación. Pero la cosa se complica con los dibujos. Partiría de casos ya hechos y añadiría las nuevas rectas. Dice que ahora se queda intrigada porque no ha acabado...

1BACH3

Actitud: Nada nerviosos. Está entretenido e interesado por la actividad. Buena predisposición. Ha notado mucho el cambio de la ESO al Bachillerato. Además él estaba antes en otro colegio ("los Agustinos") y también ha notado más el cambio. No suele estudiar matemáticas más que el día de antes del examen. Con ese método ha obtenido un 7.

Tarea 1

Dice rápido que sale un nº par pero no se le ocurre explicar por qué, dice que "por lógica". Comenta que iría probando con distintas sumas y lo iría comprobando, le hago caer en la cuenta de que si tiene que probar con todos los números pares que hay... Finalmente escribe dos números grandes (1240 y 1332) y lo explica terminaciones (escribe): todos los pares acaban en 0, 2, 4, 6 u 8 y la suma de dos números que acaben en uno de esos dígitos (prueba con todas las combinaciones posibles), vuelve a dar otro nº que acaba en 0, 2, 4, 6 u 8, luego es par.

No recurre en ningún momento al lenguaje algebraico.

Tarea 2

Al principio piensa que la proporción es el doble y que el número de regiones que busca se obtiene cuando las rectas se cortan en un mismo punto. Le comento que mire si con tres puede obtener, de alguna manera, más de 6 regiones... ve que puede obtener 7. Trata de sacar el resto de los casos basándose en el razonamiento que hay seguido en este: busca que las rectas que introduce corten a dos de las rectas que ya tiene. Así, para 4, tiene 10... finalmente ve que puede conseguir 11 y que el número máximo de regiones lo obtiene al cortar la recta que introduce con el número máximo de regiones de las que ya tiene. Ve la relación entre el nº máximo de regiones entre un caso y el siguiente se obtiene sumando 1, 2, 3, 4... se agobia un poco porque no es capaz de expresar por escrito, con lenguaje algebraico, lo que está pensando. Luego es consciente de que sería necesario emplearlo para llegar a una generalización. Le comento que no se preocupe, que trate de explicármelo con sus palabras si no sabe escribirlo con letras (como lo está intentando).

El profesor me ha dicho que mejor participe hoy uno de los que no tienen el examen de recuperación, que es esa misma tarde, para que no pierdan las aclaraciones de las dudas.

Como la mayoría de los que han hecho la actividad, me pregunta cómo se podría hacer, si iba por buen camino...

1BACH2

Actitud: Muy tranquilo. Por el camino me comenta que lo de las fórmulas se le da fatal, que él lo hace a su manera, pensando un poco. Me pone como ejemplo el cuadrado de una suma, él razona cómo es, pero no con la fórmula.

Tarea 1

Razona según las terminaciones de los números.

Tarea 2

Le cuesta entender el enunciado.

n=nº de rectas

El nº de regiones será 2n+1 ... y escribe n=2n+1

Va comparando casos particulares con fórmula pero se lía. No ve la relación aunque creía que era lo que tenía que buscar.

No tiene en cuenta cómo se deben cortar las rectas para obtener un mayor nº de regiones.

3-----2n+1

4-----2n+3

5-----2n+5

...

Construye una tablita que le recuerda algo del curso pasado:

1	2	3	4
2	4	7	11

Y cree tenerlo. De hecho, lo tiene pero no es capaz de escribir algebraicamente la relación.

Sigue por:

n-------n+1

n+1----n+3

n+2----n+7

...

Ve la relación +2, +3, +4, +5... pero no consigue la relación.

Yo le pregunto si con la información que tiene, podría averiguar el nº máximo de regiones que se al trazar 10 rectas sobre un plano. Sigue última tablita... y lo hace basándose en los anteriores. Pero no obtiene (según él mismo dice) una norma que generalice todo.

Al igual que otros alumnos, queda sorprendido con la segunda actividad, es algo que nunca ha pensado. Se queda "enganchado" y dice que eso lo tiene que sacar él por la tarde...

2BACH2

Actitud: Se considera un alumno torpe y lo comenta antes de empezar la entrevista. Dice que nunca se le han dado bien las matemáticas... Se muestra muy participativo y comunicativo en todo momento. Se nota que es una persona muy activa. No está nada nervioso. Interesado por la actividad. Cuando empieza a hacer dibujos se siente tonto, como un niño pequeño. Esto pone de manifiesto que no está acostumbrado a hacer dibujos en matemáticas porque si no, lo vería normal.

Tarea 1

Dice rápido que da un nº par pero... lo ve evidente y dice que no tiene ni idea de cómo explicarlo.

Hace razonamiento basado en que los números pares son divisibles por 2 y saca factor común... pero no parece estar convencido del todo de lo que está diciendo, a pesar de que es válido. No escribe nada.

A pesar de tener todo el razonamiento hecho, no le convence del todo.

Tarea 2

Ve que a mayor nº de rectas, mayor nº de regiones. En esta actividad empieza a usar el folio para dibujar casos particulares pero no es sistemático. Pasa del caso con 3 rectas al de 8, hasta que se da cuenta que se ha complicado mucho al dar ese salto.

Se percata de que a cuántas más rectas de las que yo tenía dibujadas corte la nueva recta que trazo, más regiones obtengo. Dice que si con 3 rectas obtenía 7 regiones, tengo que trazar una recta que corte a esas 3 y tendré las 10. Le comento que mire bien por si hay otra forma de trazar las rectas para obtener un mayor nº de regiones. Tarda en hacerlo... (incluso dudo si decirle que el máximo para 3 rectas es 11 y que pueda seguir con el resto del razonamiento) pero finalmente obtiene 11. Se pone contentísimo porque ve que ha sido capaz de hacerlo él sólo cuando pensaba que no tenía ni idea.

Cuando le pregunto por el caso en que tengamos un elevado nº de rectas, dice que habrá que obtener una "formulica rara", de las que nunca se le han dado bien... Usa lenguaje algebraico usando x e y como incógnitas que trata de relacionar pero no sabe cómo seguir y se acaba el tiempo.

Como todos los alumnos hasta ahora, me pregunta cómo se haría completo y le digo que cuando acaben todos sus compañeros, se lo explicaré. Aunque es un alumno que no obtiene buenas calificaciones, se ve interesado por la actividad y comenta que prefiere seguir con la cuestión que le he propuesto en vez de ir a la siguiente clase. Es un detalle que muestra cómo un ejercicio al que no está acostumbrado, aunque le parezca difícil, le sirve como motivación porque tiene que llegar a un resultado que ni siquiera sabe cuál es. Está participando en una especie de "rompecocos" a la vez que trabaja una serie de conceptos matemáticos.

2BACH3

Actitud: Muy nerviosa. La ha propuesto el profesor para que participe y se ha quedado muy cortada. Es muy callada, no me comenta casi nada por el camino, ni siquiera me pregunta por lo que vamos a hacer (como han hecho la mayoría). Parece que le da miedo hablar y me cuesta mucho que colabore.

Tarea 1

Tarda un poco en decir que da un nº par. Ha pensado en un caso particular: 18+18

Razona por terminaciones. Usa la caracterización de que los pares terminan en 2, 4, 6, 8 y 10, y que la suma vuelve a dar otra terminación de ese estilo.

Tarea 2

Considera el plano como región ilimitada (no dibuja un rectángulo ni nada parecido).

Le recuerda a un ejercicio del curso pasado.

Sistematicidad al dibujar: cuantos más cruces, más regiones.

Habla de la obtención de una serie o algo así.

Tiene la información organizada en una tabla pero, aunque lo intenta, no consigue obtener una fórmula general que valga para todos los casos.

Me queda la duda de si esta alumna no contesta porque es muy tímida y está deseando pasar el mal trago o es que realmente no se le ocurre nada más.

2BACH1

Actitud: al principio está un poco nerviosa, sobre todo cuando le digo que lo voy a grabar... pero consigo que se tranquilice y siga así durante toda la entrevista.

Actividad 1

Hace todo el razonamiento mentalmente, no escribe nada. Dice que cualquier nº par es múltiplo de dos. Por tanto, al sumar dos de ese tipo, puedo sacar factor común, el 2, y tengo 2 por una suma de dos números. Eso vuelve a ser un nº par.

Cuando le pregunto que si así ya no quedaría lugar a dudas sobre su afirmación muestra un poco de inseguridad. Creo que está sorprendida del razonamiento que acaba de hacer.

Actividad 2

La primera pregunta que hace es cuántas rectas tiene que trazar. (Le digo que las que quiera)

Cree que si traza una recta, no se obtiene ninguna región... y pregunta si las regiones tienen que ser cerradas. En la misma conversación, hay un momento en el que duda porque considera que el tamaño del plano va a influir en el nº de regiones que se obtengan. Le digo que el plano es ilimitado en extensión y ve que no influye.

Se pone a representar casos particulares y ve que trazando rectas paralelas no obtiene el nº máximo de regiones. Va obteniendo información de los casos particulares: las rectas no deben ser paralelas, la siguiente que trace debe cortar (y no todas en el mismo punto) a las que ya haya dibujadas. Ve que la cosa se va complicando...

Cree haber encontrado un ejercicio que le suena del curso pasado y que le puede ayudar. No se acuerda exactamente cómo era pero calculaban el nº máximo de cortes entre un determinado nº de rectas.

Es consciente de que existe una relación nº rectas-nº regiones y busca la generalización. Habla de funciones, maximización... y se bloquea. Le digo que trate de pensar un poco, que yo no trato de evaluar si ha trabajado algún tema en clase, que todo lo que ha aprendido le va a servir pero que no se cierre sólo en eso y que trate de pensar.

Llama n al nº de rectas (aparece lenguaje algebraico) y maneja distintas fórmulas pero ninguna de ellas le cuadra con los casos particulares que ha representado.

Cree que sabría hacerlo refiriéndose al nº de regiones que ha obtenido trazando un nº menor de rectas que en el que está en la actualidad (por recurrencia). Pero no sabe cómo escribir eso algebraicamente y, de todas formas, no lo ve adecuado porque si le preguntaran por el nº max. De regiones obtenido con 1000 rectas, no va a empezar trazando 1 recta...

Finalmente, ha considerado varias fórmulas implicando n y distintas operaciones aritméticas pero no obtiene la adecuada a sus razonamientos.

La alumna se va interesada por el problema y dice que seguro que le sigue dando vueltas hasta que le salga.

Consideraciones generales:

Los tres alumnos entrevistados se muestran interesados por la última propuesta. Al no encontrar una fórmula que satisfaga las condiciones que van imponiendo según los casos particulares que han ido representando, quieren que les ayude o le diga cuál es la “solución”. Reconocen que se han quedado “enganchados” con el problema y que seguirán dándole vueltas hasta que les salga.