Desarrollo del esquema conceptual del concepto de Integral Definida en el marco teórico “APOE”: Un estudio de caso

Eliécer Aldana Bermúdez
eliecerab@uniquindio.edu.co
Universidad del Quindío-Armenia. Colombia

Mª Teresa González Astudillo
maite@usal.es
Universidad de Salamanca. España

Resumen En esta comunicación se presenta un estudio sobre el desarrollo del esquema conceptual del concepto de Integral Definida en el marco teórico APOE de un estudiante de tercer año de Licenciatura de Matemáticas en la universidad del Quindío que estudia por primera vez este concepto. Para realizar esta investigación, inicialmente se identificaron los elementos matemáticos que configuran el concepto, lo que permitió realizar una descomposición genética del concepto. Posteriormente, se recogió información utilizando tres instrumentos: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. El análisis se realizó identificando los elementos que utiliza el alumno para resolver las tareas, las relaciones lógicas que establecen entre ellos y el uso de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Esto ha permitido caracterizar el esquema conceptual del concepto en este estudiante.

Palabras clave: Integral Definida, APOE, elementos matemáticos, desarrollo del esquema, descomposición genética.

Abstract

Development of the scheme of comprehension of the concept gives Integral Defined in the theoretical frame APOE: A study of case

In this communication is presented a study about the development of the conceptual scheme of the Integral Defined concept in the framework APOE of a student that courses third year of Degree of Mathematics in the University of the Quindío. He studies for the first time this concept. There were identified the mathematical elements that configure the concept, which allow to describe a genetic decomposition of the concept. Later, information was gathered using three instruments: a questionnaire, an interview and a conceptual map. The analysis was made identifying the elements that he uses to solve the tasks, the logical relations that he establishes between them and the use of different systems of representation: graphical, algebraic and analytical. This allows characterize the conceptual scheme of the concept in this student.

Key words: Integral Defined, theoretical frame APOE, mathematical elements, development of the scheme, genetic decomposition.

1. Presentación del problema

Los resultados de diversas investigaciones acerca del concepto de Integral Definida reflejan dificultades de comprensión en los alumnos. En este sentido Orton (1983) comprueba que los alumnos son capaces de realizar cálculos algebraicos con integrales pero no comprenden el papel que juega el límite en la definición de este concepto y no dotan de significado a los símbolos que se utilizan. Por su parte, Mundy (1984) presenta un análisis en el que los alumnos debían evaluar integrales como $\int_{-3}^{3} x+2\,dx.$, pero obtuvo un mínimo de aciertos. Asimismo, Calvo (1997) observa que los estudiantes asocian la Integral Definida con el cálculo de áreas por lo que si la integral es negativa tienden a cambiar el signo. Rasslan y Tall (2002) exploran la imagen del concepto (Vinner, 1991) de Integral Definida que tienen los estudiantes, concluyendo que pocos responden correctamente y sugieren introducir este concepto a partir de experiencias previas. Para otros investigadores Czarnocha et al. (2001) es esencial la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de límite para el desarrollo de una comprensión del concepto de integral definida. Asimismo, Paschos et al. (2006) desarrollaron un estudio de caso sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto. A partir de estas dificultades algunos investigadores han realizado propuestas de enseñanza de este concepto como las planteadas en Turégano (1994), Czarnocha, et al. (2000), Depool (2004) y Camacho et al. (2008).

2. Referentes teóricos

El marco de esta investigación es la teoría "APOE", desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity (**RUMEC**). Está basada en la noción de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1982) y modificada para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000a) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan construcciones mentales para comprender los conceptos. Estas construcciones se denominan: acciones, procesos, objetos y esquemas y se logran mediante unos mecanismos como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, **y** tematización (Dubinsky, 1991).

El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema propuestos por Piaget y García (1982), ha llevado a mejorar la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky y MacDonalds, 2001). DeVries (2001), caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como: **intra,** cuando sólo se identifican aspectos individuales aislados; **ínter**, se caracteriza por la construcción de relaciones y el **trans,** se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa, las relaciones descubiertas en el ínter son entendidas dando coherencia al esquema.

En opinión de Baker et al. (2000), el uso de estos niveles para analizar el conocimiento de los estudiantes ayuda a los investigadores a considerar la riqueza de las situaciones y de los problemas de investigación. Asimismo, el primer paso para llegar a comprender un concepto matemático tiene que ver con la descomposición genética, descrita en la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala et al. (1996).

3. Metodología

Para diseñar los instrumentos utilizados, inicialmente se hizo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de Integral Definida lo que permitió determinar los elementos matemáticos que configuran este concepto matemático como: El área como aproximación (**ACA**), el área como límite de una suma (**ALS**), la integral Definida (**LID**), las propiedades de la integral definida (**PID**), y el teorema fundamental y del valor medio (**TFV**), desde los sistemas de representación gráfico (**G**), algebraico (**A**) y analítico (**AN**) y a partir de estos elementos matemáticos establecer una descomposición genética previa de dicho concepto. Posteriormente, se diseñó un precuestionario que fue analizado por expertos Españoles en Didáctica del Análisis Matemático y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos se hizo el cuestionario definitivo. Luego se diseñó una entrevista (Ginsburg et al., 1983) con el objetivo de obtener información para describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida de cada alumno. Finalmente, los alumnos realizaron un mapa conceptual, sobre el concepto de Integral Definida.

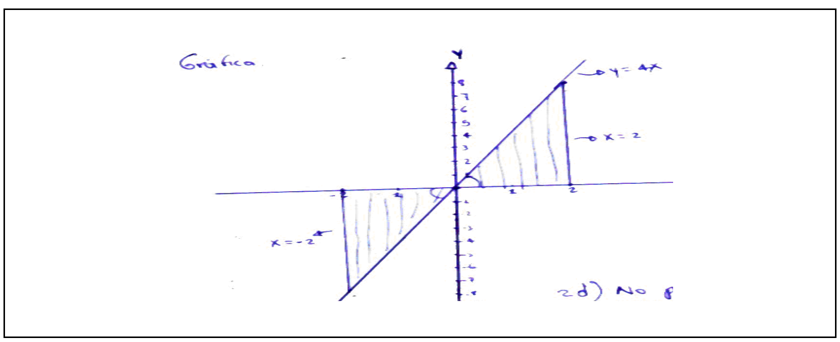
El análisis y los resultados que presentamos a continuación hacen parte de un estudio más amplio en el que participaron más alumnos, pero aquí presentamos sólo los resultados correspondientes a este alumno en particular quien alcanzó el nivel **TRANS** de desarrollo del esquema conceptual del concepto de Integral Definida.

4. Análisis de datos

Desde el marco teórico, consideramos que el desarrollo del esquema pasa por tres niveles, determinados por las relaciones lógicas que un sujeto es capaz de establecer y por el número de elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que utiliza en la resolución de las tareas. Así, en la tarea 2, el estudiante suele **usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta.**

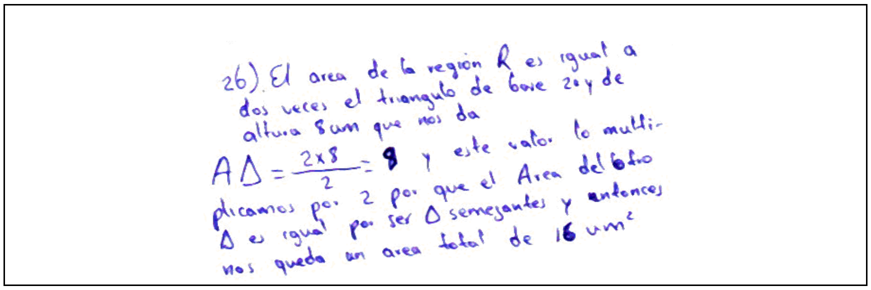
Sea ***R****, la región encerrada por el gráfico de la función* $f(x) = 4x$ *y el eje* x, *en el intervalo* $[-2, 2]$.
a. Dibujar la gráfica.
b. Calcular gráficamente el área de la región.
c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$

Este alumno representa de forma **G** la función:



A11, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Forman dos triángulos y por criterios de igualdad calcula el área de uno de ellos.


2b) El area de la región R es igual a dos veces el triangulo de base 2u y de altura 8um que nos da

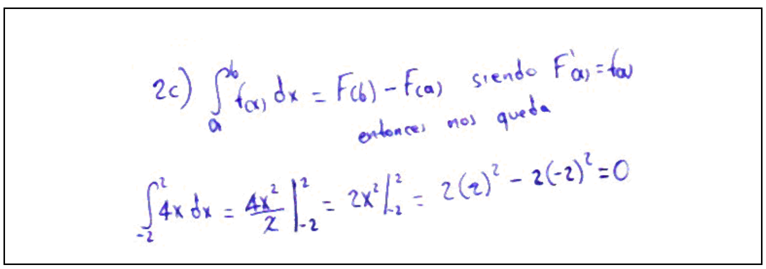
$A\Delta = \frac{2 \times 8}{2} = 8$ y este valor lo multiplicamos por 2 por que el Area del otro Δ es igual por ser Δ semejantes y entonces nos queda un area total de 16 um²

A11, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Coordina la representación **G** y **A** utilizando el elemento matemático **ACA** y por procedimientos geométricos obtiene el área total de 16 unidades cuadradas.

> *I: ¿Cómo obtuvo el área gráficamente?*
> *A11: Gráficamente, lo que hice fue tomar los 2 triángulos que me formaban la base igual a 2 y la altura recuerdo que es 8. En el primer triángulo la base es 2 por altura que es 8, 16 dividido 8 me daba 8 de área, dije que los triángulos eran semejantes, por criterio de Lado Ángulo Lado (L, A, L), por eso digo que las áreas son iguales, y el área total de 16 unidades cuadradas.*

En cuanto al cálculo de la integral, da la siguiente solución de forma **A**:


2c) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ siendo $F'(x) = f(x)$ entonces nos queda

$$\int_{-2}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2x^2\Big|_{-2}^{2} = 2(2)^2 - 2(-2)^2 = 0$$

A11, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Utiliza el elemento matemático **TFV** de forma **A** cuando aplica la regla de Barrow.

Cuando se le pregunta acerca de la diferencia entre los dos cálculos indica:

> *I: ¿Cuánto obtuvo de área y cuánto obtuvo al calcular la integral?*
> *A11: Cero. Porque resulta que no me piden calcular el área formada por la curva $y = 4x$ en el intervalo -2, 2, lo que me dicen es calcule la integral, entonces obviamente al calcular la integral me iba a dar un número, pero no me estaban preguntando que calculara el área formada por esa curva que era ya otra cosa muy distinta, por eso al calcular la integral me daba cero, pero como área no era cero.*

Ha establecido una relación de **conjunción lógica** entre los elementos matemáticos **ACA** y **LID** de forma **G** y **A** cuando distingue entre la integral definida y la integral como una aplicación al cálculo de áreas.

Asimismo, en la tarea 7b.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explica por qué o mostrar un contraejemplo.
7b. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Establece correctamente el valor de verdad de la proposición considerada:

> *I: ¿Cómo justifica el valor de verdad de la proposición?*
> *A11: Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f es continua, lo tomé como requisito, porque es el teorema de continuidad implica integrabilidad y es precisamente lo que dice la proposición que "si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$".*
> *I: ¿Qué valor de verdad le da a la proposición 7b?*
> *A11: Para mí es verdadera. Porque, por definición si la función es continua en un intervalo, eso garantiza que sea integrable en ese intervalo.*

Establece una **condicional lógica** con el elemento matemático **LID** de forma **AN** cuando considera la *condición suficiente que la continuidad implica integrabilidad.*

Además en la tarea 7c, establece la relación del **contrario de la condicional:**

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo.

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

A11: El problema ahí, seria que en ese intervalo la función no es continua.
I: ¿Por qué no es continua?
A11: Porque ella cuando x valga cero presenta una discontinuidad infinita, o sea ahí no tiene el requisito para poder aplicar la regla de Barro.
I: ¿Cuál requisito?
A11: Que la función sea continúa en el intervalo $[a, b]$, y esta función es discontinua en una parte del intervalo, pero si es integrable, es impropia.

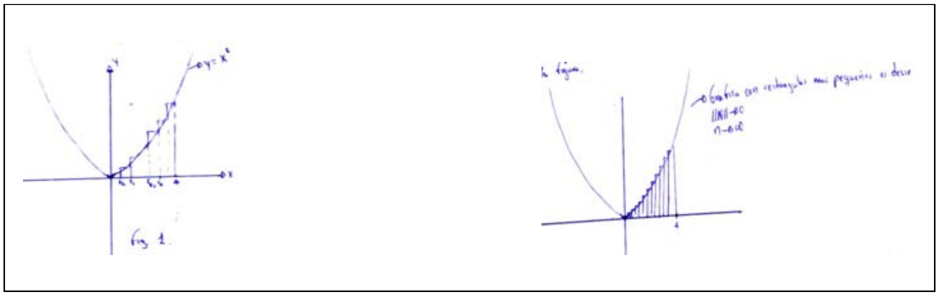
En este episodio se evidencia que justifica correctamente la tarea cuando dice que la función presenta una discontinuidad en una parte del intervalo y afirma que no cumple el requisito para poder aplicar la regla de Barrow aunque sí es integrable.

Asimismo este alumno muestra **recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar**

decisiones; y tener síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, por ejemplo en la tarea 3:

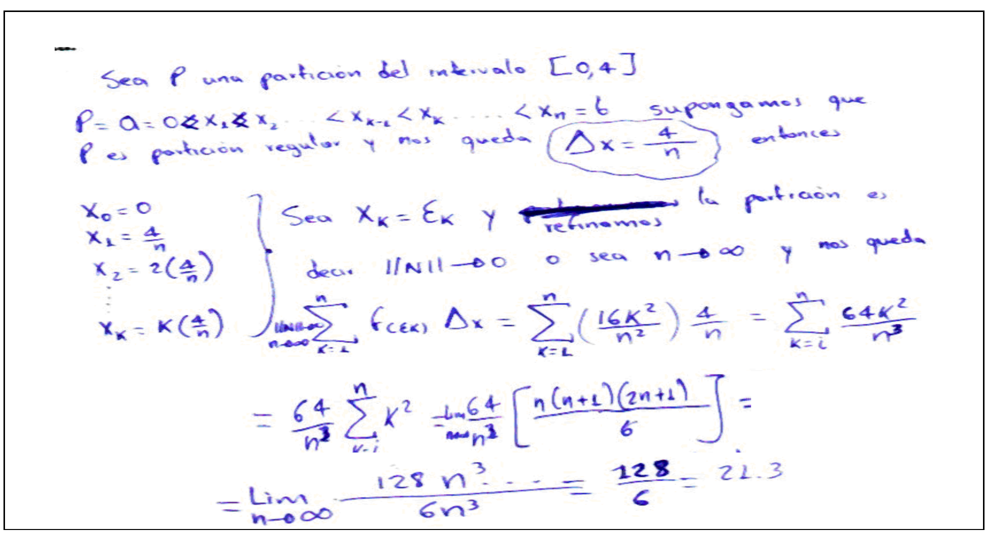
> *Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4]*
> *-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.*
> *-Justifica tu respuesta.*

Trata de rellenar el área por medio de rectángulos de forma **G**:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular, utilizando el elemento matemático **ACA** de forma **G**. En la figura de la izquierda traza 5 rectángulos superiores y en la de la derecha traza rectángulos superiores para aproximar el área, afirmando que "*la gráfica representa rectángulos más pequeños y la norma de la partición tiende a cero, entonces n tiende a infinito*" por lo que se podría deducir que tiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura de la derecha. Luego resuelve la tarea de la siguiente forma:



Sea P una particion del intervalo [0,4]

$P = a = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = 6$ supongamos que P es particion regular y nos queda $\Delta x = \frac{4}{n}$ entonces

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{4}{n}$

$x_2 = 2\left(\frac{4}{n}\right)$

$\vdots$

$x_k = k\left(\frac{4}{n}\right)$

Sea $x_k = \varepsilon_k$ y refinamos la particion es decir $\|N\| \to 0$ o sea $n \to \infty$ y nos queda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2}\right)\frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{64k^2}{n^3}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \; \lim \frac{64}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{128\,n^3 \ldots}{6n^3} = \frac{128}{6} = 21.3$$

A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

Establece una relación entre la representación **G** y los sistemas de representación **A** y **AN** entre los elementos matemáticos **ACA** y **ALS** porque, a partir de las gráficas anteriores, calcula las sumas de Riemann y les aplica el límite para obtener el área.

> *I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?*
> *A11:Me dicen que utilice particiones, entiendo por partición coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1, x_2 y que todos estos valores eran mayores que "a", que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionar, hice una partición regular. Después aplique la definición de integral definida y la suma de Riemann.*
> *I: ¿Qué es una suma de Riemann?*
> *A11: La suma de Riemann, se define o entiendo que es particionar y sumar las áreas que se forman en unos rectangulitos al tomar todas esas áreas, eso es una suma de Riemann y el límite es cuando hago que esa longitud de cada intervalo sea cada vez más pequeña y tienda a cero, es lo que llamamos integral definida.*

A partir del esquema general de aproximación utiliza las sumas de Riemann y les aplica el límite para luego establecer conexión con el elemento matemático la **LID**.

> *A11: Lo que hice aquí fue aplicar la definición matemáticamente de la integral definida, que se define como el límite de una suma de Riemann, ahí lo escribí y cogía la función y tomaba un ε_k cualquiera, quien era ese ε_k, era cualquier punto que estaba en cualquier intervalo, en cualquier parte del intervalo lo que hacía era coger ese punto que lo llame ε_k y lo evalué en la función y lo multiplique por la altura, de cada rectángulo, que en ese caso lo llame Δ_x y al hacer esa suma obtuve el valor de la integral.*
> *I: ¿Qué valor obtuvo?*
> *A11: Acá obtuve 21, 3, me dio positivo.*

Establece relación entre los elementos **ACA** y **LID** porque menciona el concepto de área como una aproximación y el concepto de área como una Integral Definida, y muestra una concepción de la integral definida de forma analítica asociada con el elemento matemático **ALS.**

5. Conclusiones

De manera global, por la forma como resolvió las tareas a lo largo de todo el cuestionario, y el modo de justificar las respuestas en la entrevista, podemos afirmar que este alumno establece diferentes relaciones lógicas (conjunción, condicional y la contraria del condicional) de forma correcta entre elementos matemáticos **ACA**, **ALS**, **LID**, **PID** y **TFV** generalmente entre los diferentes sistemas de representación. **G**, **A** y **AN**; recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones; muestra tener síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, y no se aprecian concepciones erróneas en el desarrollo de las tareas. Por tanto consideramos que se encuentra en el nivel **trans** de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida.

Referencias bibliográficas

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.J.; Dubinsky, E.; Mathews, D ;Thomas, K. (1996). A framework for research and development in ungraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education,* 2, 1 – 32**.**

Baker, B.; Coolí, L.; Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education***,** 31(5), 557 – 578.

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales.* Tesis de Maestría. Universitat Autónoma de Barcelona

Camacho, M., R. Depool y G. Sabrina (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática,* 20(3), 32-57.

Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, V.; Vidakovic, D. (2001). El Concept of definite integral: coordination of two schemas *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education,* 12 – 17.

Depool, R. A. (2004). *La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & State University. Milledgeville. http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html.*

[Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dubinsky, E.; Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, Vrunda.; Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. *College Mathematics Journal*. 32 (2), 99-109.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2002a). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.*, 3 (1), 47 – 70.

Dubinsky, E.; MacDonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (eds.). *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7* Dordrecht: Kluwer Academia Publisher, 273-280.

Ginsburg, H. P.; Kossan, N. E.; Schwartz, R. & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking**.** In H. P. Ginsburg (ed.): *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education. Proceedings, ICME 5. Working group reports and collected papers*, Nottingham: Shell Center, 170-172

Orton, A. (1983). Students` Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 1 – 18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 337-344.

Piaget, J; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Rasslan, S.; TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept.

Proceedings of the 26th PME. 4, 89-96.

Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, Tesis Doctoral. Universitat De València.

Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p. 65 – 81.

Volver al índice
Comunicaciones Breves