Relato de Experiência

De Uma Relação Matemática a Uma Reflexão Sobre Ensino de Equações[3]

Eliane Matesco Cristovão[4]

Resumo
Nesta narrativa apresento um episódio de aula que me instigou a pensar na relação entre a hierarquia das operações numa expressão numérica e a hierarquia das operações no processo de resolução de equações, pela ideia da inversa. Analiso, ainda, os desdobramentos que a discussão desse episódio gerou no grupo de estudos do qual participo na Unicamp, levando-me a repensar concepções sobre o ensino de equações. .
Palavras-chave: Expressão numérica; Ensino de equações.

Introdução

A reflexão sobre um episódio de sala de aula a respeito da resolução de uma equação do 1º grau motivou-me a escrever uma pequena narrativa que compartilhei com o Grupo de Sábado (GdS). Entretanto, após a leitura e a discussão no grupo, aquela pequena narrativa deu lugar a esta, na qual apresento não apenas a relação que estabeleci ao refletir sobre o episódio, mas também as múltiplas reflexões sobre o ensino de equações que o grupo me incentivou a fazer.

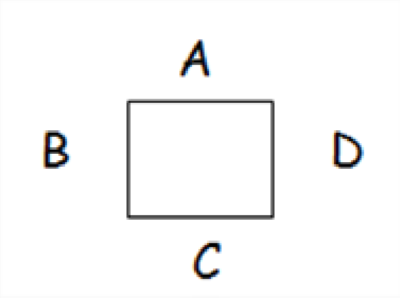
Contextualizando o episódio de aula

Em 2007, fui professora parceira de uma pesquisa de mestrado que tinha como foco de estudo os processos de argumentação desencadeados por tarefas investigativas. Numa quarta-feira, em abril desse mesmo ano, a pesquisadora e eu estávamos aplicando a primeira tarefa proposta para duas de minhas turmas de 6ª série (7º ano), de um colégio particular, da cidade de Americana. Após apresentar aos alunos a pesquisadora e a proposta de trabalho, intitulada “Projeto: Investigações Matemáticas”, eu comentei alguns aspectos da avaliação com os alunos e apresentei a tarefa das mesas, reproduzida a seguir, solicitando que se organizassem em grupos para trabalhar.

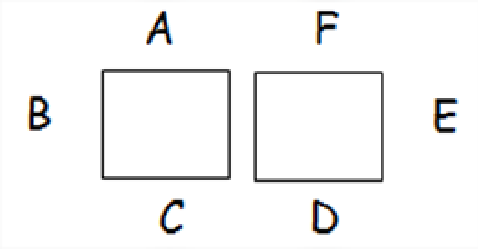
[3]Uma versão original deste trabalho foi publicada em CARVALHO, D. L.; LONGO, C.A.C.; FIORENTINI, D. [Orgs.] **Análises narrativas de aulas de matemática.**São Carlos: Pedro & João Editores, 2013.
[4]GdS/PRAPEM/Unicamp. E-mail: limatesco@yahoo.com.br

A LANCHONETE DO ALAN XONETE (tarefa criada pelo Prof. Adilson Roveran)

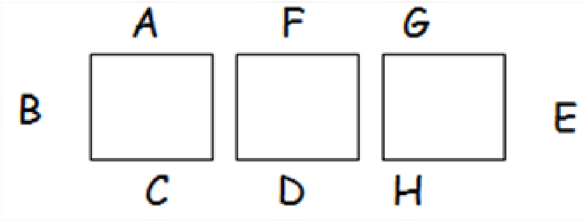
Sexta feira passada, após a aula, quatro amigos - Aderbal, Belinda, Crisóstomo e Dráusio - foram comer umas pizzas e tomar um guaraná na lanchonete do Alan Xonete. Lá chegando, o garçom Edgar Som já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:



A conversa ia animada, quando chegaram Eliziário e Flausino. Edgar apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição:



Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando, e logo chegaram Griselda e Hortênsia. Nosso amigo Edgar Som correu a colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao FalcoZinheiro, o cozinheiro, para preparar mais duas pizzas. Veja a nova disposição das mesas:



a) A turma esperava mais companheiros e logo chegaram Izilda e Jocasta; e mais uma mesa foi colocada. Faça o desenho, representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

b) Desenhe a representação das mesas quando chegaram Kreiton e Lisaldo.
c) Se forem colocadas 6, 7, 8, 9... mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando-se a mesma disposição?

d) E se forem colocadas 100 mesas?

e) E se forem colocadas n mesas? Teste a regra que você inventou para 15 mesas e 18 mesas.

f) Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 30 pessoas? E para acomodar 50 pessoas?

g) Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Durante o trabalho nos grupos, as diversas formas de compreender os problemas explorados pela tarefa promoveram o aparecimento de diferentes representações algébricas, que contribuíram muito para o envolvimento dos alunos e me permitiram ressignificar minhas próprias concepções sobre os métodos de resolução de equações.

Buscando encontrar o número necessário de mesas para acomodar 50 pessoas, um dos grupos, que já havia construído uma "regra" para encontrar o número de pessoas a partir do número de mesas (2n+2), tentou fazer o caminho inverso, e pensou da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} 50 & 2 \\ \hline 0 & 25 \end{array}} \qquad \begin{array}{r} 2\ 5 \\ -\quad 2 \\ \hline 2\ 3 \end{array}$$

Porém, ao testarem a resposta obtida, os integrantes do grupo percebiam que ela estava incorreta, pois, 23 . 2 + 2 = 46 + 2 = 48 pessoas.

Em meio à agitação da turma — não acostumada a trabalhar com tarefas e atividades investigativas —, envolvida com as diversas representações algébricas que os alunos utilizaram para demonstrar os problemas, não dei conta de encontrar, tão automaticamente como a situação exigia, um modo de explicar matematicamente e de forma compreensível para eles por que a forma como eles invertiam as operações, naquela situação, não levava à resposta correta.

Optei, então, por utilizar o contexto "físico" do problema (envolvendo mesas e pessoas) como um suporte para minha discussão com os alunos (veja Figura 1).

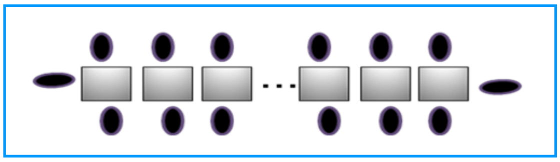


Figura 1: Representação da distribuição das mesas e pessoas.
Fonte: Imagem sugerida por Fernando L. P. Fernandes.

A partir do raciocínio concreto dos alunos, relacionado à situação, tentei explicar como poderíamos chegar à resposta correta.

Verifiquei que os alunos sabiam que, na operação $\begin{array}{l|l} 50 & 2 \\ \hline 0 & 25 \end{array}$, o 25 representava o número de mesas; e que, na operação $\begin{array}{r} 2\ 5 \\ -\quad 2 \\ \hline 2\ 3 \end{array}$, o 2 representava o número de pessoas das pontas.

Perguntei se poderiam subtrair pessoas de mesas, e eles concordaram que isso não era possível. Como eles ainda se mostravam confusos, lancei mão de mais uma pergunta:

- Se vocês querem descontar estas duas pessoas (Figura 1), que são aquelas que se sentarão nas pontas, quantas mesas precisam tirar? Eles perceberam, então, que bastaria tirar uma mesa e, aí sim, chegariam ao resultado que esperavam encontrar.

$$\boxed{\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 25 \end{array}} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ -\ 1 \\ \hline 24 \end{array} \rightarrow \text{1 mesa = 2 pessoas}$$

Tirando a prova: 24 * 2 + 2 = 50

Pessoas das pontas

A discussão os ajudou a chegar a um consenso, mas não foi suficiente para esclarecer minha própria dúvida: como explicar para eles, matematicamente, *por que* o raciocínio inicial deles levava a uma resposta incorreta, já que estavam utilizando a operação inversa?

Como explicar para eles por que, na equação $2n + 2 = 50$, primeiro teríamos que subtrair 2, para depois dividir por dois? A ideia deles era utilizar a operação inversa, mas eles decidiram primeiro inverter a multiplicação e depois a adição. Como explicar por que essa ordem interferia no resultado?

Posteriormente, conversando sobre esta dúvida com a pesquisadora, resgatamos o raciocínio utilizado por outro grupo, cujos alunos explicavam da seguinte forma os cálculos realizados para a mesma questão: 50 pessoas – 6 pessoas (que sentam nas mesas das pontas) resultam em 44 pessoas. Esse resultado, dividido por 2, resulta em 22 mesas. Juntando com as 2 mesas das pontas, seriam 24.

A partir desta conversa, cheguei a pensar se não teria sido melhor deixar para esclarecer a dúvida apresentada pelos alunos no momento das socializações, estabelecendo, então, uma comparação entre a lógica deles e a que este outro grupo utilizava. Entretanto, me convenci de que ter optado por utilizar o contexto, no momento em que a dúvida surgiu, havia sido a melhor opção. Certamente, a comparação com outro grupo, em um momento em que a dúvida não estaria mais associada ao contexto, pouca significação traria aos alunos.

Porém, esse movimento, gerado pela explicação contextualizada e pela reflexão posterior, me fez perceber uma relação sobre a qual nunca havia pensado. Essa relação valeria a pena ser explicada, pois justificaria, para ambos os grupos, por que se deveria respeitar uma hierarquia na inversão das operações para resolver uma equação.

Embora possa parecer algo muito simples, tal relação era totalmente nova para mim: falo da relação entre a *hierarquia das operações nas expressões numé-*

ricas e a hierarquia das operações nas equações: elas são opostas!

Embora essa relação simples pareça óbvia, eu nunca havia pensado nela ou a explicitado aos meus alunos! Retomando os dois episódios, com o cuidado de relacionar cada um com o contexto "físico" pensado por cada grupo, expliquei a eles que o caminho a ser percorrido na inversão das operações era o contrário daquele a ser percorrido quando resolviam uma expressão numérica, pois era como se estivessem fazendo o caminho de volta. Comparando os dois contextos matemáticos (o de uma expressão matemática sem igualdade e o de uma equação), conforme Quadro 1, a seguir, é possível perceber uma inversão na ordem ou na hierarquia no uso das operações, principalmente quando se utiliza o processo da operação inversa para a resolução de equações. Minha intenção, com esta comparação, não era "criar" uma regra a mais a ser aplicada à resolução de equações pela operação inversa. Pretendia apenas que eles percebessem e associassem a ideia da operação inversa com algo que já conheciam, que era a ordem ou hierarquia das operações que utilizamos para resolver expressões numéricas.

Ordem ou hierarquia das operações na resolução de expressões matemáticas	**Ordem ou hierarquia das operações na resolução de equações, pela ideia da inversa.**
Potências ou raízes (na ordem em que aparecem)	Adições ou subtrações (na ordem em que aparecem)
Multiplicações ou divisões (na ordem em que aparecem)	Multiplicações ou divisões (na ordem em que aparecem)
Adições ou subtrações (na ordem em que aparecem)	Potências ou raízes (na ordem em que aparecem)

Quadro 1: Comparação das hierarquias.
Fonte: Elaborado pela autora.

Rapidamente eles perceberam que, se tiverem uma multiplicação e uma adição, primeiro deverão inverter a adição, como fez o grupo que excluía as 6 pessoas das pontas das mesas, e depois a multiplicação, como fez esse mesmo grupo, ao dividir o número de pessoas por 2 para calcular a quantidade de mesas. Outras argumentações surgiram, cada um defendendo seu modo de ver o problema como melhor, mas todos entenderam a "ordem invertida para a resolução de equações".

Ao me apoiar no contexto físico do problema, pude respeitar o raciocínio dos alunos no momento da intervenção. E, mais tarde, tive argumentos para explicar-lhes por que deixar a divisão para depois da soma ou subtração numa equação. A experiência de perceber relações matemáticas, a partir dos questionamentos de meus alunos de 6ª série (7º ano), foi muito interessante e permitiu ainda que eu pudesse (re)significar minha crença de que o uso da ideia da balança para ensinar equações era "o melhor". Pudemos conversar sobre a importância de observar as operações presentes na equação para decidir o melhor caminho a seguir. Portanto, acredito que eles tenham conseguido compreender que resolver uma equação pela ideia da inversa não se limita a "passar para o outro lado e trocar o sinal".

Os efeitos da discussão colaborativa da narrativa

Com muitas reflexões em mente, escrevi uma primeira versão da narrativa e levei para o GdS. No grupo, muitas dessas reflexões foram aprofundadas e outras surgiram. Eu havia concluído que, apesar de sua importância para ajudar os alunos a compreenderem as propriedades da igualdade, o trabalho com a ideia da balança não era o único caminho a ser explorado.

Juntos, percebemos que a analogia da balança é importante, mas não é suficiente, pois pode limitar o pensamento dos alunos a contextos físicos que só trabalham com valores positivos. Esse tipo de contexto pode tornar-se um obstáculo didático, quando a situação exigir, por exemplo, que se trabalhe com valores negativos nos dois membros de uma equação. Alunos que só resolveram situações concretas envolvendo pesos podem apresentar dificuldades para atribuir significado e, até mesmo, para resolver equações cujos valores desconhecidos sejam negativos. Embora a tarefa proposta (das mesas) também não explore um contexto em que os números negativos aparecem, sua associação com a ideia da inversa não cria esses obstáculos quando os alunos forem trabalhar com situações em que esses números apareçam. Entretanto, pode criar outros entraves, como, por exemplo, o fato de os alunos interpretarem o segundo membro da equação como resultado de uma operação, ao invés de pensarem na igualdade como equivalência entre os dois membros. Por isso é importante explorar as diferentes ideias e contextos.

Além disso, o professor Dario me fez pensar sobre outra possibilidade: trabalhar com a ideia da balança, com significado, mas sem associar a uma balança física, na qual a igualdade assume o significado de que um lado pesa tanto quanto o outro. Podemos, em lugar disso, pensar em uma balança algébrica, na qual a igualdade assume o significado de que um lado da igualdade vale tanto quanto o outro. Ou seja, a balança algébrica retoma os princípios da igualdade como equivalência numérica ou algébrica, sem limitar o pensamento do aluno aos pesos.

Vamos supor que, após o trabalho com operações inversas, o professor apresentasse aos seus alunos a situação: O triplo de um valor em reais, somado com 100 reais, resultaria em 10 reais. A esta situação podemos associar a equação: 3x + 100 = 10. Pela inversa, teríamos: **3x = 10 – 100=> 3x = -90 => x = -90/3 => x = -30**.

Ou seja, o valor é de – 30 reais, isto é, uma dívida de trinta reais. Conferindo com a situação, temos: três dívidas de 30 reais, somadas com cem reais, resultam em um troco de 10 reais. Perfeitamente compreensível, pela ideia da inversa. Mas impossível de associar com uma balança de pesos, não é mesmo? Porém, possível de associar a uma balança algébrica, em que a igualdade assume o significado de equivalência.

Eu acreditava que fosse mais significativo ensinar equações aos meus alunos pela ideia da balança. Depois desse episódio e das reflexões que dele decorreram, passei a valorizar também a ideia da inversa, talvez por ter atribuído mais sentido a ela — assim como parte de meus alunos que optou por explicar seus raciocínios por meio dessa ideia —, mas, principalmente, por perceber que ela surgiu de forma natural para os alunos, num problema de contexto físico. Da mesma forma, numa situação de pesos, poderia ter surgido a ideia de pensar numa balança de dois pratos, de onde retiramos pesos dos dois lados ou dividimos esses pesos em partes iguais.

Refletindo com o grupo, percebi o quanto o ensino de equações é complexo para o aluno. Percebi também que a passagem de uma ideia para a outra (balança e inversa) não é tão simples, porque contextos diferentes exigem raciocínios diferentes. Além disso, precisamos ter consciência de que o "nó" da questão não é apenas operacional (erros que se originam a partir de um tratamento sintático das expressões algébricas) nem se reduz à limitação ou à facilitação física da situação. É, principalmente, uma questão de significação ou interpretação (semântica relacionada à sintaxe) que os alunos fazem da representação matemática (modelos matemáticos), em relação à realidade (situação-problema).

Apoiados em Socas *et al* (1996), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) afirmam que a linguagem matemática escrita opera em dois níveis. O primeiro nível seria o *semântico*, no qual as notações e os símbolos matemáticos são tratados com significados claros e relativamente precisos, guardando, assim, alguma semelhança com a linguagem retórica ou ordinária. O segundo seria o nível *sintático*, no qual as regras e os procedimentos podem ser operados sem referência direta a seus significados. Assim, priorizar, na prática escolar, apenas um desses níveis pode representar perda do poder matemático para os alunos.

É importante partir de diferentes contextos físicos e deixar os alunos fazerem as relações que lhes parecem mais plausíveis para, a partir delas, explicar as diferentes ideias que podem ser utilizadas na resolução de equações. Se a ideia da inversa aparecer, será preciso explicar que a ordem das operações está relacionada com o contexto e, consequentemente, estabelece uma relação com a ordem das operações que resolvemos em uma expressão numérica. Se a ideia da balança aparecer, será necessário esclarecer que ela extrapola o contexto físico, podendo ser associada com situações em que o que vale não é retirar pesos iguais dos dois lados, mas respeitar as propriedades da igualdade.

Referências

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO*: Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. **Anais...** Lisboa, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm. Acesso em: 29, nov., 2012.

SOCAS, M.M. et al. (1996). **Iniciaciónal Álgebra**. Madrid: Editorial Síntesis.