ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-9

Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas

Uldarico Malaspina Jurado

1. Problema

Silvia dibuja un triángulo cuyos vértices están en el borde de una región rectangular de 7 cm de largo y 4 cm de ancho. ¿Es verdad que cualquiera que sea tal triángulo que dibuje Silvia, siempre es posible dibujar otro triángulo con la misma área y con vértices también en el borde de la región rectangular?[1]

Este problema fue creado con base en trabajos colaborativos, realizados en un taller sobre creación y resolución de problemas, desarrollado virtualmente en la región Tumbes, como parte de un programa de formación docente de la Academia Nacional de Ciencias del Perú.

Presento el problema, una solución y algunas variaciones del mismo. La intención es estimular el pensamiento geométrico – en el entorno matemático de las áreas y perímetros de regiones planas – más allá de aplicaciones mecánicas de fórmulas. El problema tiene su origen en las indagaciones didáctico-matemáticas realizadas en un taller con 40 profesores de primaria. En talleres como este, se sigue una secuencia que parte de una situación y se desarrollan creando actividades, preguntas y problemas, que finalmente se discuten.

Antes de detenerme en el problema, y como una manera de compartir la experiencia didáctica desarrollada con los profesores, a continuación, mostraré y comentaré detalles de la secuencia seguida en el taller. Por una parte, mostraré los pedidos hechos a los profesores participantes, mediante una ficha de trabajo, entregada con anterioridad a la sesión de trabajo, para un primer avance individual; y por otra, mostraré algunas de las actividades, preguntas y problemas creados colaborativamente por los participantes y discutidos en los trabajos grupales o en la puesta en común en la reunión plenaria, con participación de todos los grupos. El taller se desarrolló virtualmente, usando una plataforma informática, y en el equipo docente me acompañaron los colegas Maritza León, Enrique Pïñeyro, Max Ponce y

[1] Por simplicidad, usaré expresiones como “área del triángulo”, “área del rectángulo”, etc., pero debe entenderse que me estoy refiriendo al área de la región triangular, al área de la región rectangular, etc.

Carlos Torres, con valiosas orientaciones a los grupos de participantes, aportes en la reunión plenaria y manejo de la plataforma.

Veremos cómo, partiendo de una situación sencilla, los profesores de primaria crean problemas que en las puestas en común se enriquecen didáctica y matemáticamente, mediante indagaciones y la creación de nuevos problemas. Consideramos que estas experiencias favorecen el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de los docentes.

La situación de la que se partió en el taller, fue la siguiente.

2. Situación

El profesor Arturo desea reforzar en sus estudiantes de primaria sus conocimientos sobre áreas de regiones planas y el uso de las coordenadas de puntos en el plano. Para ello dispone de una figura como la siguiente

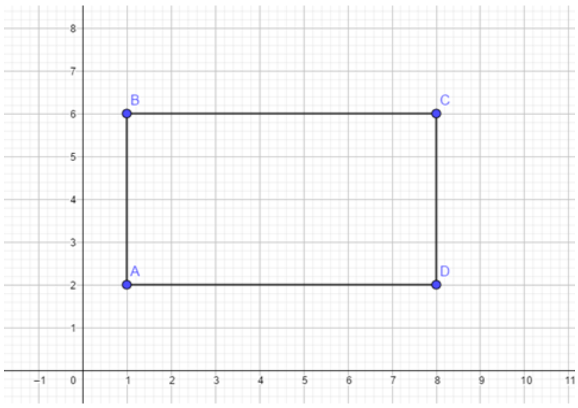

Figura 1

Arturo quiere pedir a sus estudiantes que dibujen algunas regiones planas contenidas en la región rectangular ABCD y que inventen y resuelvan algunos problemas relacionados con sus áreas o sus perímetros. Antes de hacerlo, Arturo piensa en posibles actividades y posibles problemas para sus estudiantes y así tener mejores elementos para orientarlos cuando trabaje con ellos.

Conociendo esta situación, los profesores participantes del taller debían crear actividades, preguntas y problemas, pensando en apoyar al profesor Arturo, según lo solicitado en la ficha.

3. Proponer actividades

Escribir brevemente una o más actividades, que ustedes, como grupo, sugerirían a estudiantes de primaria (tengan en cuenta el grado que elijan), para afianzar o profundizar sus conocimientos sobre áreas de figuras planas (también podrían incluir perímetros) o el uso de coordenadas de puntos en el plano. Pueden usar una hoja cuadriculada para esbozar sus actividades, un geoplano virtual (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/) o usando GeoGebra.

Como una orientación, en la ficha pusimos un ejemplo de tales actividades:

- Dibuja dos triángulos de modo que, en cada uno, dos de sus vértices sean los vértices del rectángulo ABCD y escribe las coordenadas de los vértices de los triángulos.

Los participantes entendieron y realizaron la actividad sugerida y propusieron otras, como las siguientes:

Actividad 1. Dibuja una figura geométrica dentro del rectángulo ABCD y escribe las coordenadas de sus vértices.

Actividad 2. Dibuja dos triángulos contenidos en el rectángulo ABCD, siendo dos de sus vértices los puntos A y D y su tercer vértice un punto cualquiera del lado BC.

Actividad 3. Marca 5 puntos dentro del rectángulo, escribe sus coordenadas y luego únelos para formar una figura geométrica.

Actividad 4. Dibuja en el rectángulo ABCD dos triángulos que tengan la misma área.

Actividad 5. Dibuja dos triángulos isósceles, con vértices en el rectángulo ABCD

5. Formular preguntas

Escribir una o más preguntas que ustedes harían a los estudiantes, o se plantearían ustedes mismos(as), relacionadas con la(s) actividad(es) que propusieron.

También, como una orientación, en la ficha dimos dos ejemplos de preguntas, relacionadas con la actividad que dimos como ejemplo:

a) ¿Cómo podrías hallar el área de uno de los triángulos que dibujaste, usando dos maneras distintas de hacerlo?

b) ¿Es verdad que el perímetro de cada uno de los triángulos que dibujaste es menor que el perímetro del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Para responder la pregunta (a) no percibieron con facilidad la posibilidad de hallar el área del triángulo dibujado, empleando diferencia de áreas. Así, en un caso como el de la Figura 2, hallaron fácilmente el área del triángulo AED multiplicando la longitud de la base AD (7 unidades) por la longitud de la altura, que coincide con el ancho del rectángulo (4 unidades) y dividiendo por 2. Así, el área del triángulo AED es 14 u^2. Tomó algún tiempo a los integrantes del grupo, advertir que tal área también puede encontrarse hallando el área del rectángulo ABCD y restando la suma de las áreas de los triángulos rectángulos ABE y ECD, como se muestra a continuación:

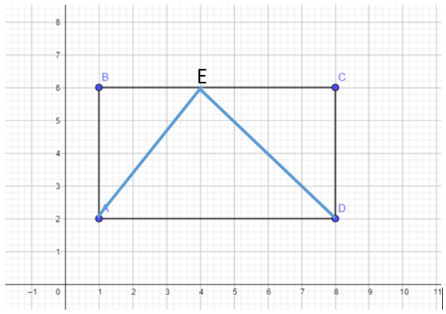

Figura 2

Área del rectángulo ABCD = 28 u^2

Área del triángulo ABE = 6 u^2

Área del triángulo ECD = 8 u^2.

En consecuencia, Área del triángulo AED = 28 u^2 – (6 u^2 + 8 u^2) = 14 u^2 .

Para responder a la pregunta (b) no hubo dificultad para que lo hagan afirmativamente, pero sí para encontrar una justificación más allá de lo evidente. Se les sugirió usar el hecho que en todo triángulo, siempre un lado tiene longitud menor que la suma de las longitudes de los otros lados. No se entró en formalizaciones, pero quedó claro intuitivamente, usando figuras específicas. (El lector puede hacerlo, usando, por ejemplo, el triángulo AED de la Figura 2)

Los participantes propusieron algunas preguntas como las siguientes, que corresponden a distintos grupos de trabajo:

Pregunta 1. ¿Es verdad que para hallar el área del rectángulo ABCD siempre se necesitará multiplicar las longitudes de la base y la altura? ¿o habrá otra manera de hallarla?

Pregunta 2. ¿Cuántos rectángulos podemos contar dentro del rectángulo ABCD?

Pregunta 3. ¿Cómo puedes hallar el área de cada figura geométrica que has dibujado en el rectángulo ABCD?

Pregunta 4. ¿Los triángulos que dibujaste en la Actividad 2 tienen la misma área?

Pregunta 5. ¿Cómo sabes que los triángulos que dibujaste son isósceles? (esta pregunta se refiere a la Actividad 5, propuesta por el mismo grupo)

Pregunta 6. Si los triángulos que dibujaste son de igual área, ¿serán también de igual perímetro?

Observemos que las preguntas, relacionadas con las actividades propuestas, son una forma de indagar, de suscitar discusiones y de ir creando problemas. Cabe mencionar que la Pregunta 1 pretendía inducir a los estudiantes a contar el número de cuadrados unitarios que encierra el rectángulo ABCD. La Pregunta 2 se derivó de la primera y llevó a la aclaración que todo cuadrado es también un rectángulo; así, ya se tenían, de partida, 28 rectángulos conformados, cada uno, por un solo cuadrado unitario. Una profesora participante acotó que una manera de contar más rectángulos, es considerando los conformados por 2 cuadrados unitarios, los conformados por 3 cuadrados unitarios, etc.

La Pregunta 3, fue motivada por la Actividad 3 y con la intención de inducir a la obtención de áreas de figuras que no son triángulos, usando la diferencia entre el área del rectángulo ABCD y la suma de las áreas de las regiones que quedan en el complemento (respecto a ABCD) de la figura dibujada. También estuvo presente la idea de contar los cuadrados unitarios dentro de la región, tratando de "componer" los "cuadrados partidos". La Actividad 3 induce a dibujar un pentágono (no necesariamente convexo) en la región rectangular y la Pregunta 3 se refiere al área de tal pentágono.

6. Crear un problema

A partir de la situación dada, de las actividades y de las preguntas hechas, crear un problema para los estudiantes de primaria y resolverlo.

Los participantes, en sus grupos de trabajo, crearon algunos problemas para sus estudiantes. Enunciaré los problemas creados por tres grupos. No son de mayor complejidad, pero los comentarios y sugerencias manifestados en la puesta en común, pusieron en evidencia la riqueza didáctica y matemática que se pueden derivar de los problemas creados.

Problema 1. Halla las áreas de los triángulos AED y AFD de la figura

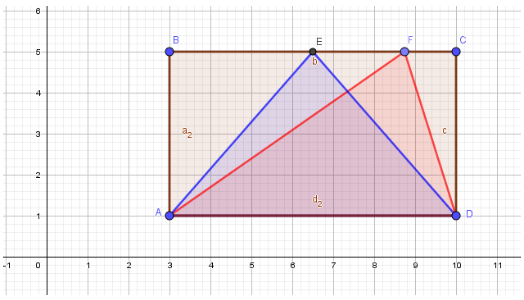

Figura 3

Problema 2. Halla el área de uno de los triángulos isósceles que dibujaste, contenido en el rectángulo ABCD.

El grupo presentó el caso que se muestra en la figura siguiente

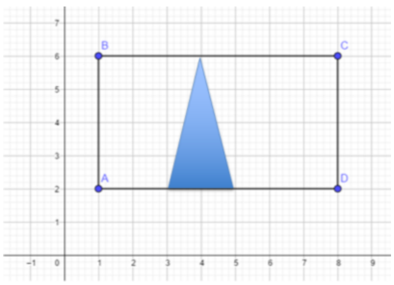

Figura 4

Problema 3. Halla el área de las regiones O, P y M que se muestran en la figura.

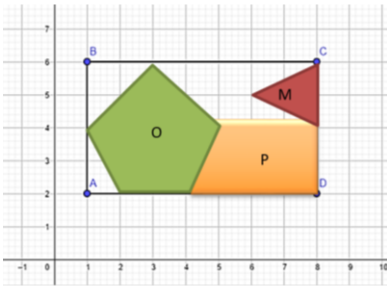

Figura 5

Como ya lo había adelantado, una fase muy importante de estos talleres es el análisis didáctico y matemático de los trabajos grupales, cuando estos se discuten internamente en cada grupo y cuando se exponen ante el pleno, que es la ocasión para hacer comentarios y sugerencias de los participantes integrantes de otros grupos y de los profesores monitores del equipo docente. Como consecuencia de este enriquecimiento matemático y didáctico, se crean también nuevos problemas a partir de los problemas expuestos, como veremos a continuación.:

Considerando la Actividad 2, la Pregunta 4 y el Problema 1, un profesor ilustró, usando GeoGebra, que todos los triángulos con vértices en A y D y el tercer vértice en el lado BC del rectángulo, tienen la misma área.

Algunas variaciones a partir del Problema 1:

- Examinar si existen triángulos rectángulos que tienen la misma área que el triángulo AED de la Figura 3.
- Examinar si todos los triángulos que tienen la misma área que el triángulo AED tienen también el mismo perímetro.

Para niños de primaria, el segundo problema tiene la complejidad de la aplicación del teorema de Pitágoras y del manejo de números irracionales, pero es fuente de indagación y análisis, que puede hacerse usando reglas o calculadoras, o aun haciendo marcas en el borde de una hoja de papel. Es importante advertir que "al desplazarse" el vértice E en el lado BC del rectángulo, uno de los lados del triángulo crece y el otro decrece. Notar que, al resolver el primer problema, se encuentra un caso interesante para hacer la comparación con el perímetro del triángulo AED.

En relación a los Problemas 2 y 3, los participantes hicieron indagaciones interesantes. Destaco la siguiente, a partir del Problema 2:

- ¿Cuántos triángulos isósceles de la misma área que el mostrado en la Figura 4 se pueden construir en el rectángulo ABCD?

Una primera idea ante esta variación del Problema 2, es usar traslaciones del triángulo mostrado en la Figura 4 y percibir intuitivamente que son infinitos los triángulos isósceles con la misma área que el mostrado. Sin embargo, la pregunta permite ir más allá y construir triángulos isósceles, de la misma área que el mostrado en la Figura 4, que no necesariamente sean congruentes con tal triángulo. Así, estamos ante tareas de construcción de triángulos isósceles, con área dada.

Algunas variaciones en relación al Problema 3:

- Halla el área de cada región mostrada, usando por lo menos dos formas diferentes.
- Halla el perímetro de cada una de las regiones mostradas.

Esta última variación tiene también la complejidad de usar el teorema de Pitágoras y números irracionales, que suele no trabajarse en educación primaria.

La propuesta en un grupo, que no se concretó en problema específico expuesto, fue modificar las formas de las regiones planas mostradas, de modo que sean como el plano de viviendas u otras construcciones sobre un terreno rectangular de 70 metros de largo por 40 metros de ancho, y encontrar las áreas de las partes mostradas en el plano de la construcción. Los participantes que hicieron esta propuesta, enfatizaron en la importancia de vincular los aprendizajes matemáticos con aspectos de la realidad, mediante problemas de contexto extra matemático.

Los problemas creados en el taller, tanto en los grupos como haciendo comentarios y sugerencias en el plenario, sobre todo los relacionados a los problemas 1 y 2, me llevaron a formular el problema con el que inicié este artículo, cuyo enunciado lo repito:

Silvia dibuja un triángulo cuyos vértices están en el borde de una región rectangular de 7 cm de largo y 4 cm de ancho. ¿Es verdad que cualquiera que sea tal triángulo que dibuje Silvia, siempre es posible dibujar otro triángulo con la misma área y con vértices también en el borde de la región rectangular?

No es difícil responder afirmativamente para casos como el que se muestra en la Figura 3, pues los triángulos AED y AFD tienen la misma área por tener ambos una base coincidente con el largo del rectángulo y la altura correspondiente coincidente con el ancho del rectángulo, pero en este problema se pregunta por cualquier triángulo cuyos vértices están en el borde del rectángulo, lo cual incluye casos como el siguiente

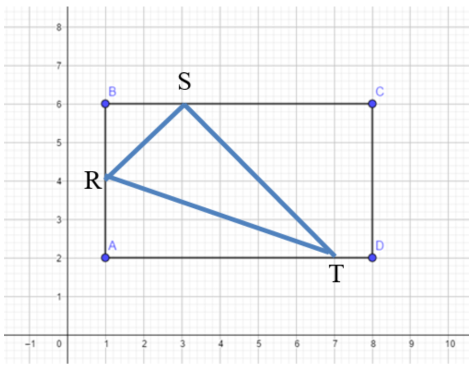

Figura 6

Ciertamente, hallar el área del triángulo RST no es tan sencillo como hallar el área de los triángulos de la Figura 3, y esto lleva a cuestionarse si para responder a la pregunta del problema, considerando el caso de la Figura 6, es necesario hallar el área del triángulo RST. Se llega a una respuesta negativa, observando que bastará construir otro triángulo cuyos lados tengan las mismas longitudes que los lados del triángulo RST. ¿Cómo lograrlo? La situación es muy propicia para que emerja o se use la construcción de un triángulo simétrico al triángulo RST, teniendo como eje de simetría cualquiera de los dos ejes de simetría que tiene el rectángulo ABCD (el vertical y el horizontal). Además, es de gran ayuda tener las figuras en una malla cuadriculada del plano cartesiano, aunque se podría prescindir de ella. En las Figuras 7 y 8, muestro los triángulos LMN y RFG que son simétricos al triángulo RST dado, respecto a los ejes de simetría del rectángulo, vertical y horizontal respectivamente, indicados con líneas de color negro.

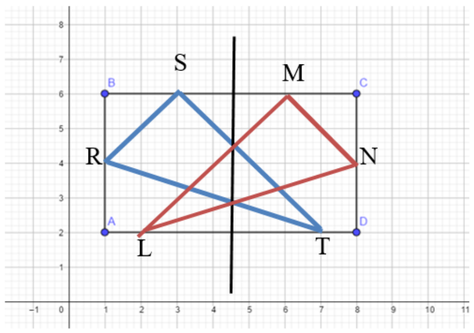

Figura 7

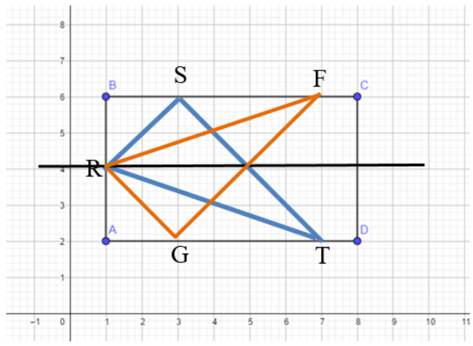

Figura 8

Cabe destacar que en este razonamiento están implícitas algunas proposiciones, como “los triángulos simétricos entre sí son congruentes” y “los triángulos congruentes entre sí tienen la misma área”. Proposiciones que pueden entenderse intuitivamente desde la educación primaria y demostrarse en la secundaria, según el grado en el que se encuentren los estudiantes. Además, el razonamiento sirve para considerar casos con un mayor grado de generalidad, al crear nuevos problemas a partir del problema dado, usando la pregunta *¿Qué pasaría si…?* Por ejemplo:

- ¿Qué pasaría si los vértices del triángulo que dibuja Silvia no están en los bordes del rectángulo?
- ¿Qué pasaría si consideramos otras figuras geométricas?

También, yendo más allá de la simetría usada, podemos preguntarnos

- ¿Qué pasaría si se pide que el nuevo triángulo tenga la misma área que el que dibujó Silvia, pero no el mismo perímetro?

Son nuevos problemas, en la perspectiva de estimular el pensamiento geométrico, más allá de cálculos aritméticos.

Comentarios

En los talleres que venimos desarrollando con profesores en servicio, partimos de una situación configurada con el propósito de trabajar integradamente determinado(s) contenido(s) matemáticos para un nivel académico específico (en este caso, áreas de figuras planas, perímetros y el uso de coordenadas cartesianas, en educación primaria). Pedimos a los profesores participantes que propongan actividades y preguntas relacionadas con la situación y que creen y resuelvan problemas suscitados en este trabajo. Hay una fase individual, otra colaborativa y una de indagaciones, comentarios y sugerencias en la sesión plenaria.

Las indagaciones que se hacen pueden llevar a problemas que requieren el uso de conocimientos matemáticos que van más allá de lo que se trata con los estudiantes en el nivel educativo específico, pero contribuyen a la formación matemática de los profesores, que deben tener una visión más amplia de los contenidos matemáticos que enseñan. Es muy importante el papel de los profesores monitores que integran el equipo docente.

Un aspecto significativo, destacado por los participantes en los talleres, es que esta forma de trabajo les hace vivir experiencias de aprendizaje reflexivo y creativo, que van más allá de la aplicación mecánica de fórmulas, y que se pueden replicar, con las adaptaciones del caso, en su desempeño docente.

Otro aspecto muy importante, observado en los talleres, es las emociones positivas que se generan en los participantes, tanto en la fase creativa como en los comentarios y sugerencias en el plenario. Son experiencias que contribuyen a tener muy en cuenta los aspectos emocionales, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los problemas creados y comentados en este taller son de contexto intra matemático, lo cual no significa que no se dé importancia a los de contexto extra matemático. Ya fue mencionado por un grupo de profesores, al comentar el Problema 3. Cabe destacar que es muy importante ser cuidadosos al crear tales problemas, para que sean relevantes y no se perciban como una contextualización forzada. Ciertamente, cuanto mayor sea la claridad conceptual en matemáticas, mejores problemas se podrán crear.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe