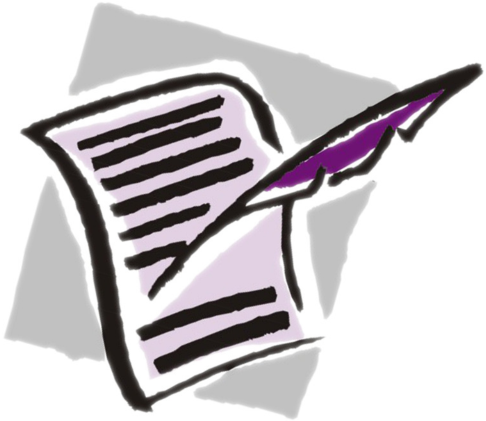
Artigo Teórico

Os Números Reais
Um Olhar Para as Definições e os Conceitos



Willian José da Cruz[20]

Resumo

Este trabalho faz parte dos resultados apresentados na pesquisa concluída em 2011, intitulada: "Os números reais: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio", para a obtenção do grau de mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Esta pesquisa é qualitativa e de caráter bibliográfico, a qual se baseou na descrição e na interpretação de textos das mais diversas classes, colaborando para uma interpretação pessoal do autor com relação aos dados pesquisados. Este artigo traz reflexões sobre o conjunto dos números reais, mostrando algumas definições e conceitos atribuídos a esse conjunto e tendo como proposta apresentar os números reais nas estruturas "algébrica e topológica". Busca-se desvelar aspectos do conjunto dos números reais que estão presentes nos livros didáticos e no trabalho do professor de matemática. É também uma tentativa de refletir sobre a relevância do conhecimento dos números reais para os professores e futuros professores nas licenciaturas em matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Análise Real, Números Reais, Licenciatura em Matemática, Formação de Professores**.**

Introdução

Este trabalho, realizado no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, concluído em 2011, tem o intuito de apresentar os números reais em suas estruturas "algébrica e topológica", cujo objetivo é convidar o professor, e/ou licenciando em matemática, a entender e a identificar na sua prática tal tratamento.

Outro objetivo a destacar é despertar no professor do ensino fundamental e do ensino médio um olhar, com maior clarividência, para o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades que estão presentes em sua sala de aula, ainda que o tratamento formal, em sua plenitude, possa não ser considerado.

Os números, de uma forma generalizada, constituem uma base para matemática. Na dinâmica do

[20]Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora e Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante Anhanguera e Professor das redes Pública e Privada de Barbacena—MG. E-mail: lukinha@barbacena.com.br

desenvolvimento da matemática escolar, os estudantes aprendem a lidar com as frações, os decimais e os números inteiros negativos mecanicamente. No ensino fundamental e no ensino médio, a introdução dos números reais é um tanto empírica e seu estudo não costuma ir além de algumas operações algébricas elementares, porém, para uma análise mais profunda desses tipos de números, deve-se retornar a elementos mais simples.

Em geral, os livros didáticos, como por exemplo, Dante (2009), p. 34-EF; Giovanni; Castrucci (2009), p. 29-EF; Dante (2009) p. 20-EM; Iezzi; Dolce; Degenszajn; Périgo (2007), p.14-EM definem o conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Nesta etapa de ensino, os números reais são apresentados, admitindo a existência de números não racionais, ou para dotar todos os pontos de uma reta ou para conceber qualquer decimal como número, em especial os não periódicos, não clarificando, em ambos os casos, a natureza do número.

De acordo com os parâmetros curriculares do ensino fundamental (BRASIL, 1998), os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados de forma dialética pelos alunos. Esses conhecimentos intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando suas propriedades, suas relações e o modo como se configuram historicamente.

Reconhecer números e operações perpassa pela compreensão dos significados de números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em diferentes contextos (BRASIL, 1998), ampliando sensivelmente para definição dos números reais.

Algumas pesquisas no âmbito da educação matemática têm apontando dificuldades na compreensão ou em alguns elementos semânticos na apresentação dos números reais, tanto na educação básica quanto no ensino superior. Autores como: Penteado, (2004); Dias, (2002); Moreira; David, (2005), são exemplos de trabalhos que vêm discutindo a problemática.

Neste artigo serão discutidas algumas concepções relacionadas ao conjunto dos números reais. Nesse aspecto, buscaremos o reconhecimento e a definição dos números reais, finalizando com a apresentação axiomática desse conjunto nas estruturas “algébrica e topológica”, convidando o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender e refletir sobre tais aspectos.

Os números reais uma história e algumas definições

Para um caminhar na direção de definir os números reais, eis a afirmação: o sistema de pontos racionais, embora denso sobre a reta, não cobre toda reta numérica. Em termos intuitivos, pode-se pensar em um processo paradoxal que um conjunto denso de pontos não cobre toda reta. Mas o que seria um conjunto denso? Um conjunto é dito denso se entre dois de seus elementos quaisquer existem uma infinidade de elementos do próprio conjunto (CARAÇA, 1951, P. 56). Os inteiros, por exemplo, não é um conjunto denso, visto que entre dois números inteiros consecutivos não existem elementos do mesmo conjunto.

Essa afirmação leva a considerar que existem pontos não racionais (os irracionais), mas que nada na intuição pode ajudar a enxergar pontos irracionais como distintos de racionais. Mas, afinal, o que são esses pontos ou números irracionais? “Os números irracionais estão ligados ao conceito mais difundindo de medidas que trata da incomensurabilidade” (CRUZ, 2011. p. 79).

Em termos históricos, a primeira evidência da necessidade de números irracionais ocorre com a ideia da incomensurabilidade. Os números conhecidos hoje como irracionais não existiam na matemática grega. Aristóteles associava a irracionalidade da raiz quadrada de dois à tentativa de escrever tal número como a razão de dois inteiros primos entre si (fração irredutível). Essas tentativas resultavam apenas aproximadas, suscetíveis de melhor aproximação, porém, nunca definitivas, o que levava à hipótese da possível não existência de tal número.

De acordo com Cruz (2011), no tempo de Pitágoras, aproximadamente no século VI a.C, pensava-se que, dados dois segmentos quaisquer (AB) e (CD), por exemplo, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento (EF), por exemplo, contido em um número inteiro de vezes no primeiro segmento (AB) e um número inteiro de vezes no segundo segmento (CD), dizendo, assim, que esse terceiro segmento (EF) era um submúltiplo comum dos dois segmentos anteriores.

Um progresso sensível na

operação de medir consistia na determinação de um submúltiplo comum à unidade previamente fixada e à grandeza a qual iria medir. A existência de tal submúltiplo garantiria a comensurabilidade das grandezas, ou seja, duas grandezas seriam comensuráveis quando existisse uma unidade, por menor que fosse, a qual caberia exatamente um número inteiro de vezes numa e noutra. Se duas grandezas, de mesma espécie, não admitissem um submúltiplo comum, por menor que fosse, então, elas seriam denominadas de incomensuráveis.

As descobertas de grandezas não comensuráveis, feitas pelos próprios pitagóricos, causaram uma das primeiras e grandes crises da matemática. Os matemáticos gregos acreditavam, em certo período da história, que medições de grandezas contínuas só poderiam ser concebidas de forma a expressar a razão entre dois números naturais. Os pitagóricos, ao perceberem que a diagonal do quadrado de lado 1 não poderia ser medida através de números racionais, se viram diante de um dilema, sendo deflagrada, naquele momento, a denominada crise dos incomensuráveis.

Os próprios gregos, porém, produziram soluções para essa crise, através da construção de soluções com régua e com compasso, possibilitando o que é usado até os dias atuais, a associação da representação geométrica de segmentos incomensuráveis e a representação Aritmética dos números irracionais.

A construção geométrica simples que mostra a relação entre a $\sqrt{2}$ e a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado é feita usando a régua e o compasso.

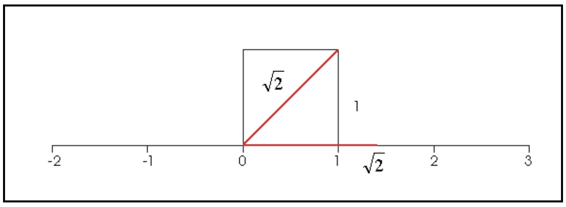


Figura 1: Número construtível.
Fonte: (CRUZ, 2011, p. 83).

Se este segmento é demarcado sobre a reta numérica, por meio de um compasso, então o ponto assim construído não pode coincidir com nenhum dos pontos racionais, logo se pode concluir que o conjunto de pontos racionais, embora denso, não cobre toda reta numérica, o que pode parecer estranho em termos intuitivos, mas a descoberta dos incomensuráveis instigou e ainda instiga filósofos e matemáticos, causando um efeito que, segundo Courant e Robbins (2000) é provocativo e especulativo na mente humana.

Os Pitagóricos não ampliaram a

noção de número, apesar desta descoberta genial. Para os geômetras gregos, a noção de número irracional não estava clara, mesmo usando em problemas práticos as aproximações racionais dos valores irracionais. Podemos exemplificar as aproximações para o número π (pi), método utilizado por Arquimedes que usou duas sequências de racionais, uma com termos superiores e outra com termos inferiores, distando pouco do número π.

O conceito do sistema numérico foi base para o grande avanço da matemática do século XVII, em particular da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral. Contudo, num período de reexame crítico de princípios e consolidação de resultados, os matemáticos perceberam que o conceito de números irracionais exigia uma análise mais precisa. Somente no século XIX é que a noção de números irracionais adquiriu um sentido rigoroso e formal, dado por Cantor e Dedekind sendo conhecido nos dias atuais por meio dos cortes de Dedekind.

Segundo Penteado (2004), a noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos em matemática, como no estudo de limites, continuidade, derivada e integral de funções de variáveis reais. Essa mesma autora aponta que as dificuldades dos alunos no ensino de limites e continuidade de funções são, muitas vezes, decorrentes da falta de compreensão do conjunto dos números reais.

Penteado (2004) aponta que estas dificuldades, foram identificadas nas concepções de que duas grandezas são sempre comensuráveis, nas propriedades válidas para os números racionais na reta numérica real, mesmo sem os números irracionais, a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos números reais, a equivalência entre diferentes representações de números reais e outras.

Dias (2002) aponta que existe uma confusão entre um número apresentado e suas diversas representações, na concepção da existência, por exemplo, de um número entre 0,333333.... e $\frac{1}{3}$.

Definindo os reais

Pode-se definir que todo número tem uma representação decimal infinita, entende-se que 1,2 = 1,2000..., por exemplo, sendo a segunda parte da igualdade, uma dízima de período zero. Logo, conclui-se que o sistema dos números reais ou contínuo numérico é a totalidade das decimais infinitas, sendo os racionais as dízimas periódicas e os irracionais as dízimas não periódicas (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 79). Esta definição será denotada neste artigo de experimental.

No ensino fundamental e no ensino médio, a introdução dos números reais é um tanto empírica e seu estudo não costuma ir além de algumas operações algébricas elementares. Neste mesmo nível de ensino, os números reais são apresentados, admitindo-se que a cada ponto da reta está associado a um número real. Há pontos que não correspondem a números racionais, o que é observável, usando a diagonal do quadrado de lado 1. Esses pontos sem abscissas racionais correspondem aos números chamados de irracionais.

Outra abordagem dada à introdução dos números reais é a demonstração de alguns casos, em que a representação decimal de um número racional é periódica, concluindo que número irracional, admitindo sua existência, é aquele o qual possui uma representação decimal não periódica. Essa definição converge para nossa definição experimental.

Nos livros didáticos de Dante (2009), p. 34-EF; Giovanni; Castrucci (2009), p. 29-EF; Dante (2009) p. 20-EM; Iezzi; Dolce; Degenszajn; Périgo (2007), p.14-EM, por exemplo, o conjunto dos números reais é definido como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, previamente construídos, sendo os racionais números que podem ou são escritos na forma fracionária e os irracionais os números que não podem ser representados por uma fração.

Nas abordagens dadas aos números reais, no ensino fundamental e no ensino médio, somos conduzidos a admitir a existência de números não racionais, ou para dotar todos os pontos de uma reta ou para conceber qualquer decimal como número, em especial os não periódicos. O que se percebe é que em ambos os casos não clarificam a natureza desses novos números.

É comum no ensino fundamental e no ensino médio definir números reais como a união entre os racionais e os irracionais, não esclarecendo o sentido de se conceber os números irracionais como números ou o significado que possa ter. Ressalta-se que, na construção dos números reais como corpos ordenados completos, prova-se a existência de reais que não são racionais, sendo esses, supremos de subconjuntos de reais não vazios e limitados superiormente.

Moreira e David (2005) criticam, em seu trabalho, o tratamento formal dado aos números reais na licenciatura, mostrando que essa forma de apresentar tais números não oferece alternativas para o tratamento dado aos mesmos, nos textos escolares, que é “legítimo, mesmo de forma inadequada”, esclarecem os autores. Esses mesmos autores consideram que uma forma possível de se trabalhar números irracionais seria através da incomensurabilidade, por meio das questões de medidas, permitindo discutir a insuficiência dos números racionais, podendo servir de base para uma abordagem que venha a ser mais compreensível e transparente para o educando.

Os números reais como corpo ordenado completo

Neste momento, será apresentada a forma como são abordados os conhecimentos de números reais para os professores e futuros professores nas licenciaturas em matemática. A apresentação axiomática dos números reais ocorre no intuito de possibilitar uma maior compreensão dessa linguagem formal, para permitir o abarcamento, se possível, de novos horizontes, na dinâmica de apresentar, definir e redescobrir os números reais.

Um conjunto no qual estão definidas e fixadas duas operações binárias, denotadas por *“+”* e *“.”*, as quais são chamadas de adição e multiplicação respectivamente, gozando dos axiomas seguintes, é chamado de corpo, denotado neste artigo por K.

Os axiomas da adição:

Axioma 1A. A adição é uma operação comutativa no corpo K, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K, verifica-se a igualdade:

$$x + y = y + x$$

Axioma 2A. A adição é associativa, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x,y e z de K:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Axioma 3A. A adição tem um único elemento neutro, ou seja, para a adição, existe um único elemento m , pertencente a K, tal que qualquer que seja x pertencente a K.

$$x + m = m + x = x$$

Note que: $m = 0$

Axioma 4A. Todo elemento de K tem simétrico, isto é, qualquer que seja $x \in$ K, existe pelo menos um y de K, tal que:

$$x + y = y + x = m$$

Note que: $y = - x$

Os axiomas da multiplicação

Axioma 1M. A multiplicação é uma operação comutativa no corpo K, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K, verifica-se a igualdade:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2M. A multiplicação é associativa, isto é, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axioma 3M. A multiplicação tem um único elemento neutro diferente de zero, ou seja, para a multiplicação, existe um único elemento a diferente de zero, pertencente a K, tal que qualquer que seja x pertencente a K:

$$x \cdot \alpha = \alpha \cdot x = x$$

Note que: $\propto = 1$

Axioma 4M. Todo elemento K, distinto de zero, tem inverso, ou seja, qualquer que seja $x \in$ K, com , $x \neq 0$ existe pelo menos um $\gamma \neq 0$ tal que:

$$x \cdot \gamma = \gamma \cdot x = \alpha$$

Note que: $\gamma = x^{-1}$

A distributividade: uma relação entre a adição e a multiplicação

Axioma D. O encontro das duas operações, adição e multiplicação, acontece nesse axioma e é comumente chamado de propriedade distributiva, ou seja, a multiplicação é distributiva a respeito da adição: quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

O conjunto Q dos números racionais com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$ (adição) e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}$ (multiplicação) é um exemplo de corpo. (ver, CRUZ, 2011, p. 58).

Corpo ordenado

Um corpo K será dito ordenado se neste corpo está destacado ou fixado um subconjunto P, chamado de conjunto dos elementos positivos de K, que satisfaz as seguintes condições:

1ª – Se a e b pertencem a P, então $a + b$ pertence a P, ou seja, se dois elementos do corpo K são positivos, a soma deles também é um elemento positivo.

2ª – Se a e b pertencem a P, então $a \,.\, b$ pertence a P, ou seja, o produto de dois elementos do corpo K positivos é um elemento de K positivo.

3º - Se *a* pertence a K, então verifica uma, e somente uma das seguintes propriedades

$a \in$ P ou, $a = 0$, ou $-a \in P$

A terceira condição também é conhecida como propriedade da tricotomia. Esta terceira condição implica que o conjunto M = $\{-a;\ a \in$ P$\}$ o qual é denominado conjunto dos elementos do corpo ordenado K negativos, não tem elementos comuns com o P. Desta forma, pode-se concluir que o conjunto K é a união dos três conjuntos disjuntos, P, {0} e M.

Pode-se destacar que se um elemento $a \in$ P, então $a > 0$ e se $-ea \in P$ então $a < 0$. Observe que um número é positivo, se e somente se, pertence ao conjunto $P \subset K$. Outro destaque, é que faz sentido escrever $a < b$ se e somente se $b - a > 0$, ou seja , $(b - a) \in P$.

Se $a \in P$ ou é 0, então $a \geq 0$. Por outro lado, se $-a \in$ P ou é 0, então . $a \leq 0$ De uma forma mais geral, defini-se no ensino fundamental e no ensino médio que P é o conjunto dos números positivos, P $\cup$ {0} conjunto dos números não negativos.

Destaca-se, neste momento, que o elemento *(-a)* não é necessariamente negativo, podendo ser positivo, se *a* for um elemento negativo. Caso *a* seja positivo, então *–a* será negativo. Em Q tem sentido se falar em elementos positivos e negativos. Senão, observe:

Dada a fração $\frac{a}{b}$, assumindo que seja sempre positivo o denominador *b*, valem as relações seguintes: $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{a}{b} = 0$ ou $\frac{a}{b} > 0$, segundo seja $a < 0$, $a = 0$ ou $a > 0$ respectivamente.

Corpo ordenado completo

Seja um corpo ordenado K. Um subconjunto X de K é limitado superiormente, se existir *b* pertencente a K, tal que $b \geq x$ qualquer que seja $x \in$ X. Cada *b* pertencente a K, com essa propriedade chama-se cota superior ou majorante de X. De maneira análoga, X $\subset$ K diz limitado inferiormente, quando existir *a* pertecente a K, tal que, para todo *x* pertencente a X, tem-se $a \leq x$. Um elemento *a* que goza dessa propriedade é denominado cota inferior ou minorante de X.

Um subconjunto X de K, cotado superiormente, uma cota superior *b*, se diz supremo de X, se é menor do que qualquer cota superior de X. Observe que de maneira análoga, se um subconjunto Y de K, cotado inferiormente, tem uma cota inferior *a* que é a maior delas, então *a* recebe o nome de ínfimo.

Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio X $\subset$ K, limitado superiormente, possui supremo em K, da mesma forma, se um subconjunto Y $\subset$ K for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo.

Axioma do supremo: Todo conjunto limitado e não vazio de números reais, possui um supremo e um ínfimo real.

Em razão do conjunto R dos números reais admitir o axioma do supremo, R é considerado um CORPO ORDENADO COMPLETO.

Gozar da propriedade de supremo e do ínfimo é o que diferencia o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais, pois esta propriedade não é satisfeita para Q. Se considerar, por exemplo, o conjunto $A = \{x \in Q; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$, o supremo de A, se existir, tem que $\sqrt{2}$, ser o qual foi visto anteriormente que não é um número racional. Logo, o conjunto $A \subset$ Q não admite supremo em Q, portanto, considera-se que o conjunto Q não é completo.

O supremo e o ínfimo de um subconjunto *B* limitado de R são números reais. Se esses não forem números racionais, então serão considerados números irracionais, garantindo desta forma a completeza de R.

Considerações finais

Este artigo se configura como uma iniciativa de reflexão sobre a relevância do conhecimento sobre os números reais para os professores e futuros professores nos cursos de licenciatura em matemática e também como um convite ao professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender aspectos da apresentação dos números reais em uma estrutura mais formal, identificando consequências deste na matemática produzida no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

Na abordagem atual das licenciaturas, os números reais são definidos axiomaticamente e, uma vez assim estabelecidos, prova-se que existem reais que não são racionais (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 82). Em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos números reais é constituído para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais.

Por hora, neste artigo, definiu-se

a estrutura algébrica dos corpos para um exame detalhado das necessidades de uma nova noção de números e a negociação dos significados para os números irracionais, constituindo um elemento fundamental no processo de discussão da ideia de número real.

Buscamos, neste artigo, uma aproximação das situações que envolvem o contexto do ensino fundamental e do ensino médio, ora trabalhando numa visão mais geométrica, ora numa visão mais algébrica. Nesse construto, se destacam as dízimas periódicas e os números irracionais.

Como a proposta deste trabalho era apresentar os números reais nas estruturas "algébrica e topológica", convidando o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender tais aspectos e, se possível, iniciar, a partir dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser abordado este tema nas licenciaturas em matemática, acreditamos ter vencido esta etapa. Porém não é um término de um trabalho, mas o início de um desenvolvimento que pode seguir por várias direções, sendo outros estudos e pesquisas responsáveis por indicar novas possibilidades.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998, 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v 2. Brasília: MEC, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA., 2000.

CRUZ, Willian José da. **Os números reais**: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. 2011. 120 f.: il. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

DIAS, Maria da Silva. **Reta Real:** Conceito Imagem e conceito definição. 2002. 107 f.: il. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. (Coleção do ensino fundamental – 8º ano). São Paulo: Ática, 2009.

_______. **Matemática.** (Ensino médio – volume único). São Paulo: Ática, 2009.

GIOVANNI, José Ruy Junior; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**. (coleção do ensino fundamental – 8º ano). São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática.** (Ensino médio – volume único). 4ª Ed. São Paulo: Atual, 2007.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. 247 f.: il. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.