Un camino hacia la actividad demostrativa

Jimmy Fonseca Velásquez*
Luis Fernando Lara Quintero**
Carmen Samper de Caicedo***

RESUMEN

Las tareas que se proponen, en este taller, salvo algunas modificaciones menores, son base de la investigación que reportaremos en nuestro trabajo de grado. Se pretende mostrar, de una manera activa y participativa, el potencial de la actividad demostrativa cuando ésta se da en el aula. Por un lado, es una herramienta para describir el comportamiento de los estudiantes en torno a la demostración. Por otro, es una herramienta didáctica para el aprendizaje de la geometría euclidiana, que, a la vez, suscita la práctica de la justificación, paso necesario en el acercamiento a la demostración.

Palabras clave: geometría, razonamiento deductivo, procesos de justificación, materiales manipulativos, Cabri.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: jimmat23@yahoo.com
** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: luisfernandolara26@yahoo.es
*** Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: csamper@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN

El taller que presentamos a continuación se basa en las tareas de aula que se diseñaron en el marco de realización de nuestro trabajo de grado en Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y que hacen parte de un *experimento de enseñanza*. El objetivo de éste es indagar y analizar el comportamiento racional y social de los estudiantes cuando participan en la *actividad demostrativa*. Dicho trabajo está en sintonía con los intereses del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, Æ•G, de la Universidad. Con este taller pretendemos hacer un aporte a la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, específicamente mostrando un tipo de tarea que propicia la actividad demostrativa de los estudiantes. Con tareas como las que presentamos, pretendemos responder al reconocimiento que le da el Ministerio de Educación Nacional (1998) a la geometría como una herramienta de modelación importante para interpretar, entender y apreciar el mundo que es netamente geométrico, así como de una disciplina que se caracteriza por favorecer un ambiente para el desarrollo del pensamiento espacial y procesos del pensamiento matemático como la argumentación. Desde este punto de vista, debe tener un papel protagónico, en la geometría escolar, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes con base en la observación de regularidades que lleven a la formulación de conjeturas y generalizaciones en un contexto de resolución de problemas, y la justificación de éstas.

La enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria en Colombia, de acuerdo con Camargo (2010), aún está centrada en reconocer visualmente algunas figuras prototípicas y clasificarlas, memorizar ciertas fórmulas para encontrar áreas y perímetros, y memorizar demostraciones de algunos pocos teoremas. Este tipo de enseñanza no favorece un ambiente donde los estudiantes alcancen las metas propuestas por el MEN (1998) en torno a la resolución y planteamiento de problemas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, donde se deben favorecer acciones como: explorar diferentes situaciones matemáticas, desarrollar procesos del pensamiento matemático y comunicarse matemáticamente. Para lograr estas metas, los estudiantes deben discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmarlas o desaprobarlas.

Al considerar este panorama y reconocer, por otro lado, el impacto de las nuevas tecnologías en la educación matemática, Gutiérrez (2007) señala: "si se posibilita que los estudiantes utilicen de manera habitual un programa de geometría dinámica, éstos pueden adquirir con más profundidad y rapidez los conceptos geométricos estudiados y progresar en sus habilidades de razonamiento deductivo y de demostración" (p. 7). Es decir, este tipo de herramientas "… permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana" (Camargo, Samper & Perry, 2006, p. 372). En particular, Cabri, al igual que la mayoría de programas de geometría dinámica, ofrece al estudiante la posibilidad de modificar la forma de las figuras construidas manteniendo sus propiedades geométricas para así poder descubrir las propiedades invariantes y las dependencias generadas, elemento necesario para poder formular conjeturas y querer determinar por qué son verdaderas o por qué son falsas. Cabri ofrece a los estudiantes posibilidades de expresión al proporcionarles herramientas que les permiten comunicarse e involucrarse en la práctica de la validación.

MARCO TEÓRICO

El constructo teórico desde el cual diseñamos las tareas es la *actividad demostrativa* dicho constructo surge en el marco del proyecto de investigación del grupo Æ•G *Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana* (Camargo et al., 2006), en el que se propone un modelo didáctico para el aprendizaje de la geometría euclidiana, con énfasis en el desarrollo del pensamiento deductivo, como aporte para la enseñanza y aprendizaje significativo de la geometría en la Educación Básica Secundaria. Camargo et al. (2006) afirman que en los continuos debates que se han presentado en torno a la pertinencia de la demostración en la educación matemática escolar se reconoce que desde la escuela se debe acercar a los estudiantes a actividades propias de la comunidad matemática. Las investigadoras están convencidas que la demostración debe ocupar un lugar prominente en el currículo de matemáticas. Sin embargo, coinciden con las críticas sobre la poca efectividad que se ha tenido en su enseñanza. Por esto, el grupo Æ•G ha dirigido sus esfuerzos a buscar alternativas para que la demostración tenga un papel significativo en la enseñanza, se use para promover la comprensión matemática y ayude a los estudiantes a entender los diferentes roles de la demostración en las matemáticas.

En el ámbito educativo, la *actividad demostrativa* comprende dos procesos que no son independientes (Samper, Perry, Camargo & Molina, 2012). En el primer proceso, o de conjeturación, se establecen conjeturas que luego se validan, debido a que las evidencias que provee la exploración de la situación generan un alto grado de seguridad, ya sea dentro de un sistema teórico o con explicaciones empíricas, según el nivel escolar correspondiente. Las acciones que hacen parte de este proceso son: *detectar y verificar propiedades, for-*

mular y *corroborar conjeturas*. En el segundo proceso se produce un discurso argumentativo de tipo deductivo con el cual se valida la conjetura formulada. Las acciones que conforman este proceso son: *seleccionar elementos teóricos o empíricos, construir argumentos y formular la justificación.* Al considerar la actividad demostrativa de esta manera, se promueve la comprensión del contenido matemático presente tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones (Perry, Samper, Camargo, Echeverry & Molina, 2007). De acuerdo con Perry et al. (2007), un entorno favorable para aprender a demostrar se caracteriza por tres elementos. Primero, *las tareas matemáticas* dejan de ser aquellas en las que se da un enunciado que el estudiante demuestra, y pasan a ser propiciadoras de experiencias de carácter empírico que llevan a la comprensión de la situación, y a la formulación de conjeturas. Además, deben exigir que dicha conjetura luego se valide. Segundo, *la interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes que permite la comunicación y análisis crítico de ideas, y la argumentación como manifestación del proceso de razonamiento. El profesor se convierte en un guía que, como experto de la comunidad de la clase y no como la autoridad que tiene el saber, dirige el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propias de la práctica de la demostración en matemáticas; establece y utiliza las normas que rigen el funcionamiento de la justificación. Tercero*, el uso de la geometría dinámica* que incrementa la posibilidad de aprender a demostrar, si se vinculan tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se llevará a cabo en dos sesiones, en cada una de las cuales los asistentes trabajarán de manera individual o por parejas. Las soluciones de las tareas se reportarán por escrito y luego se socializarán. En el primer día se desarrollarán dos tareas en las que es indispensable el uso de Cabri. En el segundo día, se describirán las tareas que ofrecieron los elementos para conformar el sistema teórico local que permite la justificación de la conjetura formulada en la última tarea de la sesión anterior; para ello se usará un esquema a tres columnas *Qué sé – Qué uso – Qué concluyo,* denominado por Samper, Molina & Echeverry (2011) como esquema-deducción.

Primera sesión

Tarea 1: DiPunRe

Situación: Don Gustavo es un campesino que desea cultivar arroz en su finca. Para ello, tiene que inundar el potrero en que sembrará las matas de arroz, sacando agua de una canal. Hay una llave de agua en el punto *P* lejos de la canal. Por tanto, debe construir una tubería desde el punto *P* a un punto de la canal para llenarla de agua. Si Don Gustavo quiere que la construcción sea lo más barata posible, entonces ¿cómo localiza un punto *Q* en la canal para que pueda cumplir con su intención?

a. Representen la situación en esta hoja.

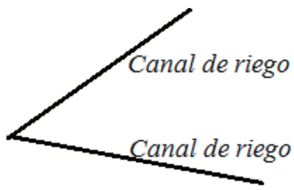
b. Representen la situación usando Cabri y encuentren el punto *Q*.

c. Completen la tabla con la información solicitada.

d. ¿Cómo encontraron el punto *Q*?

Construcción	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
Exploración		
Conjeturación	¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Tarea 2: TeoPELAn



Situación: Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.

a. Represente la situación usando Cabri.

b. Complete la tabla con la información solicitada.

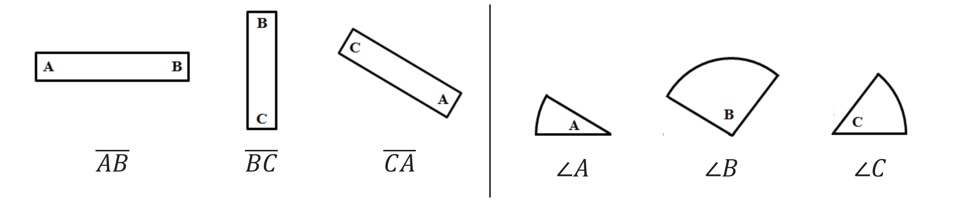
Construcción y exploración	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
	Con base en la anterior construcción, respondan a. Representen en la calculadora las matas con puntos donde don Gustavo puede sembrarlas. b. ¿Cuántas de estas puede sembrar? c. ¿Cómo pueden describir el sitio en donde don Gustavo debe colocar las matas?	
Conjeturación	En términos de geometría, ¿qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Segunda sesión

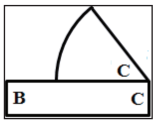
Tarea 1: En Busca del Triángulo Perdido[1]

El propósito de esta tarea es determinar cuál es el triángulo perdido en cada grupo. Para ello, cada grupo recibirá el material necesario para cada uno de los casos mencionados en la tabla que deberán diligenciar. El material consiste en unas regletas con las que se dibujarán segmentos y unos moldes con los que se dibujarán ángulos.

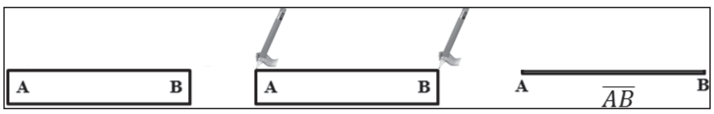
Regletas | Moldes de ángulos



Usando las piezas indicadas, el grupo tratará de dibujar la mayor cantidad de triángulos diferentes, obedeciendo las siguientes reglas:

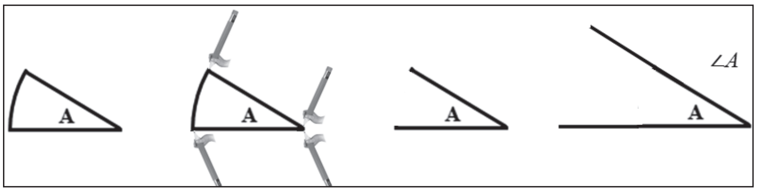


- Las letras indicadas en cada pieza deben coincidir. Por ejemplo, si se usa la regleta **BC** y el molde **C**, el extremo del segmento y el vértice del molde ángulo deben coincidir en **C**.
- Los segmentos deben tener la misma longitud de la regleta, y nombrarse como esta.



- Para dibujar un ángulo se deben trazar segmentos contra los lados rectos del molde. Estos segmentos se pueden extender o acortar cuanto sea necesario para que el dibujo dé lugar a un triángulo, a menos que sobre una de los segmentos se deba colocar una de las regletas, como se menciona en la primera regla.

[1] Esta tarea es una adaptación de las actividades propuestas en el libro Elementos de Geometría de Samper, Molina y Echeverry, 2011.



Diligenciamiento de la Tabla							
Caso	*Moldes*	*Regletas*	*¿Cuántos triángulos diferentes obtuvieron?*	*Caso*	*Moldes*	*Regletas*	*¿Cuántos triángulos diferentes obtuvieron?*
Caso 1 Dos ángulos				Caso 6 Dos lados y el ángulo no incluido			
Caso 2 Un lado y el ángulo con vértice en el lado				Caso 7 Dos lados y el ángulo incluido			
Caso 3 Un lado y el ángulo sin vértice en el lado				Caso 8 Dos ángulos y el lado no incluido			
Caso 4 Dos lados				Caso 9 Dos ángulos y el lado incluido			
Caso 5 Tres ángulos				Caso 10 Tres lados			

Tarea 2: ¿Qué tan Buenos Detectives fueron en la Búsqueda del Triángulo Perdido?

El propósito de esta tarea es comparar los dos triángulos (triángulo perdido que se entregará a cada grupo y triángulo obtenido), colocando la representación del uno encima de la del otro, para establecer una correspondencia entre los vértices de ambos triángulos y ver si coinciden en tamaño y forma, es decir, si los ángulos y lados de ambos triángulos tienen las mismas medidas.

Caso		*¿Se obtuvo el triángulo oculto?*	*Caso*		*¿Se obtuvo el triángulo oculto?*
Caso 1 Dos ángulos			Caso 6 Dos lados y el ángulo no incluido		
Caso 2 Un lado y el ángulo con vértice en el lado			Caso 7 Dos lados y el ángulo incluido		
Caso 3 Un lado y el ángulo sin vértice en el lado			Caso 8 Dos ángulos y el lado no incluido		
Caso 4 Dos lados			Caso 9 Dos ángulos y el lado incluido		
Caso 5 Tres ángulos			Caso 10 Tres lados		

Tarea 3: Hecho Geométrico BdA

El propósito de esta tarea es formular el hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración hecha en Cabri.

	¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?
Construcción	Crear un archivo en Cabri llamado bda	
	Construir un ABC	
	Construir la bisectriz del ángulo ABC	
	Medir los ángulos que se determinan.	
Exploración	Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?	
	Arrastrar	
Conjeturación	¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional: Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).	

Tarea 4: Justificación de TeoPELAn

El propósito de esta tarea es justificar la conjetura TeoPELAn, formulada en la última tarea de la primera sesión, haciendo uso del sistema teórico local y completando el esquema-deducción.

Conjetura: ***Si*** ________ ***entonces*** ____________________________________ .

Qué sé	*Qué uso*	*Qué concluyo*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Universitat de Valencia, Valencia.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV Congreso Nacional de Matemáticas* (Volumen especial), 371-383.

Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores*. Paper presented at the 13ª JAEM, Granada.

MEN. (2003). *Estándares básicos en competencias matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. & Molina, O. (2007). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Ponencia presentada en SIEM XVII, 17 a 21 de noviembre de 2007. Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México.

Samper, C., Molina, O. & Echeverry, A. (2011). *Elementos de Geometría*. Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. & Molina, O. (en prensa). Capítulo 1: Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.