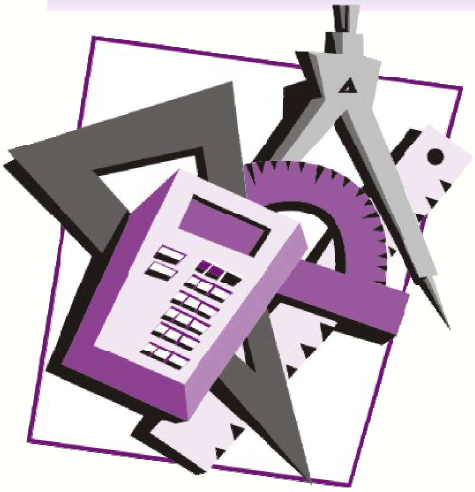
Atividades para Sala de Aula



Soluções Alternativas em Problemas de Máximos e Mínimos

Rogério César dos Santos[12]

Resumo

Dois problemas de máximos e mínimos são bastante conhecidos entre os estudantes: a maximização da área do retângulo fixado o perímetro e a minimização do perímetro do retângulo fixada a área. Em geral, o problema da maximização da área fixado o perímetro é trabalhado no nono ano do Ensino Fundamental e, também, no primeiro ano do Ensino Médio como exemplos de aplicação do vértice da parábola. Já o problema da minimização do perímetro requer o uso de Derivadas, e por isso é tratado no Ensino Superior. Este artigo propõe, como atividades alternativas a serem trabalhadas em sala de aula, outros caminhos para a resolução destes dois problemas, com o intuito de mostrar aos alunos que um mesmo problema em Matemática pode, em geral, ser resolvido de várias maneiras.

Problemas clássicos de otimização

Dado o valor do perímetro, qual é o retângulo de maior área? E, dada a área, qual é o retângulo de menor perímetro? Estes dois clássicos problemas de otimização são tradicionalmente resolvidos encontrando-se o máximo ou o mínimo de uma função apropriadamente construída. Para a maximização da área, a função é polinomial do segundo grau, e por isso é trabalhada desde o nono ano do Ensino Fundamental. A modelagem geralmente é feita da seguinte forma:

Se x e y são as medidas dos lados do retângulo cujo perímetro $p = 2x + 2y$ é conhecido, então a função área, de duas variáveis, é $f(x,y) = xy$. Encontrar o mínimo dessa função restrita aos valores positivos de x e y que satisfazem a equação $p = 2x + 2y$, equivale a encontrar o mínimo da função de uma variável real $f(x) = x\cdot(p - 2x) / 2$, como se pode ver isolando o y na expressão do perímetro e substituindo-o na função área.

Já para a minimização do perímetro, a função já não é tão simples, e por isso é

[12]Professor da Universidade de Brasília – Planaltina. E-mail: professorrogeriocesar@gmail.com

resolvida com os recursos do Cálculo Diferencial. A modelagem geralmente é feita da seguinte forma:

Se x e y são os lados do retângulo cuja área $a = x \cdot y$ é conhecida,então a função perímetro é $f(x,y) = 2x + 2y$. Encontrar o mínimo dessa função restrita aos valores positivos de x e y que satisfazem a equação $a = x \cdot y$, equivale a encontrar o mínimo da função de uma variável real $f(x) = 2x + 2 \cdot (a / x)$, como pode-se ver isolando o y na expressão da área e substituindo-o na função perímetro.

Vamos mostrar, como possível proposta de atividade para o professor de Matemática, outras duas formas de se resolverem estes dois problemas clássicos de otimização, encontradas em (TOEPLITZ; RADEMACHER, 1996). São formas que podem ser trabalhadas tanto no nono ano, quanto no primeiro ano do Ensino Médio, e até mesmo na Educação Superior em disciplinas de Cálculo. O professor pode, inclusive, propiciar uma mediação para que os próprios alunos consigam chegar às demonstrações que trataremos neste artigo, através, por exemplo, do apelo à figura.

Uma das resoluções que vamos mostrar possui caráter geométrico e a outra faz uso de desigualdades entre números reais. Pois, de acordo com Barbosa (2009):

> Notemos que a Modelagem não é o único ambiente de aprendizagem em que os alunos se defrontam com um problema para ser resolvido. Isso também ocorre em outras propostas, como na resolução de problemas. Essa é uma característica transversal a muitos ambientes inovadores (BARBOSA, 2009, p.19).

2. Dado o perímetro do retângulo, encontrar as dimensões do retângulo que possui área máxima – 1ª demonstração

Vamos mostrar agora como encontrar o retângulo de maior área, dado o valor do perímetro $p > 0$, sem a necessidade de se formular uma função do segundo grau. Antes de começar, entretanto, alguns exemplos podem ser bastante ilustrativos. Suponhamos $p = 12$. Consideremos o quadrado de lado $z = 3$, cujo perímetro é $p = 12$, e o retângulo de base $x = 4$ e altura $y = 2$, cujo perímetro também é $p = 12$. Aqui, o quadrado tem área igual a 9 e o retângulo tem área igual a 8, logo o quadrado tem a maior área. Outro exemplo seria o retângulo de base $x = 5$ e altura $y = 1$, cuja área é 5. Logo, o quadrado ainda tem a maior área. Nesse momento, é possível que os alunos já queiram concluir que o quadrado sempre terá a maior área do que os retângulos escolhidos. Porém, cabe ao professor demonstrar o caso geral.

Podemos observar inicialmente que, no primeiro exemplo acima, o lado do quadrado $z = 3$, a base $x = 4$ do retângulo e a altura $y = 2$ do retângulo satisfazem $y < z < x$. No segundo exemplo, esta desigualdade também é satisfeita. Será que tal desigualdade sempre é válida nesta situação em que o perímetro p das figuras é o mesmo? Isto será verificado durante o artigo. Vejamos.

Vamos considerar o retângulo R de perímetro p, base x e altura y, onde vamos supor $x > y$, para garantir que este retângulo não seja um quadrado. Desta forma, vale a igualdade $2x + 2y = p$. Consideremos também o quadrado Q de lado z, cujo perímetro também é p, isto é, vale a igualdade $4z = p$. Até aqui, então, já podemos concluir que $2x + 2y = 4z$, com x (base) > y (altura). Qual tem a maior área, o retângulo R ou o quadrado Q?

Como, por hipótese, $x > y$, então, $4z = 2x + 2y > 2y + 2y = 4y$, assim, $4z > 4y$, de onde chegamos a $y < z$. Isto significa que a altura y do retângulo R é menor do que a altura z do quadrado Q. Analogamente, $4z = 2x + 2y < 2x + 2x = 4x$, de onde se conclui $z < x$. Isto significa que a base z do quadrado Q é menor do que a base x do retângulo R. Logo, $y < z < x$ é realmente verdade no caso geral.

Considerando estas desigualdades, é possível desenhar o quadrado e o retângulo juntos, fazendo coincidir o vértice inferior direito do quadrado Q com o vértice inferior direito do retângulo R, como mostra a figura a seguir. Observamos que o quadrado Q de lado z (> y) é composto pelos dois retângulos C e B, desenhados à direita. Já o retângulo R de base x (> z) e altura y (<z) é composto pelos dois retângulos de baixo, chamados de A e C:

Calculando o perímetro p do

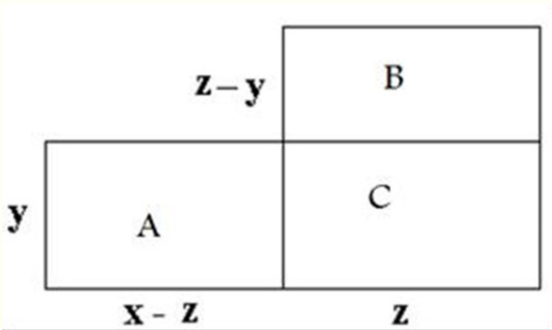


Figura 1 - O retângulo de lados x e y e o quadrado de lado z com vértices inferiores direitos coincidentes

retângulo R, pela figura 1, temos $2(x – z) + 2z + 2y = p$. Já o perímetro p do quadrado Q, calculado pela figura, nos dá $2z + 2y + 2(z – y) = p$. Logo, igualando os dois perímetros e simplificando, chegamos a $(x – z) = (z – y)$. Então, observando esta igualdade na figura 1, concluímos que o retângulo A possui base $x – z$ congruente à altura $z - y$ do retângulo B, ou seja, uma das dimensões de B é igual a uma das dimensões de A. No entanto, já sabemos que a base z do retângulo B é maior do que a altura y do retângulo A. Assim, a área do retângulo B é maior do que a área do retângulo A.

Enfim, temos: área do quadrado Q de lado z = área(B) + área(C) > área(A) + área(C) = área do retângulo R de lados x e y, onde se conclui que a área do quadrado é maior do que a de qualquer retângulo de mesmo perímetro.

3. Dado o perímetro do retângulo, encontrar as dimensões do retângulo que possui área máxima – 2ª demonstração

A segunda forma de demonstrar é puramente algébrica, e mais rápida. Pelas nossas hipóteses impostas sobre o quadrado Q de lado z e sobre o retângulo R de base x e altura y, de mesmo perímetro p, temos: $x > y$, e $2x + 2y = 4z$, isto é, $x + y = 2z$. Logo, $z = (x + y)/2$. Como a nossa suspeita é de que a área z^2 do quadrado é maior do que a área xy do retângulo, pelos exemplos numéricos dados no início, vamos tentar provar que $z^2 > xy$, através da sucessão das seguintes desigualdades equivalentes:

$z^2 > xy$ se e somente se (substituindo z:)

$(x + y)^2/4 > xy$ se e somente se

$x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$ se e somente se

$x^2 - 2xy + y^2 > 0$ se e somente se

$(x - y)^2 > 0$, o que é verdade, já que $x > y$ por hipótese, como queríamos demonstrar.

Observe que, nas duas formas, não foi necessário formular uma função polinomial. Portanto, a área máxima de um retângulo de perímetro fixo p é a do quadrado de lado p/4, e vale $(p/4)^2$.

4. Dada a área do retângulo, encontrar as dimensões do retângulo de perímetro mínimo – 1ª demonstração

Aqui também cabem antes alguns casos numéricos. Como exemplo, podemos tomar o quadrado Q de área 36 e lado $z = 6$, e o retângulo R de mesma área e lados 9 e 4. O perímetro de Q é 24, menor do que o de R, que é 26. Outro exemplo seria o retângulo R de mesma área, com base 10 e altura 3,6. O perímetro de R seria 27,2, novamente maior do que 24. Analogamente ao caso anterior, cabe a suspeita de que o quadrado é a resposta, nesse caso, o que possui o menor perímetro. Vejamos.

Para começar, suponhamos então que o quadrado Q de lado z tenha a mesma área do retângulo R de base x e altura y, ou seja, que $z^2 = xy$. Suponhamos também que x > y, como no problema anterior. Logo, $z^2 = xy > yy = y^2$, ou seja, como z e y são positivos, z > y. Além disso, $z^2 = xy < xx = x^2$, logo, z < x. Assim, y < z < x, a mesma desigualdade do caso anterior: a altura z do quadrado Q é maior do que a altura y do retângulo R, e a base z do quadrado Q é menor do que a base x do retângulo R. Podemos então montar a mesma figura, coincidindo os vértices inferiores direito, onde o quadrado Q é formado pelos retângulos C e B, e o retângulo R pelos retângulos A e C:

Por hipótese, a área de Q é a mesma de R. Olhando a figura, vemos que área do quadrado Q de lado z = área(B) + área(C) = área(A) + área(C) = área do

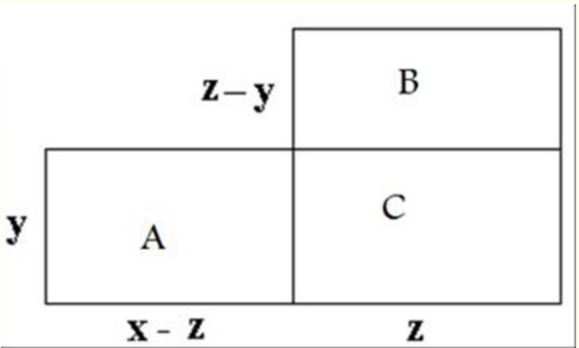


Figura 2 - Os retângulos Q e R têm a mesma área

retângulo R de lados x e y, ou seja, área (B) = área(A). Porém, já sabemos do parágrafo anterior que z > y, ou seja, a base de B é maior do que a altura de A. Logo, uma das dimensões de B é maior do que uma das dimensões de A. Mas, como as áreas de A e B são as mesmas, então, para compensar, é necessário que a altura de B, z – y, seja menor do que a base de A, x – z, ou seja, z – y < x – z, isto é, z < (x + y)/2, ou, 4z < 2x + 2y, o que prova finalmente que o perímetro de Q é menor do que o de R, qualquer que seja o retângulo R de lados x > y e mesma área de Q.

5. Dada a área do retângulo, encontrar as dimensões do retângulo de perímetro mínimo – 2ª demonstração

Suponhamos que $z^2 = xy$ (áreas iguais) e que $x > y$. Suspeitamos que o perímetro do quadrado seja menor do que o do retângulo, então nós podemos começar com a desigualdade:

$4z < 2x + 2y$ se e somente se

$16z^2 < 4x^2 + 8xy + 4y^2$ se e somente se (substituindo z^2:)

$16xy < 4x^2 + 8xy + 4y^2$ se e somente se

$4x^2 – 8xy + 4y^2 > 0$ se e somente se

$x^2 – 2xy + y^2 > 0$ se e somente se

$(x – y)^2 > 0$, o que é verdade, pela hipótese inicial.

Portanto, o perímetro mínimo de um retângulo de área fixa a é o do quadrado de lado raiz de a, e vale 4 vezes a raiz de a.

6. Conclusão

É importante que os alunos percebam que existem diferentes caminhos para resolver um mesmo problema, para que eles tenham mais independência em seus estudos, escolhendo os rumos a serem tomados nas resoluções dos problemas. Além disso, outra consequência positiva que estas atividades podem acarretar é a ampliação da visão do aluno em relação à Matemática, a descoberta de suas riquezas e a força de suas demonstrações. O interesse por esta ciência pode vir a aumentar, quando mostrada ao estudante a estreita ligação entre diferentes assuntos da Matemática, como, nesse caso, a geometria, a modelagem por funções e a manipulação álgebra e numérica de desigualdades, na resolução de um mesmo problema.

Referências

BARBOSA, J. C. Integrando Modelagem Matemática nas Práticas Pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**. SBEM n. 26 p. 19 mar. 2009

TOEPLITZ, O.; RADEMACHER, H. **The Enjoyment of Mathematics**. New York: DOVER, 1996