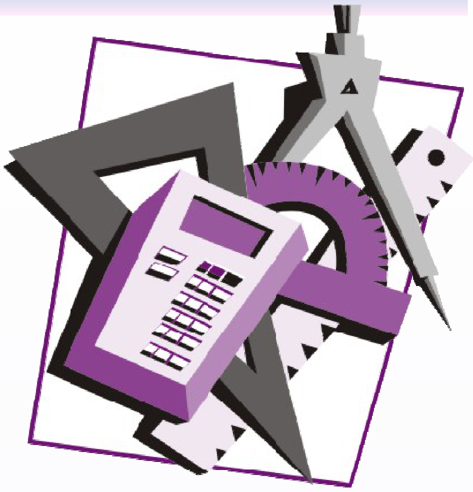
Atividades para Sala de Aula

Interpretação das Velocidades Relativa e de Afastamento no Cálculo Básico



Vinicius Cifú Lopes[13]

Resumo

Uma situação-problema de Cálculo introdutório é o da velocidade entre dois pontos móveis. Propomos o enriquecimento desse problema e seu resgate em um curso vetorial posterior, comparando-se os conceitos de velocidade de afastamento e velocidade relativa para conciliar duas interpretações do mesmo enunciado. Revemos, também, as discussões oportunas que o problema induz em sala de aula.

O problema e sua solução

Figueiredo et al. (2007) estudam uma classe importante de exercícios de matemática: a dos "problemas textuais" ou situações-problema (em inglês, *word problems*), que consistem da interpretação de um texto descritivo ou até narrativo, da coleta de dados numéricos e relacionais, da tradução ao formalismo matemático e, finalmente, da aplicação de técnicas matemáticas a essa tradução. Situações-problema são exemplos relevantes de como o arcabouço teórico da Matemática comunica-se com sua utilização, tendo, por isso, não apenas valor didático intrínseco em termos das técnicas utilizadas em sua resolução, mas também aquele de estimular o estudante a essa conexão.

Este artigo apresenta as oportunidades de ensino que surgem com uma situação-problema de Cálculo, ramo da Matemática que também nasceu da necessidade de inúmeras aplicações nas ciências naturais e tem vocação para continuar servindo assim.

Os problemas textuais sempre admitem variações de um mesmo tema ou diversas metamorfoses. O enunciado que propomos a seguir pode ser resolvido com as técnicas apresentadas em Guidorizzi (2001, s. 7.15) e em Stewart (2010, s. 3.9).

> Uma ferrovia e uma rodovia, ambas retilíneas, encontram-se em ângulo reto. Um trem e um carro dirigem-se à intersecção com velocidades de

[13]Universidade Federal do ABC; e-mail: vinicius@ufabc.edu.br

200km/h e 160km/h, respectivamente. Quando o trem dista 1200m da intersecção e o carro apenas 500m, qual é a velocidade de aproximação entre os dois?

Esta é a solução padronizada: Sejam x e y as posições do trem e do carro, respectivamente, em suas trajetórias retilíneas, considerando-se a intersecção das duas retas como marco zero comum. Essas posições são funções do tempo: $x(t), y(t)$. Então a distância entre o trem e o carro é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e também temos $d(t)$, isto é, a distância é uma função do tempo. Pela Regra da Cadeia, portanto,

$$\dot{d}(t) = \frac{1}{2\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}} \cdot [2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t)],$$

ou simplesmente,

$$\dot{d} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Substituindo-se os valores dados no enunciado, correspondendo a um certo instante t_0, obtemos a velocidade de aproximação de cerca de 246km/h.

Nessa solução, ignoramos completamente um item adicional da formalização, que o professor pode julgar necessário frisar ou não: Tratar a ferrovia e a rodovia como eixos ordenados não requer apenas fixar uma origem em cada eixo, mas também uma orientação, isto é, qual semireta tem seus pontos identificados com os números positivos. (O enunciado já implica em uma escala linear, ou seja, os números reais são uniformemente distribuídos ao longo das retas, e também em uma mesma unidade de medida para cada eixo.) Convencionada cada orientação, sinais apropriados caberão também às velocidades do trem e do carro e, por fim, à velocidade de aproximação. No caso em estudo, se convencionarmos que, no instante t_0 fixado no texto, temos $x(t_0), y(t_0) > 0$, então devemos ter $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0) < 0$ e, por substituição, $\dot{d}(t_0) < 0$. Desse modo, a velocidade realmente é de *aproximação* (porque a distância diminui), não de *afastamento* que corresponde a $\dot{d}(t_0) > 0$.

É perfeitamente possível, aliás, e bastante simples escrever as funções lineares $x(t)$, $y(t)$ explicitamente, por tratar -se de movimentos retilíneos uniformes, e então obter expressões também para d, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{d}$.

2. Algumas dificuldades em sala de aula

Quando vimos esse exercício com turmas de introdução ao Cálculo, reconhecemos alguns desafios cuja solução *in loco* e personalizada foi, afinal, parte de nosso papel docente. Uma fração deles é intencionalmente parte do exercício:

- Sem a elaboração correta de um diagrama ou esquema da situação descrita, o aluno teve dificuldades em atribuir nomes (como x , y) às grandezas envolvidas. É o momento de ressaltar a importância do diagrama e como fazê-lo corretamente.
- A solução requer o uso de "letras" e a manipulação algébrica de expressões abstratas, incluindo a derivação, *antes* da substituição dos dados numéricos. Afinal, se os números forem substituídos com antecedência, suas derivadas serão zero.
- Apareceram soluções incorretas ao problema, como a soma ou a subtração numérica das velocidades dadas ou diversas "regras de três". Em tais situações, pedir ao aluno que justificasse sua solução indicou como ajudá-lo a compreender seu erro.
- A fórmula final e fechada para d' pareceu estranha aos alunos, seja porque o numerador contém produtos de distâncias e velocidades, seja porque não é semelhante às fórmulas usuais já conhecidas, por eles, de seu ensino médio.
- Há uma diferença significativa entre *velocidade relativa* (seja vetorial ou seu módulo) e *velocidade de afastamento ou aproximação*. Porém, nossos alunos, recordando seus cursos de Física do ensino médio, ansiaram por calcular a primeira, porque é a correta para inúmeras aplicações. (No nosso exemplo, ela tem módulo aproximadamente 256km/h.)

É justamente este último ponto que nos chama a atenção. De fato, se for utilizada a expressão "velocidade relativa" na formulação do problema, a intenção diferente pode acarretar transtornos à aula. Veremos a seguir, contudo, que podemos usar isso a nosso favor.

3. Revisão em cálculo vetorial

Propomos que será oportuno retornar a essa situação-problema em um curso de Cálculo II ou III, isto é, no Cálculo geométrico. Nesse momento, a fórmula que deduzimos para $'d$ terá uma explicação geométrica intuitiva, enquanto que a relação entre os conceitos de velocidade relativa e de aproximação será esclarecida.

Os cálculos devidos são os seguintes: Sejam $\vec{p}$, $\vec{q}$ os vetores posição do trem e do carro, respectivamente. São funções vetoriais do tempo e costuma-se, após prática, escrevê-las sem as flechas: *p(t),q(t)*. Agora,

$$d = \|p - q\|, \text{ ou seja, } d^2 = \langle p - q | p - q \rangle.$$

Notamos que *d(t)* é uma função escalar. Derivando os dois lados desta expressão quanto a *t*, temos

$$2d\dot{d} = 2\langle p - q | \dot{p} - \dot{q} \rangle$$

de modo que

$$\dot{d} = \frac{\langle p - q | \dot{p} - \dot{q} \rangle}{\|p - q\|} = \|\dot{p} - \dot{q}\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre p - q e $\dot{p}$ - $\dot{q}$, também função de *t*. Ou seja, a velocidade de afastamento $\dot{d}$ é a magnitude da *projeção* da velocidade relativa $\frac{d}{dt}(p - q) = \dot{p} - \dot{q}$ na direção da posição relativa p - q.

Essa demonstração é perfeitamente compatível com um "experimento mental" ou imaginário que se pode fazer para dirimir a dúvida entre velocidades relativa e de afastamento: suponha que estejamos parados e que algo passe à nossa frente, em movimento retilíneo. No momento em que nossa linha de observação torna-se normal à trajetória do objeto, encerra-se sua aproximação e inicia-se seu afastamento, de modo que sua velocidade de afastamento "troca de sinal" e é nula. Contudo, certamente não concordaremos que a velocidade relativa também é nula.

Esse experimento mental pode ser concretizado e feito já em Cálculo I, na própria aula do problema. A técnica de experimento mental (em alemão, *Gedankenexperiment*) é considerada por Kuhn (1989, p. 293-321), que analisa a história da distinção entre velocidades média e instantânea.

Referências

FIGUEIREDO, F. F.; FIOREZE, L. A., ISAIA, S. M. A. Resolução de situações-problema no ensino de Matemática: Relação entre aportes teóricos e vivência pedagógica prática. In: **Anais** do Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007. Belo Horizonte. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC00033611017T.doc>. Acesso em: 2 de out. 2012.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, v. 1, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KUHN, Thomas S. **A Tensão Essencial**, tradução de Rui Pacheco, revisão de Artur Morão. Lisboa: Edições 70, 1989.

STEWART, James. **Cálculo**, v. 1, tradução de Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2010.