Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura

Didactical Engineering for the generalization of Fibonacci´s sequence: an experience in a graduate course

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES [1]

Resumo

Este artigo apresenta uma Engenharia Didática – ED desenvolvida no contexto do ensino de Matemática por meio de sua História. O ambiente de aplicação foi um curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE no ano de 2015. Com a participação de quatro duplas de alunos e foram desenvolvidas cinco atividades envolvendo a sequência. De modo especifico, investigou-se a possibilidade da definição da sequência de Fibonacci no campo dos inteiros. A ED foi aplicada neste estudo com amparo em uma visão de complementaridade que utilizou a TDS em sua fase de experimentação. Os dados sistematizados na fase de análise a posteriori e validação interna indicam que: os alunos manifestam surpresa ao perceberem a possibilidade de descrição dos demais termos de índices inteiros; eles manifestam dificuldades em sistematizar e formalizar suas conjecturas e os argumentos formulados nas fases iniciais de ensino previstas na TDS; os estudantes percebem as relações intrínsecas entre as sequências descritas nos naturais e inteiros.

Palavras-chave: *Historia da Matemática, Sequência de Fibonacci, Engenharia Didática.*

Abstract

This article presents a Didactic Engineering - ED developed in the context of teaching mathematics through its history. The application environment was an undergraduate degree in Mathematics from the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará - IFCE in the year 2015 with the participation of four pairs of students and five activities were developed involving the sequence. Specifically, we investigated the possibility of defining the Fibonacci sequence in the field of integers. The ED was applied in this study with support in a vision of complementarity that used the TDS in its experimental stage. Data were systematized in the analysis posteriori phase and the subsequent internal validation indicates that: students express surprise when they realized the possibility of description of other terms in Z ; they manifest difficulties in systemize and formalize their conjectures and arguments formulated in the early stages of education provided in the TDS; students realize the intrinsic relations between the sequences defined in the natural and integers.

Keywords: *History of Mathematics, Fibonacci Sequence, Didactical Engineering.*

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA/UFC. E-mail: fregis@ifce.edu.br

Introdução

O uso da História da Matemática - HM pode representar importante instrumento de uso didático e metodológico em sala de aula. Sua exploração adequada no ensino de Matemática pode instigar a curiosidade do estudante, na medida em que este compreende a evolução/sistematização do pensamento e das ideias matemáticas desde sua gênese, até um patamar de maior complexidade, abstração e consistência formal.

Com efeito, sublinhamos que as ideias matemáticas sempre nos remetem a conceitos e, que, determinados conceitos matemáticos, podem surgir antes ou depois do estabelecimento de uma definição formal, nomenclatura ou simbologia, que servem, entre outras coisas, para designar, distinguir e, mormente caracterizar um novo objeto conceitual. Assim, neste escrito, descrevemos a aplicação de uma *Engenharia Didática* - ED, desenvolvida no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação do Ceará – IFCE, cujo objetivo foi descrever e discutir as propriedades conceituais e, inclusive, a existência da *sequência de Fibonacci* sobre o campo dos números inteiros que, de modo standard, denotamos por Z.

Vale ressaltar que as propriedades da *sequência de Fibonacci* definida de modo clássico no conjunto IN é largamente discutida por autores de livros de HM. Por outro lado, em relação a este novo objeto conceitual que se pretende descrever e caracterizar, quais propriedades matemáticas são preservadas e quais não apresentam o mesmo significado? A existência da *sequência de Fibonacci* nos permite declarar a existência também de uma sequência do tipo $\{f_n\}_{n\in z}$? Podemos, de acordo com os padrões rigorosos matemáticos, chamar/descrever a função $x_n : Z \to IR$ de uma "*sequência*"? Como designamos/encontramos o primeiro termo, o segundo, o terceiro termo e etc.?

Deteremo-nos em alguns destes questionamentos ao decorrer deste escrito. Por outro lado, respeitando a natureza do nosso objeto de discussão, abordaremos, inicialmente, algumas questões pertinentes à formação de professores de Matemática.

1. História da Matemática e a formação de professores

Há mais de uma década, Fossa (2001, p. 59) questiona o conhecimento dos professores de Matemática, no que se refere ao uso efetivo de instrumentos eficazes de compreensão em sala de aula. Assim, o autor comenta ainda que as iniciativas predominantes se apoiam em atividades que funcionam apenas "como um mecanismo de motivação. "

(2001, p. 59). Nesse âmbito de debate científico e de modo específico, o autor aponta que, com a HM, ocorre a mesma distorção.

De fato, em relação a este assunto, o autor comenta que

> Assim, o professor geralmente lança mão de raras preciosidades que ele acha encravadas no fim dos capítulos do livro texto, e acaba utilizando-as mais como recreio mental, para fugir por uns momentos de assuntos mais sérios, do que como uma parte integral da matéria a ser ministrada. (FOSSA, 2001, p. 59).

Em alguns trabalhos, podemos evidenciar que os obstáculos e entraves apontados há pouco por Fossa persistem, bem como outros. De tal sorte, destacamos os trabalhos de Avital (1995), Balestri (2008), Dambros (2006), Fauvel & Maanen (2002), Fried (2007), Gaspar (2003). Por exemplo, Balestri (2008, p. 92) identificou em sua investigação, várias contribuições positivas do uso da HM no contexto de formação de professores de Matemática.

Ademais, acentua que "num curso de formação de professores de Matemática a HM deve ser articulada com as disciplinas do curso de forma que ligue seus conteúdos trabalhados. " (BALESTRI, 2008, p. 98). Por outro lado, "embora a importância da dimensão histórica no ensino da matemática seja reconhecida, é ainda difícil escolher caminhos didáticos através dos quais tal importância seja explicitada e que esteja de acordo com as necessidades e limites do contexto. " (GASPAR, 2003, p. 1).

Em sua tese, Ocanã (2002, p. 34) diferencia experiências didáticas que envolvem o ensino de Matemática por meio de sua História do Ensino de História da Matemática. Apesar de demarcação epistemológica difícil, "uma vez que na aprendizagem da História se aprende Matemática, da mesma maneira que a aprendizagem em Matemática envolve aspectos em que aprendemos sua História" (OCANÃ, 2002, p. 35), alguns reducionismos (DAMBROS, 2006, p. 167) no âmbito destas experiências didáticas, podem proporcionar apenas um uso didático superficial, episódico, novelesco, anedótico e sem muitas consequências ulteriores pertinentes à aprendizagem.

Elementos desta natureza, caso não recebam a atenção necessária, podem atuar de modo prejudicial na formação inicial de professores. Então, no próximo segmento, abordaremos uma temática que envolve a visão de ensino de Matemática por meio de sua História com ênfase no conceito de *sequência de Fibonacci*.

1.1A Sequência de Fibonacci

O epíteto Fibonacci é a abreviação de filho de Bonaccio, seu pai, como explica Dunlap. Posamentier & Lehmann (2007, p. 22) comentam que “Fibonacci acumulou experiência nos campos da Aritmética e da Álgebra, a partir das viagens que realizou na Europa”, entretanto, apesar de ter desenvolvido vários trabalhos nestes campos da Matemática, Leonardo de Pisa é lembrado geralmente em razão do seu problema que descreve “a reprodução dos coelhos imortais” (DUNLAP, 2003; WELLS, 2005). Consideremos, de modo preliminar, a listagem dos elementos.

$\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $(1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; 233; 377....)$ (*)

Reparemos que poderíamos considerar também as seguintes sequências: $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$: (2 ; 5 ; 7 ; 12 ; 19 ; 31 ; 50 ;....), $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$: (1 ; 3 ; 4 ; 7 ;11 ;18 ; 29 ;....) ou ainda $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$: (-1 ; -5 ; -6 ; -11 ; -17;....), como exemplifica Vorobe´v (1961, p. 11), todavia, apenas no caso de (*) descrevemos os *números de Fibonacci*, enquanto que nos outros casos mencionados, identificamos *pseudo-números de Fibonacci* (FERNS, 1968, p. 305), pois satisfazem a mesma relação de recorrência, entretanto, os valores iniciais são distintos da sequência listada/apontada em (*).

A listagem acima é encontrada em Honsberger (1985, p. 111) descrita apenas para $n \in IN$ e pode ser definida como $f(n) = \begin{cases} 1 \text{ se n=1} \\ 1 \text{ se n=2} \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ , n>2} \end{cases}$. Denotamos então a *sequência de Fibonacci* por $\left(f_n\right)_{n\in IN}$ que, de acordo com Lima et al (2000, p. 65), trata-se de uma *sequência recorrente,* uma vez que conhecemos sua regra e conhecemos seus primeiros termos, entretanto, com base na forma de obtenção dos termos da *sequência de Fibonacci*, obtemos $f_2 = f_1 + f_0 \therefore f_0 = f_2 - f_1 = 0$, termo que não comparece em (*) e é desprovido de significado na história dos “coelhos imortais”.

Na literatura especializada (BENJAMIN & QUINN, 2005; BROUSSEAU, 1967; BURTON, 1980; DUNLAP, 2003; ESTRADA et al, 2000; EVES, 1983; HAMMACK, 2009; HONSBERGER; 1985; KOSKY, 2007; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; RIBENBOIM , 1995; VAJDA, 1989; VOROBE´V, 1961; 1974; WADDILL & SACKS, 1967; WELLS; 2005), encontramos intrigantes propriedades aritméticas, algébricas e, também, geométricas da *sequência de Fibonacci* que descrevemos em (*). Vale observar que esta recebeu maior interesse por parte dos matemáticos profissionais[2] somente após a descrição da *sequência de Lucas*, definida por Edouard Anatole Lucas (1842-1891), "que mantém uma forte relação com os termos desta". (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007).

Burton (1980, p. 287) explica que a "*sequência de Fibonacci* é a primeira *sequência recorrente"* conhecida num trabalho de Matemática. Acrescenta que o próprio *Fibonacci* ficou atento para a particularidade *recorrente da sequência*, entretanto, algumas propriedades, consideradas substanciais, foram exploradas somente após a evolução das notações (definições) matemáticas empregadas. De fato, Posamentier & Lehmann (2007, p. 296) sublinham que "em 1843 Jacques Philipe Marie Binet (1786-1856) desenvolveu uma definição explícita para os *números de Fibonacci*", descrita por

$f_n = 1/\sqrt{5}\left[\left(1+\sqrt{5}/2\right)^n - \left(1-\sqrt{5}/2\right)^n\right]$, para $n \geq 1$.

Em relação a essa fórmula intrincada, para qualquer número natural $n \geq 1$, "o número irracional $\sqrt{5}$ parece desaparecer no cálculo do número de Fibonacci", o que soa inesperado, posto que a fórmula há pouco mencionada não se assemelha a um número racional, em todo caso, como de costume, quando a referida fórmulação foi nomeada e indicada naquela época, "controvérsias surgiram em torno de quem de fato a descobriu primeiro." (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007, p. 297). Por outro lado, observamos ainda propriedades inesperadas nesta sequência emblemática (HONSBERGER, 1985; VOROBE´V, 1961; 1974).

Com efeito, Honsberger (1985, p. 104) menciona, sem fornecer muitos detalhes, que "não existe dificuldade em estender a *sequencia de Fibonacci* no sentido indefinidamente oposto". De fato, notamos que: $f_1 = f_0 + f_{-1} \therefore f_{-1} = 1$; $f_0 = f_{-1} + f_{-2} \therefore f_{-2} = -1$,..., etc.. Sucessivamente, temos:

$$\begin{array}{ll} \left(f_{-n}\right)_{n\in IN} & :\{......;\ f_{-n};...;\ f_{-8}\ ;\ f_{-7}\ ;\ f_{-6}\ ;\ f_{-5}\ ;\ f_{-4}\ ;\ f_{-3}\ ;\ f_{-2}\ ;\ f_{-1}\ ;\ f_0\} \\ & \{\ \ ....;......\ ;-21;\ 13\ ;\ -8\ ;\ \ 5\ ;-3\ \ ;\ 2\ ;-1\ ;\ \ 1\ ;\ 0\} \end{array} \quad (**)$$

Vorobe´v (1974, p.33) explica que a equação recorrente de Fibonacci pode ser expressa, então, por $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$, "permitindo expressar os *números de Fibonacci* de índices menores.". Nesta, tomando-se sucessivamente os valores $n = 2, 1, 0, -1, -2, -3, ..., ...$,

[2] Ribenboim (1995, p. 54) recorda-se de que outras sequências do mesmo tipo receberam atenção de figuras como Euler, Fermat e Pell, todavia, foi somente E. A. Lucas que as estudou de modo sistemático.

encontramos os demais valores numéricos indicados em (**). Vorobe´v (1974, p.33) declara que "é fácil persuadir-se de que vale a propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$.". Acrescenta, ainda, que "esta simples expressão permite reduzir todos os problemas relacionados com os números de Fibonacci de índices inteiros arbitrários a problemas onde se manejam os números de Fibonacci costumeiros. " (VOROBE´V, 1974, p. 33). Ora, suas considerações sugerem a extensão da sequência inicial em (*).

Em algumas páginas (FIBONACCI NUMBERS, 2012; FIBONACCI SEQUENCE, 2012; GOLDEN SECTION, 2011) da enciclopédia livre *Wikipédia*, acessamos o conteúdo que indicam, sem maiores explicações, termos em inglês como "*negafibonacci sequence*" ou "*bidirecional sequence*". Destacamos ainda que o termo "*bidirecional sequence*" possui antes um sentido "intuitivo" do que matemático. Ademais, vale comentar o fato de que em todos os livros consultados neste escrito, não foi encontrada a descrição da *sequência de Fibonacci* para o conjunto dos inteiros negativos (**), com exceção de Vorobe´v (1974), embora o autor não forneça, de modo explícito, como obter a expressão indicada por $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$, com $n \geq 0$.

Usando, entretanto, o mesmo princípio para a forma geral $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, estabelecemos $f_{-n} = f_{-n-1} + f_{-n-2}$, $n \in IN$. Acrescentamos ainda que o modelo matemático descrito por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$, pode ser considerado, numa linguagem atual, como uma modelagem da geração de coelhos; todavia, o mesmo não podemos declarar em relação à "sequência"[3] $\left(f_{-n}\right)_{n \in IN}$ ou $\left(f_n\right)_{n \in Z}$. Ademais, seguindo os cânones em Matemática Pura, podemos nomear como *sequência* uma função cujo domínio é o conjunto IN dos números naturais; e *sequências de números reais* apenas a função definida por $x_n :\ \boldsymbol{IN} \longrightarrow \boldsymbol{IR} \ :\ \ \boldsymbol{n} \longmapsto \boldsymbol{x_n}$ (LIMA, 2010, p. 74).

Há décadas encontramos estudos em Matemática Avançada, cujos autores (BROUSSEAU, 1967; FRIED, 2007; MOZINGO, 1974; HARRIS & SYLES, 1964; WADDILL & SACKS, 1967) desenvolvem um interesse específico pela "generalização" da referida sequência. Advertimos ao leitor que, apesar de tratarmos do interesse envolvendo a generalização da *sequência de Fibonacci*, o modelo matemático aqui empregado se apóia em bases elementares no nível inicial de uma graduação em

[3] Daqui em diante, quando nos referirmos ao símbolo $\left(f_n\right)_{n \in □}$, chamaremos de "sequência" (entre aspas) uma vez que, formalmente, chamamos somente de *sequência* uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

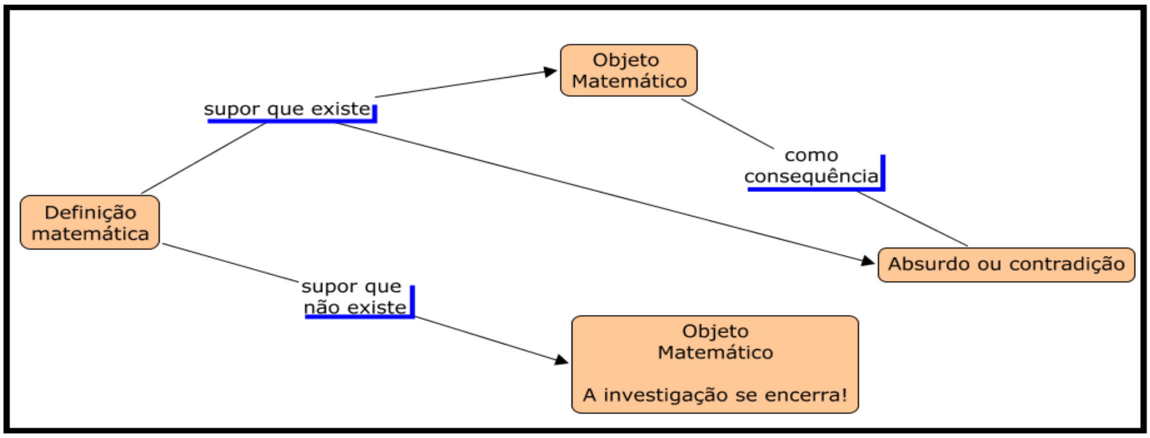
Licenciatura em Matemática, o que compreende conhecimento sobre a noção de *Indução Matemática*.

Ademais, uma vez que nosso interesse diz respeito também à possibilidade de existência de um objeto matemático, vale destacar, então, que alguns lógicos asseveram que devemos definir apenas coisas existentes, todavia, Kennedy (1973, p. 239) menciona que "Mill iniciou a partir de uma definição de algo que não existe e supôs sua existência, chegando a um resultado absurdo. Porém, a absurdez deriva do fato da suposição de existência de algo definido, e não do fato de se ter definido algo que não existe." (KENNEDY, 1973, p. 239).

Na figura 1, destacamos que a investigação em Matemática se torna produtiva quando conjecturamos, a partir de uma definição, a *existência* de uma nova entidade conceitual (a "sequência" $(f_n)_{n\in Z}$). Reparemos que se, no referido processo, não incorremos em uma contradição flagrante, poderemos dar continuidade ao processo investigativo no interior de um *corpus* teórico e produzir propriedades intrigantes.

Note-se ainda que, a *existência* de um objeto conceitual pode ser dada antes mesmo que tenhamos uma definição formal. Sendo assim, parafraseando Halmos (2001, p. 70), inicialmente, selecionamos um objeto que é um dos possíveis modelos do conceito a ser definido – "em outras palavras, um objeto, tal que, em termos intuitivos ou práticos, merece ser chamado, se é que merece ser chamado". Prosseguindo ainda de acordo com as orientações de Halmos, no segundo momento, tomamos o conjunto de todos os objetos no universo apresentando, pois, as mesmas propriedades que ensejamos evidenciar. Definimos, então, um objeto matemático "como o conjunto assim formado." (HALMOS, 2001, p. 70). Na fig. 1 vislumbramos de modo esquemático tal percurso.

Figura 1: Esquema de investigação e de busca por uma definição matemática



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Certamente, com origem no que mencionamos no parágrafo anterior, as ideias envolvendo a figura 1 residem num âmbito de natureza filosófica e epistemológica. Em nosso caso, evidenciaremos que a noção de *existência* e extração de determinadas propriedades do objeto que perquirimos dependem, por exemplo, do método de *Indução Matemática* que, de acordo com Halmos (2001, p. 80), serve muitas vezes não apenas para provar coisas, "mas também para definir coisas".

Vale ressaltar, todavia, a atitude filosófica assumida pelo matemático profissional no processo matemático investigativo. Neste sentido, Lima acentua que

> Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos. É apresentada uma lista de propriedades gozadas por eles (axiomas) e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que os números naturais são; (isto seria um problema filosófico) o que interessa é como eles se comportam. [...] De qualquer maneira, o mais importante não são quais axiomas que ele escolheu e sim a atitude que ele adotou, a qual veio a prevalecer na Matemática atual, sob o nome de método axiomático. (2010, p. 33).

Depreendemos, a partir das explicações acima, que a "atitude epistemológica" de aceitação da *existência* de determinadas entidades conceituais abstratas torna-se auspiciosa e, ante a própria evolução e consistência de determinada teoria, a negação de sua *existência* perde seu sentido. Passamos então a nos preocupar apenas com suas propriedades estruturais, como uma herança de um olhar condicionado pelo *método axiomático*[4]. Após este pequeno interregno filosófico, no próximo segmento, descrevemos *a problemática de nossa investigação*. Destacamos que esta se caracteriza como "o conjunto de questões coordenadas que se coloca num determinado quadro teórico para esclarecer o problema levantado e os objetivos do estudo." (ALMOULOUD, 2007, p. 169).

2. Problema da Pesquisa

O problema dessa investigação foi desenvolver uma *Engenharia Didática* que promova situações didáticas envolvendo a descrição, existência da "sequência" $\left(f_n\right)_{n\in Z}$ e a descrição, por parte dos alunos, de suas propriedades características fundamentais. A formulação deste problema indica uma dificuldade/entrave que pretendemos resolver ou, pelo menos, compreender, descrever e, possivelmente, replicar em outras situações.

[4] Registramos alguns autores (CHOQUET, 1963; KLINE, 1973) que atribuem como uma das características do *método axiomático* a eliminação progressiva dos fatores históricos que proporcionaram a evolução de determinado conhecimento matemático. O olhar passa, então, a ser de natureza *estrutural* e *categorial*.

3. Hipóteses da Pesquisa

Desde que apoiamos nossas ações nos pressupostos da ED, então, assumimos determinadas hipóteses de trabalho ao longo de todo o processo investigativo.

1ª) É possível definir a "sequência" $\left(f_n\right)_{n\in Z}$ com o uso da Indução Matemática.

2ª) A relações lógicas envolvendo os novos elementos da "sequência" $\left(f_n\right)_{n\in Z}$ são descritas pelos elementos da *sequência de Fibonacci* $\left(f_n\right)_{n\in IN}$.

3ª Mediante as atividades, os alunos empregam de modo inadequado o modelo de *Indução Matemática* ao campo dos inteiros negativos para provar propriedades.

4ª) Nenhum aluno vai definir formalmente uma *sequência recorrente* que relaciona os termos de $\left(f_n\right)_{n\in Z}$; ademais, manifestam dificuldades em lidar e/ou desenvolver um trato analítico com a nova simbologia.

Levando-se em conta estas quatro hipóteses de investigação, tencionando confirmar ou refutar contribuições teóricas a partir de uma argumentação que se apoiará em uma etapa de *experimentação*, apresentamos nosso objetivo de pesquisa. Vale um comentário, todavia, sobre a última hipótese. Nela, evidenciamos as concepções (CURY; LANNES; BROLEZZI & VIANNA, 2002) dos estudantes do curso de licenciatura adquiridas num espaço em que se vai aprender a demonstrar recorrendo ao *método de Indução*[5], empregado de modo restrito para provar propriedades e não para definir objetos ou coisas. Além disso, como indica Avital (1995, p. 5), de modo semelhante ao que se verifica na HM, devem ocorrer dificuldades na adoção da nova simbologia que descreve o comportamento em Z. Passamos então aos objetivos de nosso estudo.

4. Objetivos da Pesquisa

Este trabalho teve como objetivo geral implementar uma ED como metodologia de pesquisa, envolvendo um conteúdo específico de HM, a saber, a existência e a descrição das propriedades da *Sequência de Fibonacci* estendida ao campo dos inteiros.

Para alcançar este objetivo geral, delineamos ainda os seguintes objetivos específicos: descrever uma regra de obtenção dos termos da "sequência" $\left(f_n\right)_{n\in Z}$; relacionar o comportamento desta nova entidade conceitual com a nova sequência, atribuir uma

[5] Kneale & Kneale (1962, p. 520) advertem para o fato de que formulações envolvendo o uso em Teoria dos Números podem proporcionar dificuldades em razão da diversidade de interpretações do raciocínio empregado, validado pela lógica.

nomenclatura ou terminologia para a “sequência”$\left(f_n\right)_{n\in Z}$ e aplicar uma metodologia de ensino na estruturação das atividades envolvendo HM em sala de aula.

5. Metodologia da Pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada foi a *Engenharia Didática* - ED, a qual apresenta dois níveis de pesquisa - *microengenharia* e *macroengenharia*. A investigação em *microengenharia* traz uma visão mais restrita, na medida em que se interessa pelas relações e fenômenos ocorrentes em sala de aula e “são mais fáceis de desenvolver na prática” (ARTIGUE, 1995b, p. 36). Neste nível, podemos estudar determinado assunto no âmbito da complexidade da classe. No outro nível, deparamo-nos com dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais

Esta pesquisa é uma *microengenharia*, que busca desenvolver uma ED no ensino de História da Matemática - HM relativo ao conteúdo de *Sequência de Fibonacci* no campo dos inteiros e, apresenta um método de *validação interna*, que não emprega métodos e/ou modelos estatísticos comparativos. Nossa ED apresenta também *variáveis macrodidáticas* e *variáveis microdidáticas*. As primeiras dizem respeito à organização global da ED, enquanto que as *variáveis micro-didáticas* se relacionam com uma fase específica da ED, sobretudo, ao momento da *experimentação*.

Além disso, nossa ED se apoia, em sua *fase de experimentação*, na metodologia de ensino nomeada de *Teoria das Situações Didáticas – TSD* (BROUSSEAU, 1995; 1998). Deste modo, as atividades foram exploradas em sala de aula de acordo com as fases de ensino previstas como *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. Um caráter importante a salientar é que a TSD proporciona a criação de um ambiente experimental para a investigação em Matemática, de tal maneira que o aluno pode reproduzir, em escala elementar, passos semelhantes aos executados pelo matemático. Ademais, podem ocorrer a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos e, vale observar que tal modificação “é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa” (ALMOULOUD, 2010, p. 32).

Brousseau, Guy & Christol (2000, p. 3) recordam que desenvolver uma prática no campo da Didática da Matemática, envolve evitar certos reducionismos e, que, se exige uma sólida formação matemática, que permita um entendimento, também, de outras teorias. E, no que concerne à atividade matemática, Brousseau (1995, p. 350) observa que “em Matemática, existe de acúmulo de conhecimento, por meio de um jogo de definições relativas a novos objetos e, a partir delas, nos servimos em propor novas questões”. Ora, as *situações didáticas* que serão apresentadas na fase de *concepção* da ED, envolve a interação dos alunos, do professor e do saber atinente a uma “inesperada” definição matemática, relacionada com a listagem (**).

Por fim, a TSD possibilita a classificação de situações, envolvendo dialéticas de interação entre os sujeitos e o meio (*milieu*). Desse modo, observamos uma dialética ou *situação de ação*; uma dialética ou *situação de formulação*; uma dialética ou *situação de validação*, e por fim, uma dialética ou *situação de institucionalização* (ALMOULOUD, 2010, p. 38-39). Dessa maneira, passaremos a seção seguinte da ED.

6. Fases da Engenharia Didática – ED

6.1 Análises Preliminares

De modo sistemático, conforme Artigue (1995, p. 249-250), nesta etapa consideramos: a análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; a análise dos entraves/obstáculos no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; a análise das concepções dos alunos e, por fim, a análise do ensino atual acadêmico e dos seus efeitos. Convém evidenciar que todos os elementos anteriores levaram em consideração os objetivos desta investigação, relatados na seção 4.

As *análises preliminares* foram realizadas mediante pesquisa em livros didáticos, artigos de congressos, vídeos e *sites*, buscando autores que poderiam indicar a possibilidade de descrição formal da “sequência” $\{f_n\}_{n \in Z}$, seguindo nossa primeira e segunda hipótese. O objetivo desta revisão bibliográfica foi encontrar atividades didáticas potencializadoras do conceito envolvendo nosso objetivo geral. Desenvolvemos, então, uma *análise de conteúdo* (BARDIN, 1979), restringindo-nos apenas à etapa de *pré-análise* (BARDIN, 1979, p. 95), com a intenção de definir/discriminar a escolha dos livros e documentos pertinentes ao nosso estudo, bem como a formulação das hipóteses de trabalho envolvidas na pesquisa (seção 3).

Após a leitura inicial na etapa de *pré-análise* de livros sobre HM (ALVES, 2015b; BENJAMIN & QUINN, 2005; BURTON, 1980; DUNLAP, 2003; ESTRADA et al, 2000; EVES, 1983; HAMMACK, 2009; HONSBERGER; 1985; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; VOROBE´V, 1961; 1974; WELLS; 2005) e vídeos (SPIRA, 2007) concluímos que: os autores consultados relacionam a *sequência de Fibonacci* ao modelo produção dos coelhos, os autores empregam *Indução Matemática* para verificar propriedades intrínsecas desta "sequência" e seu vínculo com outros conceitos matemáticos; em sua maioria, os autores de livros consultados estão em outro idioma, com exceção de Estrada et al (2000), o que dificulta a leitura dos estudantes de graduação; apenas o autor Honsberger (1985) fornece indicações pouco detalhadas da obtenção de propriedades com índices em Z, e Vorobe´v (1961; 1974) fornece, de fato, algumas dessas relações em Z.

Vale o último comentário, ainda sobre as edições do livro que encontramos de Vorobe´v (1961. 1974). Na primeira versão que consultamos deste autor, registramos diferenças substanciais na estrutura do texto. De fato, nela encontramos considerações breves sobre a definição formal de *sequências recorrentes* e a possibilidade de descrever $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, enquanto que, na segunda tradução, não há resquício desta indicação. Por fim, nos *sites* consultados, não divisamos a preocupação com o caráter de formalização das propriedades relacionadas com as terminologias "*negafibonacci*" ou "*bidirecional sequence*". Na próxima parte, expressaremos a fase de *análise a priori*, que compreende uma parte *descritiva* e outra *preditiva* (ARTIGUE, 1995b, 45). A última parte centra-se nas características de uma *situação didática* que se tenciona conceber e explorar as interações entre professor, alunos e saber matemático.

6.2 Concepção e Análise *a Priori*

Nesta fase, elaboramos e analisamos uma sequência de atividades com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses suscitadas na fase anterior. Como características fundamentais destas cinco atividades, sublinhamos as seguintes: os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na situação; os conhecimentos dos alunos são insuficientes para a resolução completa. Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos." (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Por fim, na *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prevê Artigue (1995).

Atividade 1. Descreva a *sequência de Fibonacci*. É possível obter um modo *recursivo* para a descrição dos seus termos? Podemos calcular os valores de $f_0 = ?$, $f_{-1} = ?$, $f_{-2} = ?$ E, assim, sucessivamente?

Atividade 2. É possível generalizar o raciocínio anterior, descrevendo uma sequência recursiva para $-n \in \mathbb{Z}$, tal que $n \in IN$, e descrever uma relação para a obtenção da sequência $\left(f_{-n} \right)_{n \in IN}$.

Atividade 3. Com que tipo de objeto matemático estamos lidando? É uma sequência? Ela pode ser relacionada com a situação dos coelhos? Você já conhecia?

Atividade 4. Podemos verificar que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$? Como?

Atividade 5. Como verificar a propriedade descrita na atividade anterior sem usar *Indução Matemática*? Que nome poderíamos dar a esta nova “sequência”? Ela se relaciona com a situação dos coelhos no modelo clássico de Fibonacci?

A análise da concepção dos alunos acerca dos seus conhecimentos prévios sobre a *Sequência de Fibonacci* e da noção de *Indução Matemática* envolveu a delimitação do nosso campo conceitual. Ademais, a descrição das situações de acordo com a TSD nos serviu como referência e controle do significado (sentido) do conhecimento a ser constituído pelos aprendizes. Na próxima seção, apresentaremos e detalharemos as possíveis soluções dos estudantes. Sublinhamos que a mediação do professor se apoiará nos princípios da TSD. Neste trabalho, assumimos a importância de uma visão de complementaridade entre a ED e a TSD e sua relevância é registrada na literatura (ARTIGUE, 2009). De modo semelhante, encontramos trabalhos (LAGUERRE, 2005) que desenvolvem a mesma visão. Detalharemos os momentos e fases de ensino previstas pela SF no âmbito de uma investigação específica na próxima seção.

6.3 Experimentação

O experimento foi aplicado a uma turma do 4º semestre do curso de licenciatura em Matemática, no ano de 2015, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. As atividades desenvolvidas ocorreram durante as aulas da disciplina História da Matemática. Os instrumentos de coleta de dados foram entrevistas semiestruturadas, a produção escrita em sala de aula em duplas (total de oito alunos) e registros de áudio e imagens ao decorrer da aplicação das situações problema.

O problema da modelização da produção de coelhos é bastante divulgado na literatura que consultamos, e se mostrou familiar aos estudantes participantes, entretanto, a exploração de um problema, envolvendo relações explicitas e implícitas, entre os alunos, o professor e o saber matemático, constitui etapa fundante da TSD. Com isto, promovemos uma *situação didática* (BROUSSEAU, 1986, p. 399) que envolve a descoberta de propriedades matemáticas relacionadas de modo intrínseco à *sequência de Fibonacci* e, como parte fundamental desta, não revelamos a intenção de descrever/comunicar a noção da "sequência extendida de Fibonacci", o que constitui elemento de uma *situação adidática*, embora tenhamos imaginado e planejado.

De modo sistemático, seguimos as etapas:

Fase 1: Situação de Ação. No que se refere aos alunos, faz parte do seu papel a descoberta/identificação de um problema relevante. Assim, podemos questionar os alunos sobre as propriedades que podemos inferir da relação $f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ \forall \mathrm{n} \geq 2$, que descreve a *sequência de Fibonacci*. De modo particular, propomos as possibilidades de se avaliar $f_0 = ?$ ou $f_{-1} = ?$. Vale destacar que a definição do termo f_0 é sugerida pelo vídeo aula de Spira (2007), entretanto, neste conteúdo em vídeo, não se observa a adoção explícita de uma metodologia para o ensino de Matemática por meio de sua História. A fase inicial deve proporcionar o debate em sala de aula e os alunos têm a possibilidade de concluir que $f_0 = 0$ e devem fornecer a justificativa $f_{1+1} = f_1 + f_{1-1}$ p/n=1, segue então $f_2 = f_1 + f_0 \therefore f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$. Paulatinamente, os alunos têm a possibilidade de concluir também que $f_{0+1} = f_0 + f_{0-1}$ p/n=$1 \therefore f_1 = f_0 + f_{-1} \leftrightarrow f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$.

Dando prosseguimento a estas manipulações algébrico-aritméticas, podemos inferir ainda que $f_{-1+1} = f_{-1} + f_{-1-1}$ p/n=$-1 \therefore f_0 = f_{-1} + f_{-2}$, seguindo-se que $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1$. A mediação do professor evolui com ênfase no raciocínio indutivo. O caráter que deverá chamar a atenção dos estudantes diz respeito à obtenção dos termos, com ênfase em combinações aritméticas do tipo $f_0 = 0$, $f_{-1} = 1$ e $f_{-2} = -1$. Por fim, nesta fase esperamos que o aluno possa julgar sua ação e ajustá-lo. Na próxima fase, a troca de mensagens e informações entre os sujeitos será fundamental.

Fase 2: Formulação. Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação das variáveis mais pertinentes ou, melhor, exprimindo os elementos invariantes desta situação. A partir da fase anterior, no entanto, podemos orientar a construção das tabelas

$$\begin{cases} f_{-3} = 2 = f_{-1} - f_{-2} \\ f_{-4} = -3 = f_{-2} - f_{-3} \\ f_{-5} = 5 = f_{-3} - f_{-4} \\ f_{-6} = -8 = f_{-4} - f_{-5} \\ f_{-7} = 13 \\ \cdots ???? \end{cases}$$

. O problema principal expresso é a *possibilidade de generalização deste processo recursivo da sequência* obtida acima. Os alunos devem elaborar conjecturas a respeito do comportamento dos símbolos f_{-2n} e $f_{-(2n+1)}$ que descrevem os termos que poderíamos chamar de "pares" e "ímpares". Com isto, evidenciamos a "dialética da formulação" que, segundo Brousseau, consiste em fornecer condições aos alunos para que eles construam um linguagem compreensível para todos (ALMOULOUD, 2010, p. 38).

Por tal via, registramos a possibilidade de instalarmos uma debate científico em sala de aula. Sob tal circunstância, os alunos manifestam o desejo em aceitar a responsabilidade de nossa situações de aprendizagem. Não obstante, não explicitamos as intenções envolvendo a determinação do conhecimento de determina tais situações (atividades propostas). Dando prosseguimento à nossa condução, podemos relacionar as relações do seguinte modo:

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = f_1 \\ f_{-2} = -1 = -f_2 \\ f_{-3} = 2 = f_3 \\ f_{-4} = -3 = -f_4 \end{cases} \begin{cases} f_{-5} = 5 = f_5 \\ f_{-6} = -8 = -f_6 \\ f_{-7} = 13 = f_7 \\ \ldots \end{cases}.$$

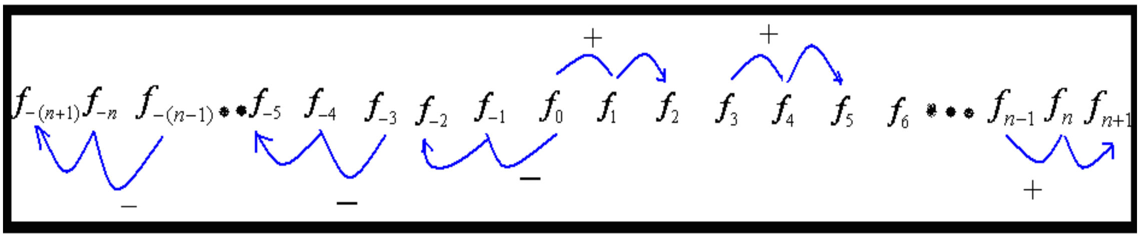
E ainda que

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \text{ p/ n=1} \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \text{ p/ n=2} \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \text{ p/ n=3} \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \text{ p/ n=3} \end{cases} \begin{cases} f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\ f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\ f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \\ \ldots \end{cases}$$

A partir destas relações, estimulamos a conjectura da seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$. Outra propriedade que é procurada se refere às relações de recorrência que exibimos na figura 2. Nela explicitamos relações aritmético-algébricas de uma nova entidade conceitual, que denotamos por $\left(f_{-n}\right)_{n \in IN}$, caracterizada pela relação $f_{-(n-1)} - f_{-n} = f_{-(n+1)}$ ou $f_{-(n-1)} = f_{-(n+1)} + f_{-n}$, para $n \in IN$.

Na figura 2, descrevemos o processo de obtenção dos demais elementos da "sequência" $\left(f_n\right)_{n \in Z}$. Note-se que, na *sequência de Fibonacci*, obtemos um termo a partir da soma dos dois anteriores. Neste caso, obtemos o próximo termo a partir da diferença entre dois termos anteriores "e assim por diante". Apoiar-nos-emos na concepção de Lima et al (2000, pp. 65) para definir uma *sequência recorrente* descrita pela lei $f_{-(n-1)} = f_{-(n+1)} + f_{-n}$, com $n \in IN$,uma vez que conhecemos os primeiros termos $f_0 = 0$ e $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$.

Figura 2: Relações de recorrência entre os elementos da *Sequência de Fibonacci* nos inteiros



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Fase 3: Validação. Neste momento, podemos demonstrar, por *Indução Matemática*, que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, $\forall n \geq 0$. Para tanto, definiremos o conjunto[6] $\wp := \{n \in IN \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\}$ ou o conjunto $\wp^* := \{-n \in \square \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\}$ e já verificamos há pouco que $\{1, 2, 3..., 7\} \subset \wp$. Usando a *hipótese indutiva* $n \in \wp$, resta-nos verificar que $n+1 \in \wp$; contudo o método de demonstração por *Indução Matemática* nos assegura que é possível escrever $f_{-(n-1)} = (-1)^{(n-1)+1} \cdot f_{n-1} = (-1)^n \cdot f_{n-1}$. Vejamos, então, o comportamento de $f_{-(n+1)} = f_{-(n-1)} - f_{-n} = (-1)^n \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^n \cdot f_{n-1} + (-1)^n \cdot f_n = (-1)^n \cdot (f_{n-1} + f_n) = (-1)^n \cdot f_{n+1}$.
Por fim, concluímos que $f_{-(n+1)} = (-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)(-1)(-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)^{(n+2)} \cdot f_{n+1}$.
O *conjunto indutivo* a ser utilizado neste caso será $\wp := \{n \in IN \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\}$, embora algumas das inferências acima possam ser evitadas. Veremos isto na próxima fase de ensino. Um problema que podemos levantar aos estudantes, todavia, diz respeito ao emprego do modelo de *Indução Matemática* aplicado ao campo dos inteiros negativos. Outro importante caráter, diz respeito à possibilidade matemática de definição de um novo objeto matemático (questão de ordem axiológica) e a verificação de sua *existência* (questão de ordem ontológica). Vale assinalar que, neste momento, os sujeitos imprimem a validade de um modelo matemático elaborado ou empregado. Almouloud (2010, p. 39) neste âmbito, observar que "a teoria funciona, nos debates científicos e nas

---

[6] Nesta fase precisamos descrever um *conjunto indutivo*, ou seja, um conjunto $X \subset \square$ de modo que se $n \in X$ então $s(n) \in X$, onde $s(n)$ é a imagem do elemento $n \in \square$ pela ação da *função sucessora* descrita por Lima (2004, p. 30).

discussões entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou refutá-las". Na próxima fase, indicamos uma abordagem que evita os problemas conceituais que deparamos em virtude do uso inadequado do método de *Indução*.

Fase 4: Institucionalização. Nos momentos finais de sua mediação, o professor deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores. Aqui, na perspectiva da TSD, exploramos a generalização do modelo matemático que depende dos níveis de compreensão dos estudantes relativa "aos níveis de rigor e abstração" (AVITAL, 1995, p. 5).

Verificamos, formalmente, que $f_{-2n} = -f_{2n} \leftrightarrow f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in IN$. As relações estabelecidas na fase anterior, contudo, sugerem a relação de uma *sequência recursiva* $f_{-(n-1)} - f_{-n} = f_{-(n+1)} \leftrightarrow f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$ para n $\in IN$ ou ainda. $f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$ (ver fig. 1). Notamos ainda que as relações $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in IN$ de algum modo se relacionam. Com efeito, vamos admitir provisoriamente que seja válida a seguinte relação $f_{2n+1} = f_{-(2n+1)}$. Desde que, a partir da relação de recorrência, escrevemos, substituindo 'n' por '2n', que $f_{-(2n-1)} = f_{-(2n)} + f_{-(2n+1)} \underset{hipótese}{\overset{usando}{\leftrightarrow}} f_{(2n-1)} = f_{-(2n)} + f_{(2n+1)} \therefore f_{(2n-1)} - f_{(2n+1)} = f_{-(2n)}$ (c). Por outro lado, usando a relação clássica da *Sequência de Fibonacci*, consideramos $f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1} \therefore f_{2n-1} - f_{2n+1} = -f_{2n}$ (d). Segue-se que de (c) e de (d) $-f_{2n} = f_{(2n-1)} - f_{(2n+1)} = f_{-(2n)} \leftrightarrow f_{-2n} = -f_{2n}$.

De modo análogo, assumimos provisoriamente que $f_{-2n} = -f_{2n}$ e verificamos que $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$. De fato, substituindo (2n-1) na fórmula $f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$, obtém-se que $f_{-(2n-1-1)} = f_{-(2n-1)} + f_{-(2n-1+1)} \therefore f_{-(2n-2)} = f_{-(2n-1)} + f_{-2n}$. Agora, escrevendo $-f_{(2n-2)} + f_{2n} \underset{hipótese}{\overset{usando}{=}} f_{-(2n-2)} - f_{-2n} = f_{-(2n-1)}$, segue que $f_{-(2n-1)} = f_{2n} - f_{(2n-2)}$, e usando a lei de recorrência clássica, estabelecemos no final que $f_{2n-2} + f_{2n-1} = f_{2n} \therefore f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$, consequentemente $f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2} = f_{-(2n-1)} \leftrightarrow f_{2n-1} = f_{-(2n-1)}$.

Com apoio neste raciocínio, evitamos a aplicação do modelo de *Indução Matemática* aos índices de Z. De fato, quando escrevemos $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, $\forall n \geq 0$, consideramos também a seguinte relação $f_{-(n-1)} - f_{-n} = f_{-(n+1)}$ ou $f_{-(n-1)} = f_{-(n+1)} + f_{-n}$, para $n \in IN$, apresentada na *fase de validação*. Assim, definiremos a "sequência" recorrente, de modo que conhecemos os seguintes termos iniciais: $f_0 = 0$ e $f_{-1} = 1$. Como consequência dessa definição que assumimos, poderemos inferir que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, $\forall n \geq 0$, com o uso da *Indução* no conjunto $\wp := \{n \in IN \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\} \subset IN$. Deste modo, podemos descrever a "sequência" $(f_n)_{n \in Z}$. Finalmente, fixamos o estatuto definitivo de um saber científico, na medida em que um modelo matemático foi construído e será validado pela classe. Relativamente a tal fase, assinalamos que "depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o disponível para a resolução de problemas matemáticos (ALMOULOUD. 2010, p. 38).

6.4 Análise *a Posteriori* e Validação

Nesta fase, foram analisados os dados obtidos na *fase de experimentação*. Colocamos em funcionamento todo o dispositivo estabelecido. Segue então a análise *a posteriori* que se apoia "no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação." (ALMOULOUD, 2007, p. 176). Na *experimentação*, consideramos observações realizadas sobre as sessões de ensino as produções escritas em sala de aula e a fala durante entrevistas semiestruturadas e uma atividade em grupo de dois alunos.

O experimento foi realizado em duplas e durou três horas, com a aplicação das cinco atividades. Fornecemos as atividades impressas e iniciamos a discussão com base na análise da vídeoaula de Spira (2007). Contrastando com os autores dos compêndios de HM consultados, Spira inicia a *Sequência de Fibonacci* por $f_0 = 0$. Observando isto, requisitamos aos alunos na fase de *tomada de posição* a atribuição de um significado para tal termo. Na primeira dupla analisada de alunos, obtivemos a seguinte resposta.

Figura 3: A dupla 1 forneceu um significado ao termo de índice zero na fase de ação.

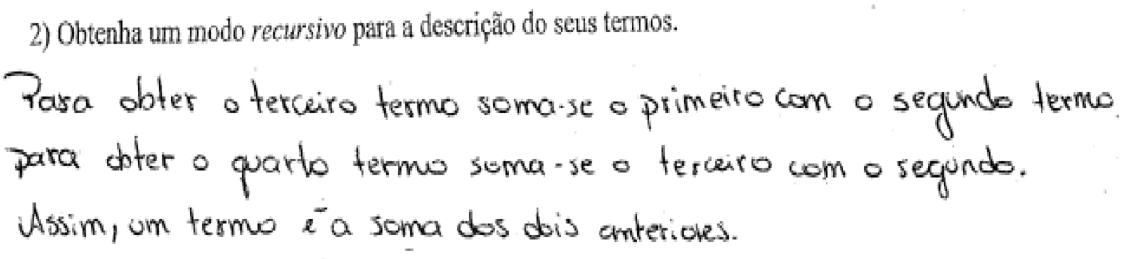

1) Descreva a sequência de fibonacci?

$f_0=0$ no exemplo do coelho significa o nascimento do coelho.

Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Na figura 4, a dupla 1 descreveu o comportamento da *Sequência de Fibonacci*, de acordo com o que requisitamos na atividade 1. Dando continuidade às atividades, requisitamos uma descrição da "sequência" em Z.

Figura 4: Na fase de formulação, a dupla 1 descreveu um modo de se produzir mais termos da sequência.


2) Obtenha um modo *recursivo* para a descrição do seus termos.

Para obter o terceiro termo soma-se o primeiro com o segundo termo para obter o quarto termo soma-se o terceiro com o segundo. Assim, um termo é a soma dos dois anteriores.

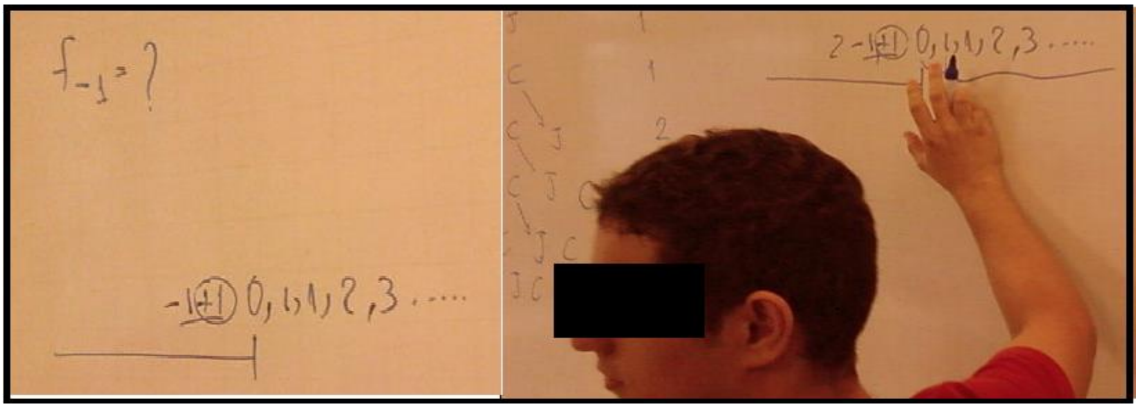
Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Quando questionado sobre suas conjecturas ao decorrer das atividades propostas 1 e 2, um dos membros da dupla 1 respondeu:

> Bem interessante, passei muito tempo atrás de um termo geral... e envolve o número de ouro.. é impressionante mas o resultado vai dar nos naturais...é possível obter um termo geral...eu fiz assim [...] A soma dos anteriores dá esse...o problema agora é fazer os negativos desse lado, pois a soma de dois negativos nunca dá zero [...] A minha ideia é definir os dois primeiros...nos negativos a gente também pode definir uma quantidade finita...Esse resultado é esquisito pois eu não esperava [...]

No excerto acima, o sujeito faz referência às relações conceituais discutidas no vídeo de Spira (2007). Notemos que sua investigação consumiu tempo de reflexão e esforço mental. De acordo com a hipótese 4, a dupla 1 enfrentou dificuldades para definir o comportamento da “sequência” em Z . Sublinhamos a manifestação de surpresa, quando um dos elementos da dupla 1 declarou: “Esse resultado é esquisito, pois eu não esperava...”. Na figura 5, registramos suas atividades há pouco relatadas.

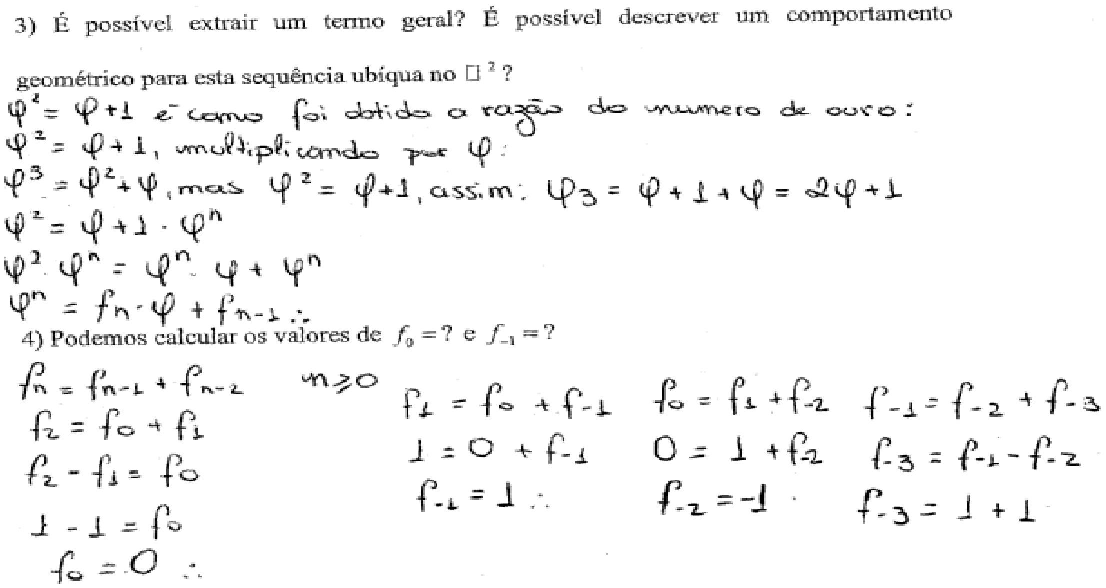
Figura 5: Um dos membros da dupla 1 explicitou aos demais a dificuldades de se prever o comportamento da sequência à esquerda na fase de formulação



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Nos momentos iniciais, o vídeo de Spira (2007) influenciou a produção escrita da dupla 1. Na figura 5, o aluno indica que os termos da *sequência de Fibonacci* são obtidos a partir das relações com o *número de ouro*. Sua declaração foi confirmada a partir do estudo do vídeo. Em seguida, os alunos da dupla 1 substituíram, de modo arbitrário, alguns valores de n que possibilitaram a solução da atividade 1.

Figura 6: A dupla 1, na fase de solução, sugeriu as relações com o *número de ouro*.


3) É possível extrair um termo geral? É possível descrever um comportamento geométrico para esta sequência ubíqua no □ ^{2} ?

$\varphi^2 = \varphi + 1$ é como foi obtido a razão do numero de ouro:

$\varphi^2 = \varphi + 1$, multiplicando por φ:

$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$, mas $\varphi^2 = \varphi + 1$, assim: $\varphi_3 = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$

$\varphi^2 = \varphi + 1 \cdot \varphi^n$

$\varphi^2 \cdot \varphi^n = \varphi^n \cdot \varphi + \varphi^n$

$\varphi^n = f_n \cdot \varphi + f_{n-1} \therefore$

4) Podemos calcular os valores de $f_0 = ?$ e $f_{-1} = ?$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $n \geq 0$

$f_2 = f_0 + f_1$

$f_2 - f_1 = f_0$

$1 - 1 = f_0$

$f_0 = 0 \therefore$

$f_1 = f_0 + f_{-1}$

$1 = 0 + f_{-1}$

$f_{-1} = 1 \therefore$

$f_0 = f_1 + f_{-2}$

$0 = 1 + f_{-2}$

$f_{-2} = -1$

$f_{-1} = f_{-2} + f_{-3}$

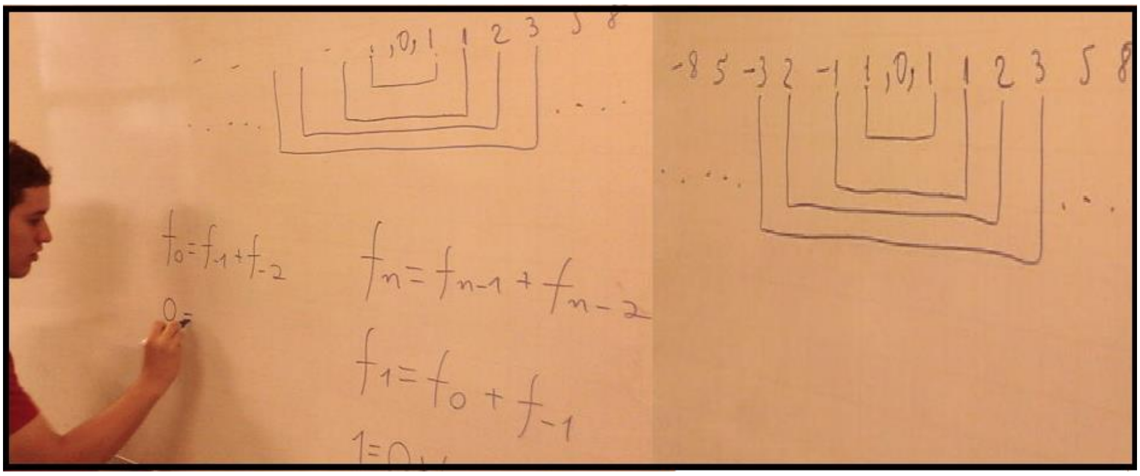
$f_{-3} = f_{-1} - f_{-2}$

$f_{-3} = 1 + 1$

Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Na *fase de formulação*, a dupla 1, ao decorrer da atividade 2, indicou as possíveis relações sem, no entanto, fornecer de imediato, um argumento formal. Observamos isto na figura 6. Nela divisamos os termos procurados na atividade 2.

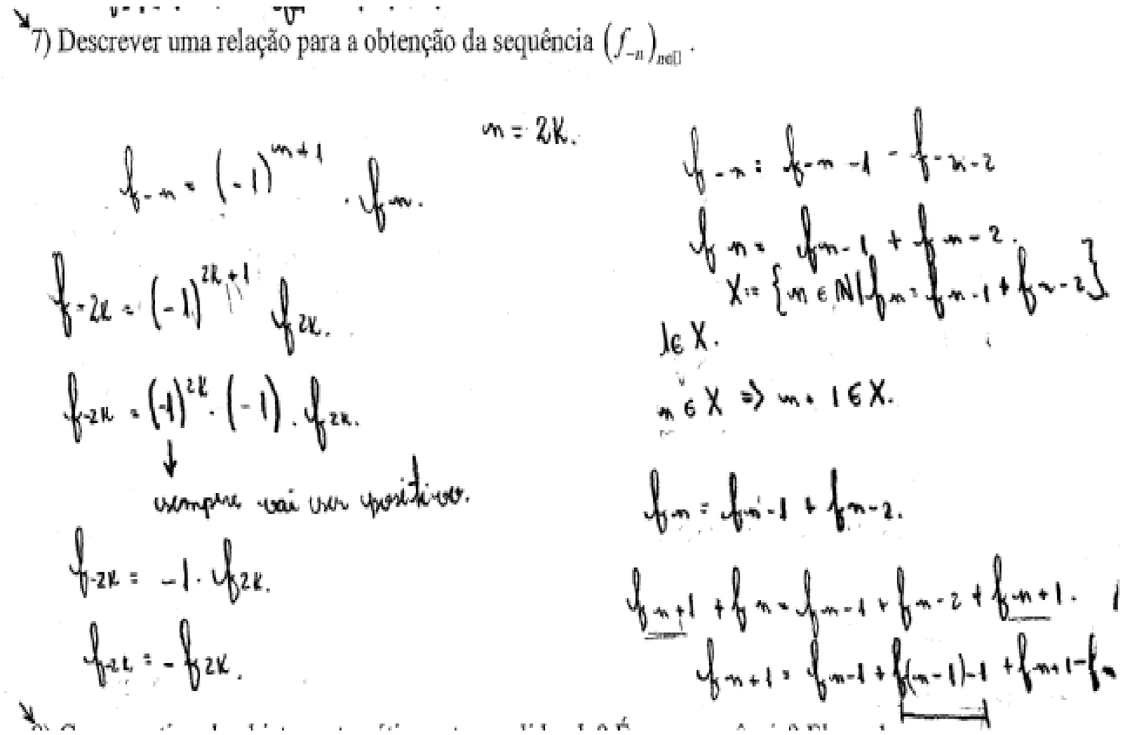
Figura 7: A dupla 1 propôs uma lei de formação para a sequência no campo dos inteiros.



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Na figura 7, durante a *fase de validação*, registramos a tentativa de demonstração por parte da dupla 1. Observamos no lado esquerdo da figura 8 que os alunos usaram a própria tese (flagrante transgressão do modelo matemático) para realizar tal verificação. Notamos do lado direito da mesma figura a descrição de um conjunto indutivo, que envolve o processo de *Indução Matemática*, entretanto, não obteve êxito.

Figura 8: Na fase de validação, a dupla 1 apresentou uma argumentação formal.



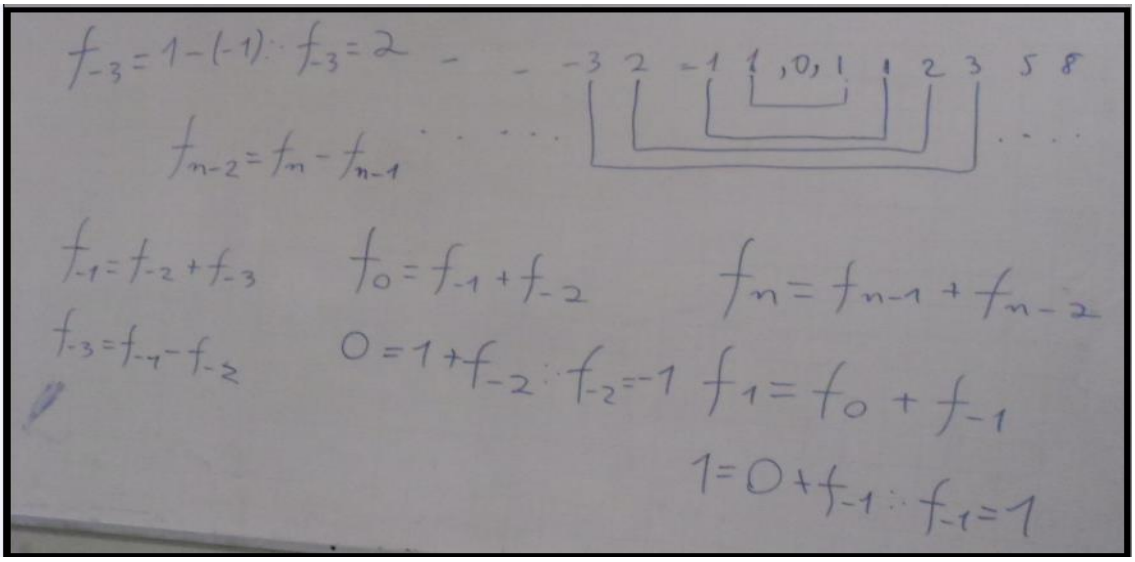
Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Na análise da dupla 2, registramos dúvidas e incertezas semelhantes ao que observamos na atividade da dupla 1. Por exemplo, na *fase de formulação* e *validação*, um dos alunos da dupla 2 declarou:

> Eu estou achando que a fórmula é essa... ela pega todo mundo...essa fórmula foi conjecturada...a gente pode...a gente tem que fazer o lado que a gente tá com dificuldade...o lado de lá...pode fazer por indução....a parte negativa é o que a gente quer [..] No caso de positivo eu coloquei negativo.. a gente tem que escolher o f_{-1}. Vou tentar depois provar por indução [...] Você pode calcular o f_0, a gente já sabe que é verdade [...] Podemos calcular resto a partir daqui...vou calcular $f_1 = f_0 + f_{-1}$, pois substituo na fórmula inicial de Fibonacci e $n \geq 0$. Em seguida, obtemos que $f_1 - f_0 = f_{-1}$.

Observamos no discurso de um dos alunos da dupla 2 que a dificuldade em se obter demais números negativos, por meio de um modo recursivo, mostrou-se difícil, como prevemos na hipótese 4. Sublinhamos apenas algumas operações e inferências realizadas por esta dupla que, na evolução da atividade para a *fase de prova*, buscou um método de demonstração formal que poderia ratificar o caráter de aceitação das propriedades encontradas nas fases anteriores da TSD (ver figura 9).

Figura 9: Propriedades e regras descobertas pela atividade da dupla 2 na fase de validação.



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

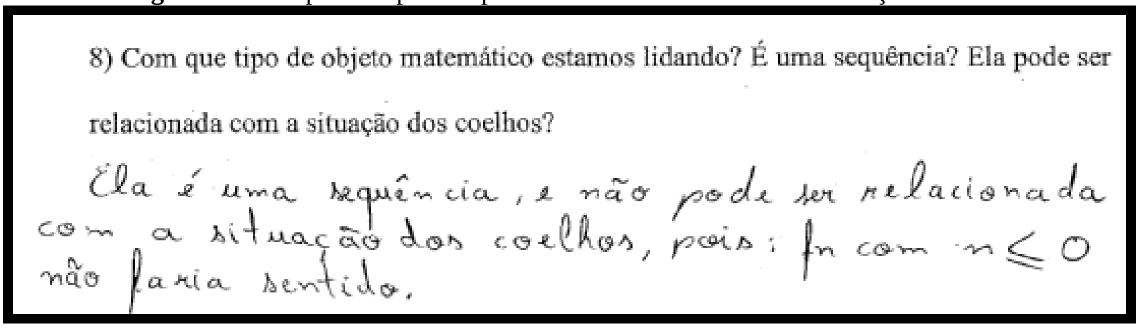
Quando questionado sobre sua estratégia, o outro componente da dupla 2 explicou que “Pode aplicar indução...o n está nos naturais....aqui é apenas a fórmula...em Z eu não conheço...”. Ao ser questionado sobre a confiança que detinha ao desenvolver uma série de inferências relativas às suas deduções lógicas, acrescentou ainda que “Acredito, pois por dedução....e posteriormente...por demonstrações....quando demonstramos algo poderemos ter a certeza...sobre ela.”

Na *fase de validação*, perguntamos à dupla 2 a possibilidade de nomear ou descrever uma nomenclatura (atividade 5) de um novo objeto matemático que fora conhecido pela dupla ao decorrer das atividades propostas e, como resposta, ouvimos que “É por instinto... porque dá certo...mas temos que provar.. o nome dela seria sequência estendida...”. O que confirma nossa 4ª hipótese de trabalho.

Esta ultima declaração confirma um dos nossos objetivos específicos de pesquisa. Reparemos ainda que ao mencionar o vocábulo “instinto”, interpretamos como “intuição”. Neste trecho, observamos a contraposição feita por um dos membros da dupla 2, que indicou a possibilidade de certeza e convicção do conhecimento obtido com a condição da realização de uma prova ou demonstração *a posteriori*.

Questionamos a dupla 2 sobre a certeza dos resultados obtidos e um dos elementos da equipe explicou: “Acredito... por que já fizemos seus valores para o lado negativo....não temos certeza....por que ainda não consegui provar matematicamente....”. Notamos aqui a confirmação da 4ª hipótese de trabalho no caso da dupla 2. Na sequência, indicamos sua resposta com respeito à atividade 5.

Figura 10: A dupla 2 respondeu parte da atividade 5 na fase de validação da TSD.

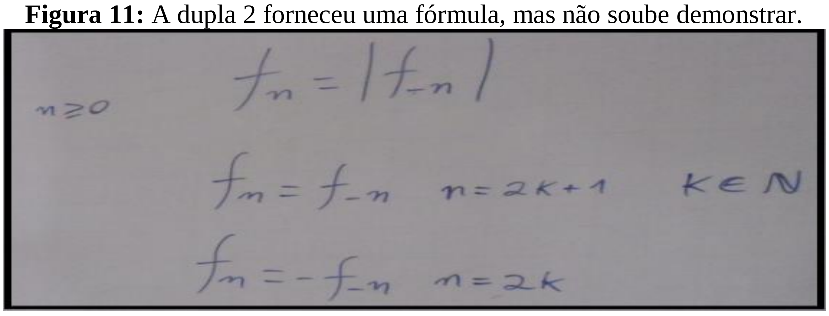

8) Com que tipo de objeto matemático estamos lidando? É uma sequência? Ela pode ser relacionada com a situação dos coelhos?

Ela é uma sequência, e não pode ser relacionada com a situação dos coelhos, pois: f_n com $n \leq 0$ não faria sentido.

Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

No final da atividade, a dupla 2 apresentou a fórmula que exibimos na figura abaixo, sem, no entanto, fornecer uma demonstração para tal.

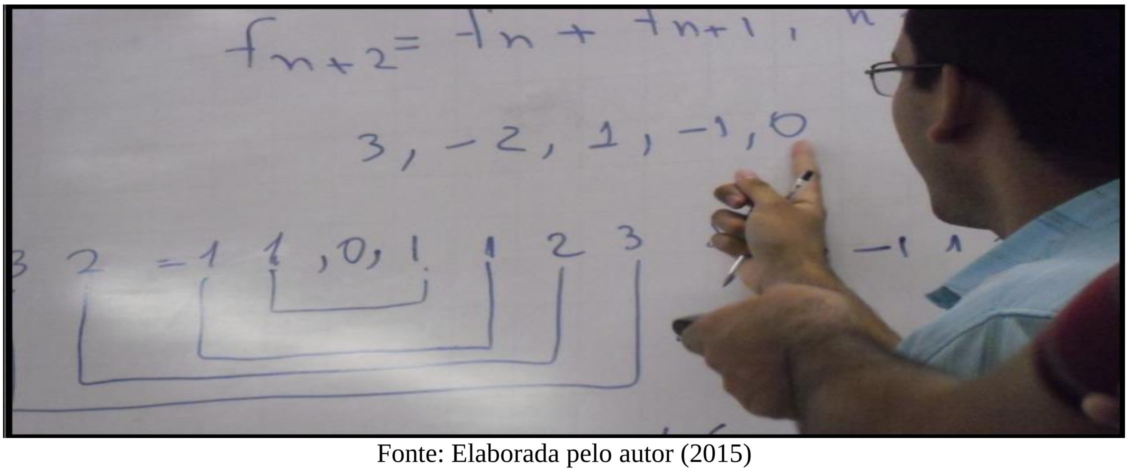
Figura 11: A dupla 2 forneceu uma fórmula, mas não soube demonstrar.



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Com respeito à dupla 3, no momento da *fase de validação* da atividade 1, ela nos explicou o comportamento inesperado da sequência investigada, fato que observamos na figura 12. A discussão evoluiu com vistas a se encontrar uma maneira recursiva de obtenção dos números referentes a uma disposição à esquerda (ver figura 12).

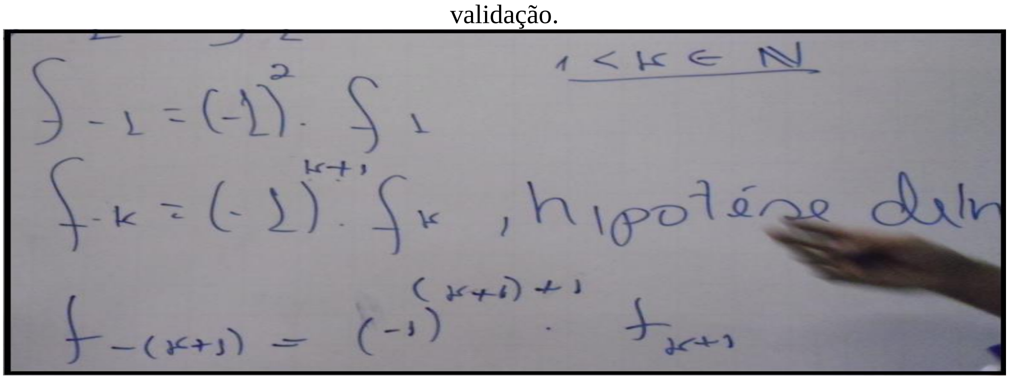
Figura 12: A dupla 3 explicou o comportamento da sequência nas fases de formulação



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

O problema que deparamos é como efetivar tal descrição, semelhante à regra de recorrência familiar da *Sequência de Fibonacci*, que envolve obter cada termo realizando a soma dos termos anteriores (ver figura 2). No caso das atividades 2 e 3, encontramos a necessidade de lidar com algo semelhante, todavia, a dupla 3 percebeu que não se tratava mais de uma soma dos termos. Na *fase de validação*, a dupla 3 procurou uma justificativa formal para toda a sua estratégia implementada na *fase de formulação*. Deste modo, reparemos na figura 13 que a referida dupla empregou o método de demonstração por *Indução Matemática*. Notamos que os índices envolvendo o modelo indutivo estão em Z, todavia, a dupla 3 não indicou um *conjunto indutivo* adequado ao qual desenvolveu o procedimento que vemos na figura 13.

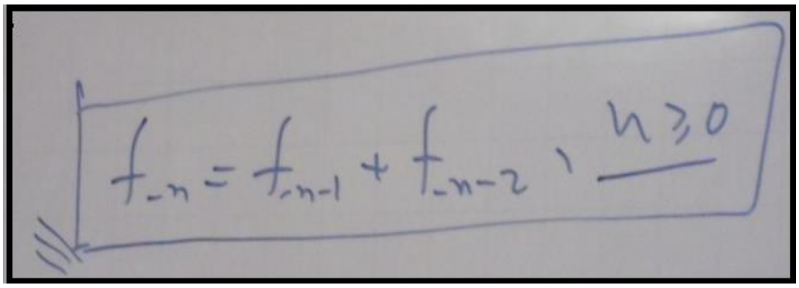
Figura 13: A dupla 3 empregou o método de demonstração envolvendo a *Indução Matemática* na fase de validação.



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

No final da *experimentação* que realizamos com a dupla 3, deparamos a lei de recorrência descrita pela dupla. Observamos que ela se assemelha à relação entre os pares e os ímpares que indicamos na seção passada, na *fase de validação*. Neste caso, alcançamos a hipótese três (seção três), uma vez que os alunos aplicaram o modelo indutivo ao campo dos inteiros negativos.

Figura 14: A lei de recorrência para o comportamento dos termos da *sequência* no campo dos inteiros.



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Dando prosseguimento à entrevista, perguntamos à dupla 3 se, a partir dos dados inferidos ao decorrer de nossa mediação didática, podemos comprovar a existência de uma "*sequência" de Fibonacci* nos inteiros. Um dos sujeitos nos forneceu a seguinte resposta por escrito (figura 15):

Figura 15: A dupla 3 forneceu sua justificativa para os dados encontrados durante a fase de validação previsto pelo TSD.

Sim existe, f_{-n} existe com $n \in \mathbb{N}$, mas só podemos assumir como verdade quando temos uma aplicação de indução para f_n, $n \in \mathbb{N}$ e após isso mostramos que existe $f_{-n} = f_n (-1)^{n+1}$ para uma determinada função par, tudo isso para mostrar que $\mathbb{Z}$ é válido, por meio de deduções lógicas.

Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Notamos na figura 15 que o sentimento de certeza e convicção quanto à existência da sequência analisada depende do uso do método de *Indução Matemática*. A dupla 4 forneceu uma terminologia ou nome para a nova entidade conceitual. Assim, reparemos na figura 16 que a dupla 4 atribuiu a denominação de "sequência estendida de Fibonacci" à nova entidade conceitual obtida a partir da *Sequência de Fibonacci* original. Vale destacar que a confiança no tocante à declaração da *existência* da sequência investigada deriva totalmente da possibilidade da evolução das deduções lógicas desenvolvidas pela referida dupla. Observamos isto na figura 16 e assinalamos que, neste momento, averiguamos a nossa 2ª hipótese de investigação.

Figura 16: A dupla 4 chamou de "sequência estendida de Fibonacci"

Partindo de deduções, podemos acreditar na possível existência desse objeto. Mas só após demonstrações formais Poderemos ter a certeza da existência.

Sequência de Fibonacci extendida aos inteiros.

Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Quando questionado sobre as deduções desenvolvidas sobre a caracterização da *recorrência* da "*sequência"* sobre $\mathbb{Z}$, na *fase de validação*, um dos membros da dupla 4 respondeu:

> Eu posso dizer que esse n... f_n é igual...ao f_{-1} vai manter a mesma condição...concorda? A vantagem é que $n-k$ vai dar os valores nos inteiros...o n está fixo e o k está variando....Se $k>n$ vai dar negativo...eu vou fazer...o termo geral....Tem número negativo ali...se fizermos indução conseguiremos apenas o lado positivo....Para $n=2k$ na igualdade (na fórmula) que você me deu...acho que é verdade...vou ver se encontro uma verdade....

Reparemos que a dupla 4 realizou uma série de inferências lógicas e substituições ($n=2k$ e n=2k+1) em uma fórmula para a qual não tínhamos naquela fase a confirmação de sua validade; mesmo assim, a dupla prosseguiu realizando as substituições. No jargão matemático, a dupla 4 empregou a própria tese para obter uma propriedade ensejada, o que constitui uma transgressão de certas regras matemáticas. Este caso e outros registrados confirmaram nossa 4ª hipótese de trabalho.

Quando questionado mais uma vez, um dos membros da dupla 4 acrescentou que "pelo pensamento intuitivo....isso não é correto...estou substituindo aqui...". A dupla 4 confirmou usar a própria fórmula que tencionava validar. Acrescentou, ainda: "Mas isso não é indução, não....isso não pode, não....começa por $n=1$...e depois para $n+1$...Vamos tentar até dar certo."

Reparemos que a dupla 4 tentou verificar a seguinte expressão $f_{-n}=(-1)^{n+1}\cdot f_n,\ \forall n\geq 0$. O entrave aqui detectado é que ela substituiu valores pares e ímpares correspondentes aos índices e usava a própria tese, a saber, a própria igualdade $f_{-n}=(-1)^{n+1}\cdot f_n$, que pedimos na atividade 4. Por fim, como resposta da atividade 3, a dupla 4 sugeriu a expressão "sequência estendida", para explicar o comportamento de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Os dados coligidos nas etapas anteriores serviram para consubstanciar as escolhas feitas sobre o estatudo final do saber na *fase de institucionalização*.

Para concluir, observamos que as respostas das quatro duplas se assemelharam bastante na resolução da atividade 5. No próximo segmento, indicamos os elementos mais importantes desta investigação.

Conclusão e Reflexões Finais

Com base na *Engenharia Didática* - ED, realizamos todas as análises internas e, por esta via, pudemos verificar a validade das cinco atividades estruturadas, desenvolvidas e mediadas na *fase de experimentação*. Vale destacar o fato de que em estudos recentes (LAGUERRE, 2005), fortemente influenciados pela cultura didática francesa, que "foi construída sobre a base da teoria construtivista do conhecimento" (ARTIGUE, 1995b,

p. 46), observamos o uso de abordagens didáticas envolvendo uma visão de complementaridade entre a ED e a *Teoria das Situações Didáticas* – TDS ou a ED e a *Teoria Antropológica do Didático* – TDA. Outrossim, ante o clima de investigação histórico-científica promovido em sala de aula, proporcionamos a estruturação de situações didáticas que apresentam o potencial de permitir sua *replicabilidade* (ARTIGUE, 1995, 51) em outras experimentações.

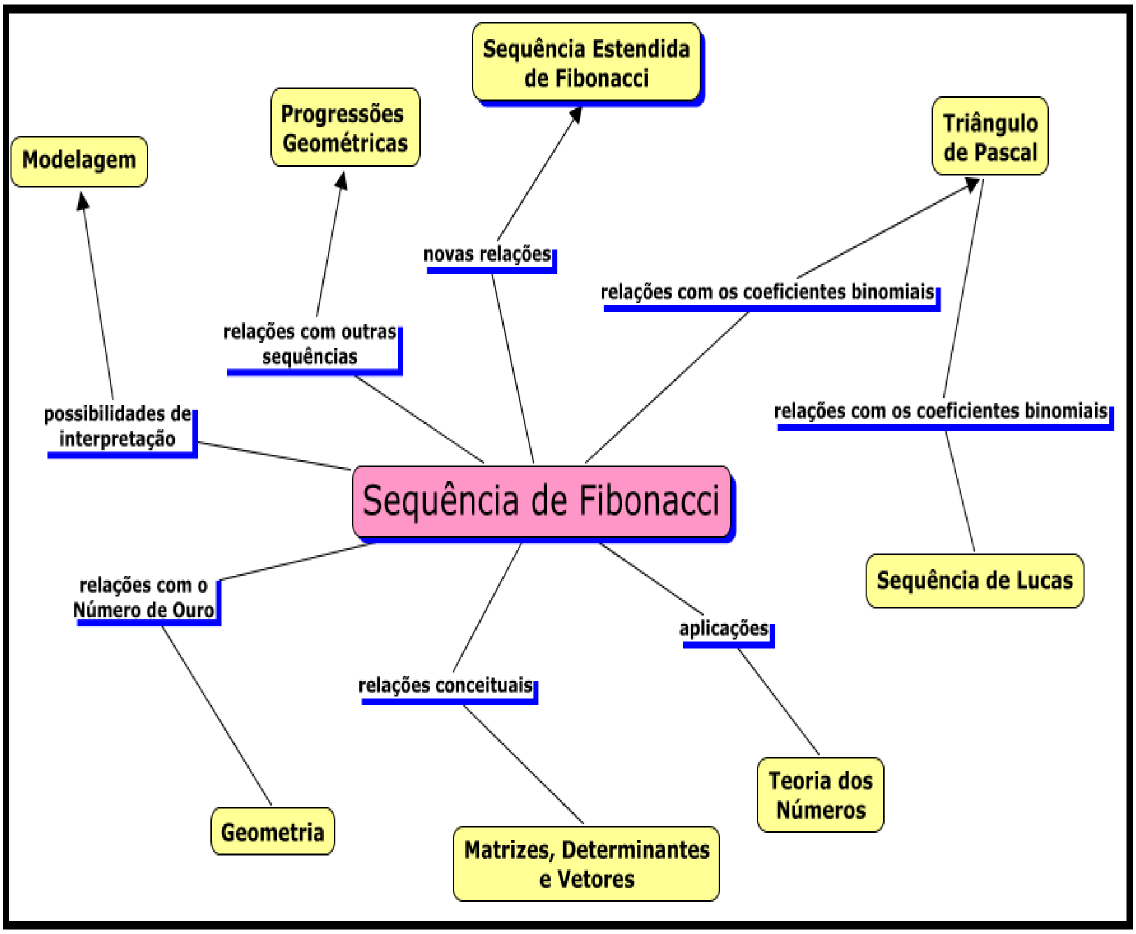
De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED, e da TSD na fase de *experimentação*, proporcionou uma prática controlada na intervenção em sala de aula e, sobretudo, pode auxiliar na compreensão da prática do professor atuante no contexto de ensino da HM em cursos de formação inicial. Tal fato confirma/indica que alcançamos um dos nossos objetivos específicos (ver seção 4).

Na fase de *análises preliminares*, como origem no problema escolhido, foi possível a realização/estruturação de uma ED com um tema do contexto do ensino de Matemática por meio de sua História e explicitar aos estudantes participantes que, a Matemática representa "um conhecimento cumulativo" (AVITAL, 1885, p. 7) caracterizado pelo resultado do esforço e contribuição de vários pensadores, em momentos distintos da História. Com esta preocupação, a *Sequência de Fibonacci* foi escolhida em decorrência do seu caráter ubíquo na Matemática, como assim alguns autores indicam (HUNTLEY, 1970; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; VOROBE´V, 1961).

Vejamos na figura 17 o caráter ubíquo da *Sequência de Fibonacci* e suas inúmeras relações conceituais que podem ser exploradas no contexto de graduação.

]

Figura 17: Relações que evidenciam o caráter ubíquo da *Sequência de Fibonacci*



Fonte: Elaborada pelo autor (2015)

Na *fase de experimentação* da ED, verificamos que as quatro atividades propostas possibilitaram o engajamento das quatro duplas de licenciandos em Matemática. De modo mais preciso, na fase de *ação*, com o estímulo inicial de uma vídeoaula de Spira (2007) que relaciona a *razão áurea* com a *Sequência de Fibonacci*, os alunos conjecturaram a possibilidade da evolução da noção da *Sequência de Fibonacci* para "o lado esquerdo", equivalente aos valores inteiros negativos, a partir da indicação de Spira do valor de $f_0 = 0$, interpretado pelo grupo como a situação de nascimento dos coelhos (comparar as listas numéricas (*) e (**)).

Ademais, na *fase de validação*, os sujeitos manifestaram com surpresa algumas propriedades inéditas para eles, como podemos observar nas entrevistas. Na *fase de formulação* e *fase de validação*, podemos verificar que as hipóteses propostas 1 e 2 foram alcançadas. Na fase de *análise a posteriori* e *validação da ED*, constatamos, a partir dos dados coletados, que os alunos manifestaram espanto com respeito à propriedade investigada da sequência $\{f_n\}_{n\in Z}$. Ademais, procuraram um método de demonstração formal de suas propriedades, todavia, todas as estratégias recorreram ao método de *Indução Matemática*. Destarte, nenhum dos alunos das quatro duplas participantes da investigação indicou uma demonstração alternativa sem o uso da *Indução Matemática*, segundo o percurso que indicamos na figura 1.

Halmos (2001, p. 102), num contexto de atuação específica, recorda que o matemático experiente recorre a sua experiência que "torna-o capaz de ver logo como transformar o esboço numa prova rigorosa", todavia, em nosso caso, a maior dificuldade enfrentada pelas quatro duplas de sujeitos consistiu, mormente na formalização/sistematização das ideias em torno da obtenção de uma prova rigorosa.

Atividades como esta reforçam a importância do ensino de Matemática por intermédio de seus aspectos históricos e, por sua vez, "o desenvolvimento histórico pode nos ensinar sobre possíveis dificuldades no aprendizado" (AVITAL, 1995, p. 11). E no contexto do aprendizado, sublinhamos que o momento didático em que precisamos garantir a *existência* e fornecer um nome ao novo objeto conceitual descoberto durante as atividades foi essencial, uma vez que registramos dificuldades recorrentes nas duplas. Ademais, alcançamos esse objetivo específico quando, por meio do consenso e resultado do debate estabelecido em sala de aula, entre os sujeitos participantes do experimento, passaram a nominar (chamar) o símbolo $(f_n)_{n\in Z}$ de "sequência estendida de Fibonacci" (um dos objetivos específicos). Por fim, sublinhamos que a visão pedagógica do uso que fizemos neste experimento apoiado nos fundamentos da ED envolve certamente uma visão de formação de professores de Matemática (ALVES, 2015a; 2015b). Tal ótica fortalece a necessidade de uma base consistente relativa aos saberes relativos a HM. Neste sentido, o uso da *Engenharia Didática* pode funcionar como elemento importante para cursos de formação desta natureza, na medida em que podemos reconhecer situações didáticas reproduzíveis em curso de outras experimentações, como assim sugere Artigue (1995a, p. 265-266; 1995b, p. 50).

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco, R. V. & BORGES NETO, Hermínio. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. In: **Boletim GEPEM**, pp. 125-130, 2012. Acessado em: 02/02/2015. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=current&path%5B%5D=showToc

ALVES, Francisco, R. V. & BORGES NETO, Hermínio. Sequências de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequência fedathi. In: **V Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. pp. 1-12, 2010. Disponível em: http://www.gente.eti.br/comunications/papers/papersfiles_upd/dbxfrsaqztvfr.pdf. Acessado em: 10/02/2015.

ALVES, Francisco, R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. In: **VIDYA Revista Eletrônica**, v. 35, nº 1, pp. 133 – 146, 2015a. Disponível em: http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/issue/view/33. Acessado em: 10/02/2015.

ALVES, Francisco, R. V. Sequência Generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. In: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 2, nº 6, pp. 26 – 32, 2015b. Disponível em: http://seer.uece.br/?journal=BOCEHM&page=issue&op=archive.

ARTIGUE, Michelle. Ingénièrie didactique. In: Brun, J. **Didactiques des Mathématiques**. Paris : Délachaux et Niestle, pp. 243-263, 1995a.

ARTIGUE, Michelle. Ingenieria Didática. Artigue, Michelle ; Douady, Régine ; Moreno, Luis & Gomez, Pedro. In: **Ingeniéria didatica en Educacion Matemática**. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 33-61, 1995b. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf. Acessado em: 20/02/2014.

ARTIGUE, Michelle. Didactical design in Mathematics Education. In: Winslon, Carl. (ed.) Nordic Research in Mathematics Education. In: **Proceedings NORMA08**, pp. 7-17, 2008. Disponível em: https://www.sensepublishers.com/files/9789087907839PR.pdf. Acessado em: 20/02/2014.

AVITAL, Samuel. (1995). History of Mathematics can help improving instruction and learning. In: Swetz, Frank. **Learn from the Master**. Washington: MMA, pp. 3-13, 1995.

BALESTRI, Rodrigo, D. **A participação da História da Matemática na formação inicial de professores de Matemática na ótica de professores e formadores** (dissertação de mestrado em ensino de Ciências e da Matemática). Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2008, 106p.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BROUSSEAU, Brother. Alfred. A fibonacci generalization. In: **The Fibonacci Quartely**, v. 5, nº2, pp. 171-175, 1967. Disponível em: http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acessado em: 10 junho 2014.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d´enseignement de mathématiques**. (thése D´État et sciences) – Université de Bordeaux I. Bordeaux. 1986, 905p. Disponível em: http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/50/92/25/PDF/TheseetAnnexesGBA.pdf. Acessado em: 10 junho 2014.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In: BROUSSEAU, Guy. **Théorie des situations didactiques** (pp. 115-160). Grenoble La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, Guy & CHRISTOL, Gilles. L´étude doctorale de didactique des mathématiques a l´univcrsité. In: **Gazette de Mathématicien**, nº 85. pp. 55-60, 2000.

BURTON, David. **Elementary Number Theory**. London: Allyn and Bacon Inc, 1980.

CHOQUET, Gustave. **What is Modern Mathematics**. England: Lamport Gilbert & Co. 1963.

CURY, Helena, N.; LANNES, Wagner.; BROLEZZI, Antonio, C & VIANNA, Carlos, R. **Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática**, In: **Educação Matemática em Revista** – RS, nº 4, pp. 9-15, 2002.

DAMBROS, Adriana, A. **O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino de matemática: possíveis relações** (tese de doutorado). Departamento de Educação: Universidade do Paraná, 2006, 193p.

DUNLAP, Richard. **The golden ratio of Fibonacci numbers**. London: World Scientific, 2003.

Estrada et al. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, Howard. **Great Moments in Mathematics: before 1650**. New York: Mathematical Association of America, 1983.

FAUVEL, John. & MAANEN, Jan Van. **History in Mathematics Education**. New York: Klumer Academic Publishers, ICMI, 2002.

FERNS, H. H. Pseudo-fibonacci Sequence. In: **The Fibonacci Quartely**. v. 6, nº6, pp. 305-318, 1968. Disponível em: http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acessado em: 10 junho 2014.

Fibonacci Numbers. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre**. Wikipédia, 2014. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number. Acesso em: 12 junho 2014.

Fibonacci Sequence. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre**. Wikipédia, 2014. Disponível em: http://portal.groupkos.com/index.php?title=Fibonacci_Sequence Acesso em: 13 junho 2014.

FOSSA, John, A. A História da Matemática como uma fonte de atividades matemáticas. In: FOSSA, John, A. (org.) **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Pará: Editora da Universidade do Pará, pp. 57-72, 2001.

FRIED, Michael. Didactics end History of Mathematics: knowledge and self-knowledge. In: **Educational Studies in Mathematics**, 66, pp. 203-223, 2007.

FURINGHETTI, Fulvia. Teacher education through the history of mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**, 66, pp.131-143, 2007.

GASPAR, Maria. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores** (tese de doutorado em educação matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2003, 318p.

Golden Section: Phi. In: **Dr. Ron Knott**, 2011. Disponível em: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi.html#egypt. Acesso em: 12 junho 2014.

HALMOS, Paul. R. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

HARRIS, V. C. & STYLES, Carolyn. A generalization of Fibonacci Numbers. In: **The Fibonacci Quartely**. v. 2, nº4, pp. 277-299, 1964. Disponível em: http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acessado em: 10 junho 2012.

HONSBERGER, Ross. Mathematical Gems III. In: **The Dolciane Mathematical Exposition**, New York: The Mathematical Association of America, 1985, pp. 1 – 23.

Huntley, H. E. **The divine proportion: a study of mathematical beauty**. New York: Dover Publications, 1970.

KENNEDY, Hubbert. C. **Selected works of Giuseppe Peano**. London: George Allen & Unwin Ltd, 1973.

KNEALE, William. & KNEALE, Martha. **The development of Logic**. Oxford: Oxford University Press, 1962.

KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1973.

KOSHY, Thomas. **Elementary Number Theory with application**. Boston: Elsevier, 2007.

LAGUERRE, Eric. **Une ingenierie didactique pour l´apprentissage du theoreme de Talle au Collège** (thése en didactique des mathématiques). Paris: Université Denis Diderot, 2005, 706p. Disponível em: http://tel.archives-ouvertes.fr/

LIMA, Elon, L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LIMA, Elon. L. **Curso de Análise**, v. 1, Rio de Janeiro: SBM, 2010.

MOZINGO. M. G. On extending the Fibonacci Numbers to the negative integers. In: **The Fibonacci Quartely**. v. 12, nº3, pp. 292-293, 1974. Disponível em: http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acessado em: 10 junho 2014.

OCANÃ. Lourdes. F. Historia, Matemáticas y Realidad. **El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros**. (tese de doctorat). Barcelona: Universidad de Barcelona, 2002, 164p.

OLGIN, Clarissa, A. & GROENWALD, Claudia, L. O. Engenharia Didática: uma experiência com o tema Criptografia. In: **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, nº 2, v. 4, pp.158-190, 2011.

POSAMENTIER, Alfred. S. & LEHMANN, Ingmar. **The fabulous fibonacci numbers**. New York Prometeus Book, 2007.

RIBENBOIM, Paulo. **The new book of prime number records**. New York: Springer, 1995.

SPIRA, Michel. **O número de ouro**. 2007. (2007, 2 julho). Disponível em: http://www.obmep.org.br/para_saber_mais/videos_Epp_2006.html

VAJDA, S. **Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section**, New Delhi: Ellis Horwood Limited, 1989.

VOROBE´V, N. **Fibonacci Numbers**. New York: Pergamon Press, 1961.

VOROBE´V, N. N. Números de Fibonacci. In: **Leciones Populares de Matemática**. Moscou: Editora MIR, 1974.

WADDILL, E. Marcelus. & SACKS, Luois. Another generalized Fibonacci Sequence. In: **The Fibonacci Quartely**. v. 5, nº3, pp. 171-175, 1967. Disponível em: http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html. Acessado em: 10 junho 2014.

WELLS, David. **Prime Numbers: the mysterious figures in the Math**. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc. 2005.

Enviado: 10/10/2014
Aceito: 31/01/2016