ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica

Typification of arguments produced by the mathematical practices of middle level students in dynamic geometry environments

Guadalupe **Morales** Ramírez*
ORCID iD 0000-0002-8295-9965
Norma **Rubio** Goycochea**
ORCID iD 0000-0001-5223-9863
Víctor **Larios** Osorio***
ORCID iD 0000-0002-4454-8516

Resumen

En este trabajo se analizan argumentos presentados por un grupo de alumnos de bachillerato (entre quince y dieciocho años) en México, cuando resuelven actividades en el contexto de las transformaciones isométricas en el plano, aplicando un software de geometría dinámica (GeoGebra). El estudio es de corte cualitativo y descriptivo, en el que se emplean esquemas de argumentación (empírico, analítico, fáctico y simbólico) con el propósito de tipificar los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio, apoyados en un análisis de las configuraciones ontosemióticas (epistémicas y cognitivas) del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) para la descripción de la práctica argumentativa asociada. Los resultados de la puesta en escena sugieren que los alumnos recurren a tipos de argumentos empíricos basados en percepciones visuales, dejando evidencias de poca organización de ideas en el desarrollo de su práctica argumentativa. Por otra parte, la aplicación de las herramientas específicas del software jugó un papel de argumento para el alumno, y no como apoyo a su proceso de argumentación. Además, el lenguaje informal utilizado por los alumnos mostró poco dominio del lenguaje matemático.

Palabras-clave: Esquemas de Argumentación. Enfoque Ontosemiótico. Geometría Dinámica. Transformaciones Isométricas.

Abstract

This paper analyzes arguments presented by a group of high school students (between ages 15 and 18) in Mexico, when solving activities in the context of isometric plane transformations, applying dynamic geometry software

* Candidata a doctora en Tecnología Educativa por la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), Querétaro, Querétaro, México. E-mail: gmorales28@alumnos.uaq.mx.
** Doctora por la Universidad de Barcelona (UB). Docente principal del Departamento Académico de Ciencias, seccion Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), San Miguel, Lima, Perú. E-mail: nrubio@pucp.edu.pe.
*** Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). Docente de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), Querétaro, Querétaro, México. E-mail: vil@uaq.mx.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

(GeoGebra). The study is qualitative and descriptive, in which argumentation schemes (empirical, analytical, factual, and symbolic) are used to typify the arguments expressed by the students of this study, supported by an analysis of the ontosemiotic configurations (epistemic and cognitive) of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) for the description of the associated argumentative practice. Results suggest that the students resort to types of empirical arguments based on visual perceptions, leaving evidence of little organization of ideas in the development of their argumentative practice. Moreover, the application of the specific software tools played a role of argument for the student and not as support for their argumentation process. Furthermore, the informal language used by the students showed little command of the mathematical language.

Keywords: Argumentation Schemes. Ontosemiotic Approach. Dynamic Geometry. Isometric Transformation.

1 Introducción

En la actualidad, las tecnologías digitales siguen influenciando los programas curriculares, tratando de mejorar la educación de los diferentes niveles educativos de México. La Secretaría de Educación Pública (SEP) mexicana, ha puesto atención, en los últimos años, en la integración de recursos tecnológicos en los procesos de instrucción. La SEP afirma que:

> La educación básica debe considerar el uso de las TIC, no sólo con el fin de desarrollar la destreza técnica que implica su manejo con solvencia, sino sobre todo para su utilización con fines educativos. En este sentido, las TIC pueden ser aprovechadas como un medio que cierre brechas, ya que permiten acceder a una amplia gama de recursos de calidad orientados al aprendizaje, y contribuyen a que los alumnos formen parte activa de un mundo cada vez más interconectado (SEP, 2016, p. 32).

En el campo de las matemáticas, y según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), la tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; esta influye en la matemática que se enseña y potencia el aprendizaje de los alumnos (NCTM, 2000). Mientras los recursos tecnológicos siguen ganando presencia en los planes y programas de estudio de matemáticas de los diferentes niveles educativos, cuando el profesor no sabe cómo incorporar el uso de estas herramientas, es posible que el desempeño del alumno sea poco favorable en torno a la comprensión de los significados institucionales de los objetos matemáticos, que en términos del Enfoque Ontosemiótico se refiere a los significados desarrollados en los sistemas de prácticas operativas y discursivas.

El uso de la tecnología digital ha tenido relevancia en el estudio de la geometría y su relación con otras disciplinas, en particular el software de geometría dinámica, el cual, con una pertinente práctica docente, tanto en el dominio de sus herramientas como en el diseño de actividades, puede fomentar el desarrollo de un pensamiento deductivo, analítico y reflexivo (LARIOS; ARELLANO; GONZÁLEZ, 2018).

Además, el uso adecuado de la tecnología en las clases de matemáticas puede disminuir, notablemente, la aplicación de algoritmos rutinarios, posibilitando que los alumnos se enfoquen

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

en la resolución de problemas y se familiaricen con los conceptos matemáticos involucrados (ROJANO, 2006). En este sentido, el uso de un software de geometría dinámica como GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Cabrí Geometry, Descartes, entre otros, puede influir en la práctica argumentativa de los alumnos, permitiendo visualizar objetos geométricos mediante la exploración y manipulación, llevándolos al planteamiento de conjeturas y a una significación del objeto matemático en estudio (FIALLO; GUTIERREZ, 2007; LARIOS; GONZÁLEZ, 2010; MARIOTTI, 2000).

Según el NCTM, el papel del software de geometría dinámica permite visualizar una transformación isométrica mediante la manipulación de una figura, y observando el efecto de cada manipulación en su imagen. Por ejemplo, los alumnos pueden ver que cada punto en una reflexión está a la misma distancia de la recta de reflexión que el punto correspondiente en la preimagen (NCTM, 2000). Siendo parte importante que los alumnos utilicen herramientas digitales, formulen conjeturas y argumenten la solución de problemas, este estudio indaga sobre la práctica argumentativa de alumnos del nivel medio superior (edades entre quince y dieciocho años) referente al tema de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial o reflexión) cuando se incluye un software de geometría dinámica.

Esto lleva a preguntarse *¿Cuáles son los tipos de argumentos que manifiestan los alumnos del estudio cuando desarrollan actividades que involucran las trasformaciones isométricas y el uso de un software de geometría dinámica?* Para responder a esta pregunta, se propone clasificar argumentos manifestados por alumnos de este estudio mediante esquemas de argumentación al desarrollar una propuesta de actividades utilizando el software GeoGebra. Dicho software es de acceso libre y reúne herramientas del álgebra y cálculo, las cuales generan un ambiente geométrico interactivo; además, es útil para realizar construcciones geométricas a partir de la visualización, exploración y manipulación de objetos matemáticos intervinientes y emergentes en el desarrollo de las prácticas matemáticas. Cabe resaltar que, este estudio parte del hecho de que mediante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra es posible diseñar actividades que fomenten la producción de argumentos en ambientes geométricos, en la mejora del aprendizaje de las matemáticas.

2 Fundamentación teórica

En este apartado se describe la fundamentación teórica del estudio, el cual se divide en tres secciones. La primera hace referencia, desde la perspectiva del EOS, a las prácticas matemáticas y a las configuraciones ontosemióticas: epistémicas y cognitivas de los objetos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

matemáticos primarios (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Estas configuraciones apoyan al análisis de argumentos que manifestaron los alumnos en sus respuestas a las actividades propuestas, y a tener un panorama detallado referente a los objetos matemáticos primarios en las prácticas argumentativas que ellos desarrollan.

La segunda sección aborda las nociones de argumentación, argumento, práctica argumentativa y proceso de argumentación en el contexto de la Educación Matemática, los cuales son recurrentes a las prácticas matemáticas realizadas por los alumnos de esta investigación. La última sección se centra en describir los esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007), los cuales permiten clasificar los argumentos de los alumnos de este estudio.

2.1 Prácticas matemáticas y configuraciones ontosemióticas de los objetos matemáticos

Desde la perspectiva del EOS, se entiende por *prácticas matemáticas*, a aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hacen de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (GODINO; BATANERO, 1994). Así, el *sistema de prácticas matemáticas* es todo lo que se puede hacer y decir referente al objeto matemático cuando se resuelve alguna situación problema.

Estas *prácticas matemáticas* pueden ser *personales*, referentes al significado del individuo, o *institucionales,* relativas al significado fomentado o compartido en el seno de una institución. Además, los objetos matemáticos intervienen y emergen en el desarrollo de la práctica matemática del individuo en las diferentes acciones y discursos a través de los cuales se expresa y comunica (GODINO *et al*., 2016). Asimismo, las herramientas del EOS permiten interpretar y analizar la complejidad de las tareas y los procesos de instrucción que ponen en juego conocimientos, significados, objetos y procesos matemáticos, cuando se involucra tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (GODINO; BATANERO; FONT, 2007; DRIJVERS *et al*., 2013).

En el EOS se entiende por objeto matemático primario todo lo que se puede decir y hacer con él; por ejemplo, al hablar de la traslación geométrica, la referencia es hacia su definición, a su representación gráfica, a la relación con vectores de traslación, a las propiedades que preservan las figuras o polígonos en el plano al aplicar dicha transformación geométrica etc. Además, se consideran como objetos matemáticos primarios no solo los conceptos y los procedimientos sino también (1) situaciones problemas: aplicación, ejercicio, tarea, ejemplo, construcción geométrica, problema intra-matemático o extra-matemático etc.; (2) elementos lingüísticos: verbal, simbólico, numérico, gráfico, expresión algebraica, diagrama, notación etc.; (3) conceptos-definición: expresiones por medio de definiciones o descriptores (traslación, rotación, simetría etc.); (4) procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.; (5) propiedades: teoremas, corolarios, lemas, proposiciones etc.; (6) argumentos: enunciados usados para justificaciones y demostraciones que involucren propiedades.

Estos objetos matemáticos intervinientes y emergentes se relacionan entre sí, a través del lenguaje el cual expresa y comunica por medio de representaciones, conceptos, propiedades y procedimientos para resolver una situación problema, justificando la solución a través de argumentos. La relación de estos objetos matemáticos primarios forma lo que se conoce en el EOS por configuraciones ontosemióticas (Figura 1), las cuales pueden ser epistémicas o cognitivas (FONT; GODINO, 2006). La configuración cognitiva se asocia al sistema de prácticas del individuo, mientras que la configuración epistémica corresponde al sistema de prácticas de la institución. Además, ambas configuraciones permiten integrar los objetos primarios en un sistema de prácticas (operativa y discursiva). En este trabajo se utilizan ambas configuraciones, la epistémica para analizar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes en la actividad propuesta; mientras que la configuración cognitiva, para analizar los argumentos manifestados por los alumnos referente a los objetos matemáticos desarrollados en este estudio. La Figura 1 muestra la configuración ontosemiótica de los objetos matemáticos primarios y su relación entre ellos.

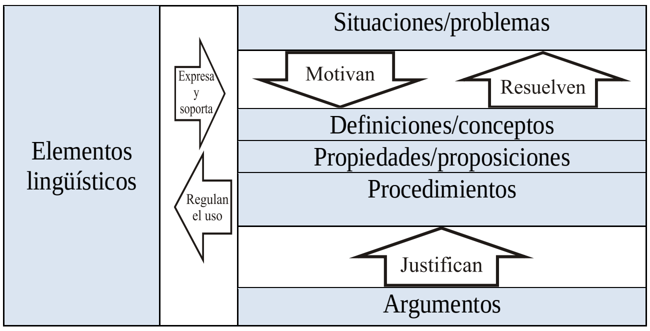


Figura 1 – Configuración ontosemiótica de los objetos matemáticos primarios
Fuente: Font y Godino (2006, p. 69)

2.2 Práctica argumentativa, proceso de argumentación y argumento

En la Educación Matemática, han ganado presencia las nociones de *argumento, argumentación, práctica argumentativa y proceso de argumentación*, mismos que son emergentes en este estudio. A continuación se describe, de manera general, la postura de algunos autores sobre estos conceptos y se asume una en términos del EOS.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Por un lado, Krummheuer (1995) asocia la *argumentación* a un proceso del que emerge un producto (*argumento*), el cual conlleva la aceptación o rechazo de una proposición que puede involucrar una deducción. Duval (1999) determina la *argumentación* como un tipo de razonamiento que implica el funcionamiento del lenguaje natural, mientras que un *argumento* es todo aquello que es utilizado para justificar, o para refutar, una proposición. Por otro lado, el planteamiento de Toulmin (2003) es relevante en el sentido de proponer un modelo heurístico para analizar la estructura de argumentos (razón o razones) que pueden estar a favor o en contra de una proposición u opinión; así, este modelo apoya aseveraciones por medio de otras, bajo el contexto discursivo oral o escrito en lo individual o colectivo.

A su vez, Haradas (2009) analiza el modelo de Toulmin como un método para estructurar argumentos, y resalta que este modelo no considera aspectos lingüísticos, ni emocionales y no verbales, los cuales son fundamentales para conseguir la aceptación de un argumento. La propuesta de Nielsen (2013) considera que no es suficiente la perspectiva Toulminiana para entender las características dialécticas de los argumentos que manifiestan los alumnos. Por otro lado, Molina, Font y Pino-Fan (2019) se apoyan del modelo de Toulmin para estructurar argumentos y, además, para describir a detalle la actividad argumentativa, toman en cuenta las configuraciones ontosemióticas del EOS.

En el contexto escolar, la interacción social en el aula es fundamental para desarrollar procesos que favorecen la argumentación matemática, pues la necesidad de comunicar y validar ideas apoya el razonamiento cercano a la deducción (BOERO, 1999; BALACHEFF, 1999). Como indica Tall (2007), la argumentación matemática es un proceso de la actividad humana que evoluciona en el individuo con la edad, lo que implica una vida de desarrollo cognitivo. En este sentido, el *proceso de argumentación* matemática se desarrolla a medida que los diferentes individuos maduran la comprensión sobre el objeto matemático, a través de la percepción, la acción, la comprensión (el mundo del simbolismo) y la construcción (el mundo del formalismo).

En un estudio con alumnos universitarios, Harel y Sowder (1998) asumen la *práctica argumentativa* como prueba o demostración, lo que asocian a un proceso de razonamiento empleado por individuos para remover dudas sobre la verdad de una aserción. Godino y Recio (2001), la asocian con la demostración; en este sentido, asumen:

> […] el término demostración de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (GODINO; RECIO, 2001, p. 406).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

En este estudio, y en términos del EOS, se asume que la *práctica argumentativa* se realiza cuando el alumno desarrolla una práctica matemática (operativa o discursiva) referente a una situación problema, la cual requiere de una justificación, validación, descripción, explicación, argumentación o demostración en el proceso de solución del problema, en el que puede o no manifestar un razonamiento lógico–deductivo. En términos del EOS, se considera que en la práctica matemática intervienen y emergen los objetos matemáticos primarios, los cuales forman parte de la configuración ontosemiótica. En este estudio, se enfatiza en la práctica argumentativa del objeto matemático primario: *argumento*, dado que es considerado como un producto en el proceso de argumentación matemática (FONT; RUBIO, 2017).

En el trabajo de Rubio (2012), desde la perspectiva del EOS, se caracterizan procesos matemáticos donde se toma en cuenta una entrada (tarea matemática) y una salida (argumento). Así, en la Figura 2 se esquematiza el proceso de argumentación de un individuo cuando resuelve una tarea matemática o situación-problema (entrada), cuya consigna es la inclusión de una explicación, justificación, validación, argumentación o demostración, y cuyo producto o respuesta (salida) es lo que se llama en el EOS un *argumento* de la configuración ontosemiótica (epistémica y cognitiva).

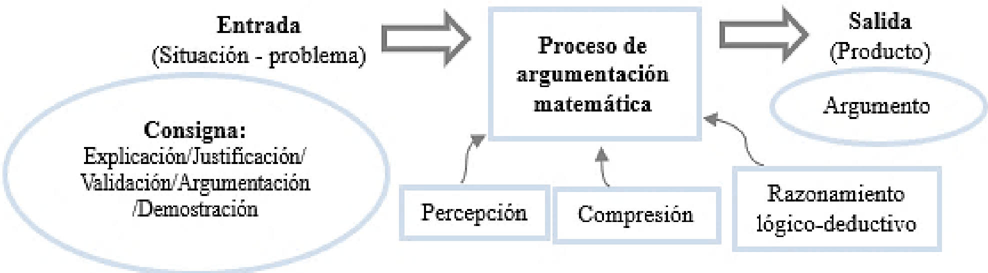


Figura 2 – Perspectiva del proceso de argumentación matemática en este estudio
Fuente: elaborado por los autores

En la configuración cognitiva, el argumento se relaciona con el significado personal y puede ser expresado mediante un lenguaje gráfico, icónico, algebraico o simbólico, explicaciones analíticas, descripciones verbales (formal o informal) o conjeturas. En la configuración epistémica, el argumento se asocia con el significado institucional de los objetos matemáticos primarios (Figura 3), en este estudio, este significado se asocia con los esquemas de argumentación descritos en la siguiente sección.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

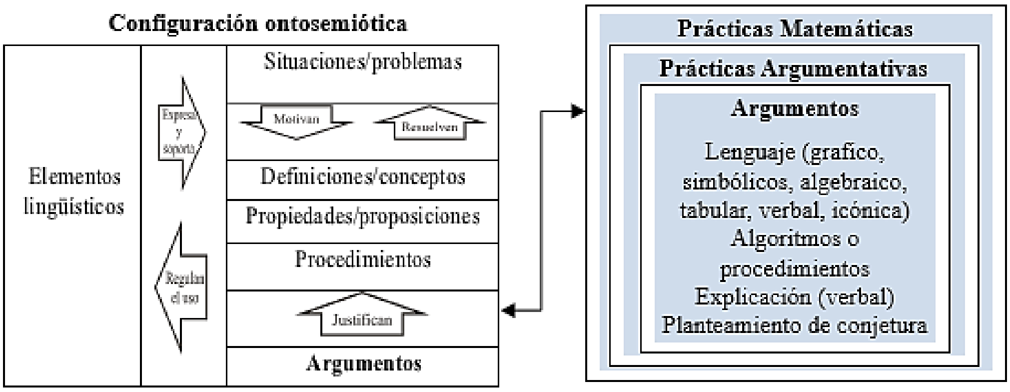


Figura 3 – La relación entre la configuración y prácticas argumentativas
Fuente: elaborado por los autores

2.3 Esquemas de argumentación matemática

Es necesario que, en todo proceso de instrucción matemática, se fomente el razonamiento lógico formal, pues a medida que el alumno estructura ideas deductivas, podrá aproximarse a la demostración matemática formal. Harel y Sowder (1998) proponen una caracterización de esquemas de prueba o demostración en un experimento de enseñanza individual con alumnos universitarios, quienes se enfrentaron a actividades y ejercicios de diferentes áreas de la matemática. Además, estos esquemas los asocian a una etapa cognitiva o capacidad intelectual en el desarrollo matemático del individuo, donde el acto de pensar, forma de pensar y forma de entender se relacionan con inferir, conjeturar, probar, explicar, generalizar etc. (HAREL; SOWDER, 1998; HAREL, 2007).

Dichos autores definen esquema de prueba como todo aquello que conforma la determinación (autoconvencimiento) y la persuasión a una persona e identifican tres esquemas principales: el de convicción externa, empírica y analítica. Estos esquemas son retomados por Flores (2007) para adaptarlos a estudios de prácticas argumentativas con profesores de bachillerato en México, al justificar soluciones geométricas en el contexto de la geometría dinámica. Para este último autor, la manera en que una persona utiliza sus razonamientos en el desarrollo de una práctica argumentativa para justificar o explicar un resultado, o para validar una conjetura durante el proceso de resolución de un problema, lo denomina *esquema de argumentación*. Así, el estudio de Flores (2007) y Harel y Sowder (1998) son desarrollados en condiciones diferentes, lo que llevó a Flores a identificar un esquema fáctico y uno simbólico.

A continuación, se describen los esquemas de argumentación identificados por Flores (2007).

Autoritario: el argumento manifestado por el alumno depende de una autoridad quien lo realiza (libro de texto, profesor o compañero). En este estudio no se considera este esquema, ya que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

las actividades se centran en la argumentación de los alumnos sobre las situaciones.
Simbólicos: en este tipo de esquemas el alumno puede utilizar un lenguaje matemático y símbolos poco claros o consistentes, sin llegar a conclusiones que quiere llegar.
Fácticos: los argumentos del alumno son de recuento, o repite hechos evidentes a manera de explicación o justificación de algún resultado.
Empíricos: el argumento del alumno es apoyado por hechos físicos o en un dibujo, constituyendo un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
Analíticos: el alumno sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue, forzosamente, a una conclusión válida.

3 Metodología

Este estudio se enmarca en la metodología cualitativa, misma que ayuda a la comprensión de la realidad en su forma natural y holística de las personas dentro de su propio contexto (BISQUERRA, 2004). En esta investigación se aborda la interacción con un grupo de alumnos de bachillerato, para fomentar la producción de argumentos a partir de situaciones problemas propuestos. Esto permitió analizar y describir el tipo de argumentos manifestados por los alumnos en el contexto de la construcción de teselados regulares, mediante el uso del software GeoGebra.

3.1 Contexto de la investigación

El interés se enfocó en el análisis de la práctica argumentativa, realizada por los alumnos al resolver situaciones problema de una secuencia de actividades propuestas, sobre la construcción de teselados o recubrimiento del plano en un ambiente de geometría dinámica. Cabe resaltar que los alumnos no conocían sobre el uso de las herramientas del GeoGebra, en relación con las transformaciones isométricas. Se utilizó la técnica de observación del tipo participante, con un grupo de 32 alumnos que cursaban la materia de Geometría Analítica correspondiente al cuarto semestre de la Educación Media Superior, en la ciudad de Querétaro, México (alumnos entre quince y dieciocho años). La puesta en escena fue de trece sesiones de 50 minutos cada una, mismas que se realizaron en el laboratorio de matemáticas de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Durante la implementación, fue necesario que los alumnos trabajaran las actividades en parejas, formándose dieciséis de ellas, ya que el uso del software GeoGebra era fundamental

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

para su desarrollo y el número de computadoras era insuficiente. La traslación, la rotación y la simetría axial o reflexión fueron los principales objetos matemáticos que se promovieron en el contexto de los teselados. Cabe mencionar que los teselados no es un tema que los alumnos estudien como tal en su programa curricular de la asignatura de Geometría Analítica; más bien, es una aplicación de las transformaciones isométricas en el plano y su relación con polígonos, los cuales sí, son tratados en el programa. La información se recolectó mediante hojas de trabajo (actividades), notas de campo a través de la observación participante y archivos de vista gráfica de GeoGebra grabados por los alumnos.

3.2 Diseño, implementación y análisis

Este trabajo corresponde a un estudio más amplio, cuyo objetivo es la caracterización de procesos matemáticos en el ambiente de la geometría dinámica, principalmente el proceso de argumentación. Aquí, desarrollamos uno de los objetivos, el cual es identificar y describir el tipo de argumentos que manifiestan los alumnos del nivel medio cuando utilizan el software GeoGebra. A continuación se describe, en términos generales, el diseño, implementación y análisis de la tercera actividad de las cinco propuestas, la cual pretende fomentar la argumentación matemática de los alumnos.

Se trató de un diseño secuencial de actividades, las dos primeras fueron necesarias para orientar el proceso de argumentación en relación con los conocimientos previos sobre las transformaciones isométricas y con la identificación de herramientas del GeoGebra. En este documento no se consideran las primeras dos actividades, ya que en estas no se exigen a los alumnos construcciones mediante la aplicación del software dinámico. A continuación, se presenta los objetivos de las tres primeras actividades.

- Objetivo de la *primera actividad*: indagar sobre los conocimientos previos que poseen los alumnos en relación con los polígonos regulares y sus características.
- Objetivo de la *segunda actividad*: explorar y manipular archivos dinámicos (applets) proporcionados en el GeoGebra para conceptualizar las transformaciones isométricas; es decir, ser capaz de aplicar los conceptos ostensivamente cuando son requeridos.
- Objetivo de la *tercera actividad*: promover la elaboración de argumentos y la construcción de teselados regulares, aplicando las herramientas del software GeoGebra.

La tercera actividad consistió en catorce preguntas abiertas y se planteó el concepto de teselado o recubrimiento regular, con el fin de asegurar que los alumnos tuvieran noción de este. En las primeras cuatro preguntas de esta actividad, los alumnos no tuvieron necesidad de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

usar el software dinámico GeoGebra para responderlas. Se contaba que ellos fueran capaces de evocar y relacionar lo trabajado en las primeras dos actividades. Se hizo énfasis en que los alumnos visualizaran un posible teselado regular mediante polígonos adecuados (propuestos por ellos o elegidos de las imágenes dadas). Además, justificaran sus respuestas describiendo las transformaciones isométricas que exploraron y manipularon en las dos primeras actividades a través de los applets diseñados para este fin.

En las preguntas restantes de la tercera actividad, se pide a los alumnos construir un teselado regular, utilizando cuadrados, triángulos y hexágonos, aplicando las transformaciones isométricas del GeoGebra. Además, se les pide validar su proceso de construcción a través de la herramienta de arrastre y describir, explícitamente, el procedimiento de construcción.

Respecto a la implementación, la tercera actividad tuvo una duración de cuatro sesiones de 50 minutos cada una, donde se aplicó el software GeoGebra. Dado que las actividades se trabajaron en parejas, la interacción entre los alumnos jugó un papel relevante para la toma de decisiones sobre las construcciones de teselados regulares. Esto produjo que los argumentos proporcionados por ellos fueran más enriquecedores.

Como el papel del investigador a cargo en las sesiones fue del tipo de observador participante, sus intervenciones se limitaron a dos acciones, principalmente. Por un lado, se clarificaron dudas de los alumnos sólo en relación con la comprensión de la redacción de las actividades y conocimientos previos. Por otro lado, cuando era necesario una prueba de arrastre que no realizaban los alumnos, el investigador lo hacía para hacer evidente los errores en la construcción dentro del ambiente de la geometría dinámica. Al final de cada sesión se recogieron las hojas de trabajo con los argumentos de los alumnos referente a cada construcción pedida y los archivos del GeoGebra donde los alumnos grabaron las vistas gráficas de sus construcciones.

Para el análisis de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes de la tercera actividad, se tomó como referencia la solución experta realizada por el investigador a cargo, así como, también, del protocolo de construcción en el GeoGebra; en ambos casos se consideró la configuración epistémica elaborada. Además, se realizó el análisis de la configuración cognitiva referente a la práctica argumentativa manifestada por los alumnos, identificando los objetos matemáticos y las herramientas del Geogebra utilizadas en el protocolo de construcción de los teselados regulares. Los argumentos, en ambas configuraciones ontosemióticas (epistémica y cognitiva), se asociaron a esquemas de argumentación (simbólico, fáctico, empírico y analítico), mismos que, fueron utilizados para clasificar los argumentos manifestados por los alumnos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

4 Resultados

En este apartado se muestra la configuración epistémica de la tercera actividad diseñada, la cual está relacionada con la construcción de teselados regulares, que involucran las transformaciones isométricas y el uso de herramientas del GeoGebra. Además, se muestran ejemplos de los esquemas de argumentación asociados a los argumentos de una pareja de alumnos. También, tomando en cuenta la configuración cognitiva, se presenta la tipificación de los argumentos manifestados por los alumnos, en relación con los esquemas de argumentación (fáctico, empírico, analítico y simbólico).

4.1 Configuración epistémica de la actividad

La herramienta de configuración epistémica del EOS ha sido útil para comparar el significado de referencia con el sistema de prácticas desarrollada por los alumnos. A continuación, se describe el análisis de los objetos matemáticos primarios a través de la configuración epistémica (Figura 4), la cual relaciona los objetos intervinientes y emergentes que corresponden a la construcción de los teselados regulares (tercera actividad).

La integración de los objetos matemáticos identifica *situaciones* en relación con la clasificación de polígonos (regulares e irregulares), así como la construcción de teselados utilizando cuadrados, triángulos y hexágonos regulares. En el desarrollo de esta práctica argumentativa, se requiere el uso de *conceptos* como: polígono regular, ángulo interior del polígono, teselado regular, vector, transformaciones isométricas. También se aplican procedimientos donde se utilizan *propiedades* de los teselados, por ejemplo, la medida del ángulo formado en cada vértice de un teselado es de 360° y la medida del ángulo interior del polígono regular debe ser divisor de 360° para que forme un teselado regular.

Además, se ponen en juego *argumentos* asociados a los esquemas de argumentación empírico, analítico y fáctico, donde la exploración y manipulación del software permitieron cambios dinámicos en el proceso de construcción. Lo anterior es expresado mediante *lenguaje* verbal, gráfico-software y gráfico-geométrico. Dichos objetos matemáticos intervinientes y emergentes son presentados en la siguiente configuración epistémica (Figura 4).

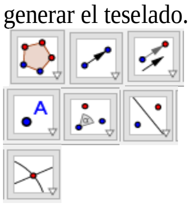
Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común (formal o informal)

Situaciones de construcción de teselados regulares en el GeoGebra aplicando las transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexión o simetría axial) y hexágonos, cuadrados y triángulos equiláteros. Las situaciones requieren explicaciones, justificaciones y argumentos en relación con los procedimientos realizados, así como la validación del teselado mediante la herramienta de arrastre.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Gráfico-software: el uso de comandos del software para generar el teselado.



Gráfico/geométrico: Representación de teselados regulares en el GeoGebra.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas:
Ángulo interior
Polígono regular (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono)
Vector
Vértice
Teselado regular
Transformaciones isométricas

Emergentes:
Transformaciones isométricas en el plano mediante la construcción de teselados regulares.

Propiedades/proposiciones:
La suma de los ángulos en cada vértice del teselado es un ángulo de 360°.
El ángulo interior del polígono regular debe ser divisor de 360° para que forme un teselado regular.
El cuadrado, triángulo equilátero y hexágono regular son los únicos polígonos que permiten formar un teselado regular.
Propiedad de arrastre como herramienta de validación en el teselado regular.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Clasificación de polígonos
Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).
Transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) como operaciones geométricas que permiten transformar una figura a partir de una previa.
Emergentes (matemáticos):
Construcción de un teselado regular utilizando polígonos regulares, traslación, rotación o simetría axial.
Cálculo de suma de ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular que constituye el teselado.
Previos (software):
Identificar los objetos geométricos en el GeoGebra (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) que permiten construir los teselados regulares.
Uso de sugerencias para el uso de herramientas en la construcción de los teselados.
Emergentes (software):
Aplicación de las transformaciones isométricas y sus elementos que conllevan a la construcción del teselado regular en el GeoGebra.

Justifican

Argumentos:
De tipo fáctico al describir una secuencia del procedimiento mediante herramientas de transformación isométrica que intervienen en el proceso construcción.
De tipo empírico al percibir y visualizar el teselado y utilizarlo como argumento a su proceso de construcción, aplicando herramientas geométricas del GeoGebra para la construcción adecuada.
De tipo analítico al analizar la dinamicidad en la aplicación de la herramienta de arrastre, que permite involucrar un razonamiento deductivo para validar la construcción de teselados, así como la deducción lógica de las propiedades que debe cumplir un teselado.

Figura 4 – Configuración epistémica asociada a la construcción de teselados regulares
Fuente: elaborado por los autores

4.1 Esquemas de argumentación de los alumnos. Un caso

Se eligió una de las 16 parejas participantes en este estudio para ejemplificar cada uno

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

de los esquemas de argumentación asociados a los argumentos manifestados por los alumnos, por ser el caso que hizo evidente los cuatro tipos de esquemas de argumentación; además, porque el resto de las parejas muestran el esquema de argumentación empírica como el más recurrente. Las siguientes figuras ejemplifican los esquemas de argumentación que corresponden a las respuestas de la pareja de alumnos referente a las situaciones problema de la tercera actividad, en las cuales se les pide construir y justificar sus construcciones de los teselados formados por cuadrados, triángulos y hexágonos regulares.

La situación de la Figura 5, evidencia un *esquema de argumentación simbólica*. Los alumnos plantean una conjetura que carece de argumento en su explicación y es poco claro de cómo *pasaría los polígonos a otro plano*.

> Si tuvieras que teselar una parte del plano usando el GeoGebra, ¿Cómo tendrías que mover los polígonos regulares para cubrir la pantalla? Explica lo más que puedas.
>
> Por simetria axial pasarias los poligonos a otro plano

Figura 5 – Esquema de argumentación simbólico de los alumnos
Fuente: elaborado por los autores

En la Figura 6 los alumnos presentan un argumento del *esquema de argumentación empírico*, ya que describen lo observado en el software, pues para ellos la figura geométrica juega el rol del argumento y no como parte del proceso de construcción del teselado regular, ya que se refieren sólo a cómo *van a seguir encajando entre sí*. El argumento se refiere a la construcción del teselado de triángulos equiláteros y muestra el intento por aplicar traslación, aunque la construcción no cumple con la definición del teselado regular cuando se aplica la prueba de *arrastre*. Cabe resaltar que, en esta situación problema se recomendó a los alumnos considerar las sugerencias hechas en la actividad, específicamente, sobre las herramientas a utilizar del software GeoGebra en la construcción de teselados regulares, con el fin de que ellos establecieran relaciones entre las herramientas necesarias a utilizar con los conceptos de las transformaciones isométricas. Además, se esperaba que los alumnos pudieran aplicar más de una transformación isométrica en la construccion del teselado regular.

> Utiliza las transformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con triángulos equiláteros. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: teselado3_apellido Si mueves el punto *A* o *B* del triángulo equilátero original con la herramienta ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta
>
> Si, porque sigen siendo iguales y las figuras van a segir encagando entre sí

Figura 6 – Esquema de argumentación empírico de los alumnos
Fuente: elaborado por los autores

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

En la Figura 7 los alumnos manifestaron un argumento del *esquema de argumentación fáctico*, que consistió en describir una serie de pasos poco estructurados, sin detallar en qué orden se aplicó las herramientas del software, cómo fue que se realizó el *acomodo* y, por ende, cómo se generó el teselado. Además, el lenguaje utilizado es informal y se da en términos del uso de las herramientas de polígono, vector y traslación del software GeoGebra.

Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿Cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.

Empezamos por una linea original de triangulos y despues utilizamos un vector y traslacion y solo fuimos acomodando hasta rellenar

Figura 7 – Esquema de argumentación fáctico de los alumnos
Fuente: elaborado por los autores

En la Figura 8 los alumnos muestran el *esquema de argumentación analítica,* aunque no se detalla del por qué *son los únicos polígonos que pueden teselar el plano*. Se infiere que el argumento se plantea a partir de una respuesta a una situación previa a la de la Figura 8, la cual corresponde con la siguiente cuestión: *si construyeras un teselado regular y sumaras las medidas de los ángulos que rodean a un solo vértice ¿Cuál sería el valor de la suma? Justifica tu respuesta.* A lo que la pareja de alumnos responde: *360°, la suma de los ángulos alrededor formaría 360°.* Aunque no se justifica correctamente, se deduce que la manipulación y la observación juega un papel importante para reflexionar analíticamente en su proceso de construcción de los teselados regulares, considerando el ángulo formado en cada vértice; sin embargo, la pareja no lo representó ostensivamente.

Si los polígonos tienen que ser regulares para poder teselar un plano, ¿Por qué se puede hacer solamente con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos? Explica lo más que puedas.

porque son los unicos poligonos con los que sus angulos no dejan ningun espacio y forman el plano

Figura 8 – Esquema de argumentación analítico de los alumnos
Fuente: elaborado por los autores

4.2 Tipificación de argumentos de los alumnos

A continuación, se muestra los porcentajes correspondientes a la tipificación de argumentos asociados a los esquemas de argumentación, en relación con el análisis de los argumentos proporcionadas por los alumnos sobre la tercera actividad. La Figura 9 representa el total (224) de respuestas posibles asociadas a las catorce situaciones problemas, que debían

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

responder las dieciséis parejas de alumnos, las cuales fueron analizadas y tipificadas mediante los esquemas de argumentación (empírico, fáctico, simbólico y analítico). El 22% (49 situaciones) no mostraron argumento o respuesta por parte del alumno, así que estas se descartaron.

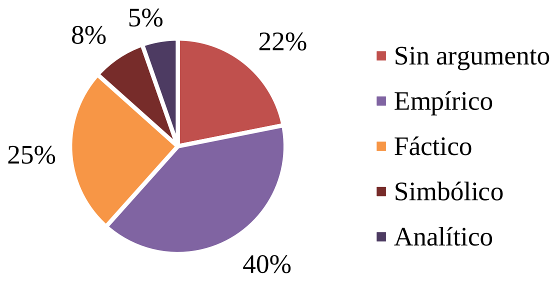


Figura 9 – Porcentaje correspondiente a los esquemas de argumentación recurrentes por los alumnos
Fuente: elaborado por los autores

El 40% (89 respuestas) de argumentos se asociaron al esquema de argumentación empírica; es decir, la construcción del teselado o la representación figural realizada por los alumnos fungió el papel de argumento o justificación, y no como apoyo al proceso de argumentación. El esquema de argumentación fáctico se asoció a un 25% (56 respuestas) de los argumentos de los alumnos. En este caso, ellos recurrieron a explicaciones sobre la aplicación de las herramientas del GeoGebra a manera de pasos secuenciales, algunos alumnos presentaron poca organización lógica del argumento.

El esquema simbólico se relacionó con el 8% (dieciocho respuestas) de los argumentos de los alumnos, los cuales evidenciaron conceptos matemáticos poco claros y carentes de sentido, mediante un lenguaje informal. El esquema analítico representó solo el 5% del total (doce respuestas) de argumentos de los alumnos, en los cuales se realizó inferencia para determinar que detrás del argumento hubo un razonamiento lógico-deductivo. Con base en el análisis realizado en términos de los esquemas de argumentación, se logró tipificar los argumentos proporcionados por los alumnos descritos en los cuadros 1, 2 y 3, que permitió mostrar las características de cada argumento. En todos los cuadros, la primera columna corresponde a la *entrada* de la situación problema formulada a los alumnos; la segunda, al análisis del argumento de los alumnos, la cual le llamamos *salida*, y la tercera indica el tipo de esquema de argumentación asignado a dicho análisis.

En el Cuadro 1 se muestra el análisis de argumentos manifestados por los alumnos con base en los esquemas de argumentación, referente a las situaciones problema que abordan la construcción del teselado regular utilizando triángulos equiláteros. La tipificación presenta dos situaciones sin argumento, tres esquemas de argumentación empírica, un esquema de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

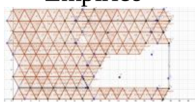
argumentación simbólica y un esquema de argumentación fáctico. De acuerdo con el análisis, se describe el protocolo de construcción en el GeoGebra del teselado regular usando triángulos, obtenido de la vista gráfica del software realizado por una pareja de alumnos:

1. Se tomó como referencia el eje de las abscisas para construir una serie de triángulos equiláteros, utilizando la herramienta de polígono regular.
2. Se ubicó un vector sobre los triángulos para después aplicar la herramienta de traslación geométrica sobre cada uno de los triángulos. En este proceso, algunos triángulos se sobreponen dejando al menos dos triángulos en una misma posición.
3. Se colocó otro vector de menor tamaño y en posición diagonal para trasladar cada uno de los triángulos hacia arriba aplicando la herramienta de traslación geométrica.
4. Se utilizó el vector diagonal para trasladar triángulos hacia arriba y otro vector horizontal sobre los triángulos trasladados para seguir trasladando hacia la derecha, en algunos casos estos se sobreponían.
5. Finalmente, se completó el teselado regular al colocar triángulos equiláteros en las regiones sin cubrir mediante la herramienta de polígono regular.

Aunque a simple vista la pareja de alumnos construyó un teselado regular, este se deformó al aplicar la herramienta de *arrastre* sobre un vértice del triángulo original. Esto se debió a que la ubicación de algunos vectores de traslación no siempre se colocó sobre el triángulo original, considerando que el teselado regular debiera cumplir con la propiedad de *arrastre*; es decir, el teselado regular no dejara regiones sin cubrir ni se sobrepusieran los polígonos. Dado que el arrastre es fundamental en el proceso de construcción de los teselados, durante la implementación, se hizo énfasis en que los alumnos verificaran esta propiedad en sus construcciones. Aunque, pocos alumnos verificaron que el teselado regular no se deformara.

Entrada (situación problema)	*Salida (argumento de alumnos)*	*Esquema de argumentación*
Se les proporciona polígonos regulares, donde la consigna es cuáles de ellos pueden formar un teselado y por qué forman un teselado.	Los alumnos afirman que para el triángulo equilátero, cuadrado, pentágono y hexágono no quedan espacios al unir y formar un teselado. Para el heptágono, octágono y eneágono los polígonos se sobreponen. Se evidencian argumentos basados en percepciones visuales.	Empírico
Si tuvieras que teselar una parte del plano usando el GeoGebra ¿cómo tendrías que mover los polígonos regulares para cubrir la pantalla? Justifica tu respuesta.	Los alumnos formulan una conjetura en la que la *simetría axial pasaría los polígonos a otro plano*. Esta conjetura carece de argumento pues no se detalla cómo se formaría el teselado *pasando los polígonos a otro plano*.	Simbólico

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con triángulos equiláteros. Posteriormente, guarda el archivo de la siguiente manera: *teselado3_apellido*	Los alumnos construyen el teselado de triángulos equiláteros usando traslación geométrica; sin embargo, al momento de colocar los vectores para ir trasladando el objeto, se pierde el orden y esto provoca que algunos triángulos queden sobrepuestos. Además, si se mueve algún punto del triángulo original se deforma el teselado.	Empírico 
Si mueves el punto A o B del triángulo equilátero original con la herramienta ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	Los alumnos justifican que únicamente se requiere que las teselas sean iguales *para seguir encajando entre sí*.	Empírico
Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	El argumento del alumno se basa en describir en términos de las herramientas del software; es decir, se describen pasos a modo de algoritmo utilizando lenguaje asociado a las herramientas del software.	Fáctico

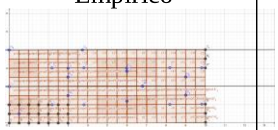
Cuadro 1 – Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a esquemas de argumentación
Fuente: elaborado por los autores

El Cuadro 2 corresponde al análisis de la construcción del teselado regular, utilizando cuadrados. Los argumentos de esta pareja de alumnos evidenciaron dos esquemas de argumentación empírica y un esquema de argumentación analítica. Estos argumentos parten de la percepción visual y terminan con procedimientos deductivos, aplicando la herramienta de simetría axial. De acuerdo con el análisis del protocolo de construcción del teselado, utilizando cuadrados de la misma pareja de alumnos en el GeoGebra, a continuación, se describe dicho protocolo obtenido de la vista gráfica del software:

1. Se construyó la unión de dos filas de seis cuadrados mediante la herramienta de polígono regular tomando como referencia el eje de las abscisas y las ordenadas.
2. Se generó el teselado hacia arriba y hacia la derecha mediante la aplicación de la simetría axial para cada uno de los cuadrados generados por dicha transformación. A simple vista, el teselado regular cumplía con su definición, aunque cuando se aplicó el *arrastre* este se deformó en dos regiones, sobreponiéndose entre ellos.
3. Se generó el teselado hacia la derecha, utilizando cuadrados que fueron generados por la simetría axial, esta transformación se aplicó repetidas veces para ampliar el teselado.
4. Posteriormente, se construyó una recta horizontal sobre todo el teselado, la cual fungió como eje de simetría y se prosiguió aplicando simetría axial hasta ampliar el teselado hacia arriba. Finalmente, a simple vista se formó un teselado usando cuadrados, aunque se deformó cuando se aplicó la prueba de arrastre sobre el cuadrado original.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

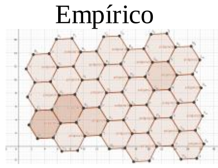
En la construcción de este teselado, los cuadrados se sobreponían y se deformaba en seis rectángulos formados por cuadrados; es decir, no cumplía con las características del teselado regular. Sin embargo, la construcción muestra un razonamiento deductivo sobre el cómo los cuadrados fueron acoplándose, mediante la aplicación de la herramienta de simetría axial e identificando el eje de simetría sobre alguno de los cuadrados originales. Los alumnos evidencian la práctica experimental y la visualización de los objetos geométricos para generar el teselado regular, aunque este no cumpliera con la característica del arrastre; es decir, que no se deformara el teselado cuando se moviera algún punto del polígono original construido.

Entrada (situación problema)	*Salida (argumento de alumnos)*	*Esquema de argumentación*
Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con cuadrados. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: *teselado4_apellido*	Los alumnos muestran en su construcción que, para efectos visuales, esta forma un teselado. Sin embargo, se observa que algunos cuadrados están sobrepuestos.	Empírico 
Si mueves el punto A o B del cuadrado original con la herramienta  ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	El argumento de los alumnos se basa en la percepción visual, ya que para ellos es suficiente que las figuras se acoplen, sin tomar en cuenta que algunos cuadrados se sobreponen y que el teselado se deforma al mover algún punto del cuadrado original.	Empírico
Si alguien quisiera construir esta misma teselación ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	Los alumnos evidencian un argumento sobre un procedimiento deductivo sobre la construcción del teselado de cuadrados, ya que se recurre a la aplicación de la simetría axial. Sin embargo, no cumple con las características de un teselado regular.	Analítico

Cuadro 2 – Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a esquemas de argumentación
Fuente: elaborado por los autores

En el Cuadro 3, se muestra el análisis de argumentos de la pareja de alumnos en relación con la construcción del teselado, utilizando hexágonos regulares. A partir de esta construcción, se obtuvo un protocolo de construcción, donde se aplicó la herramienta de polígono regular para construir hexágonos regulares, después, unieron los hexágonos utilizando únicamente esta herramienta para construir el teselado regular, el cual aparentemente lo es; sin embargo, solo se enfocan en utilizar la herramienta de polígono regular y ubicar los demás hexágonos regulares sobre los lados del primer hexágono, en esta construcción se omite que algunos hexágonos se sobreponen. Así, se evidencia un proceso argumentativo basado en esquemas empíricos, pues, aunque el teselado no se deforma, el interés por aplicar alguna herramienta de transformación isométrica es nula. Además, existe incongruencia en la explicación con respecto a la construcción. Finalmente, en la última consigna se reflexiona sobre las herramientas usadas y el ángulo que tienen que hacer *coincidir* para formar teselados regulares.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Entrada (situación problema)	*Salida (argumento de alumnos)*	*Esquema de argumentación*
Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente, guarda el archivo de la siguiente manera: *teselado6_apellido*	La construcción realizada por los alumnos se basó en unir hexágonos, de manera que la figura no se deforma, pero se sobreponen algunos hexágonos. Sin embargo, no se aplica ninguna herramienta de transformación isométrica del software.	Empírico 
Si mueves el punto A o B del hexágono original con la herramienta ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	El argumento proporcionado por los alumnos es perceptual visual, pues para ellos es suficiente observar una figura que representa la unión de varios hexágonos.	Empírico
Si alguien quisiera construir esta misma teselación ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	Los alumnos se enfocan en formar primero el hexágono y construyen una línea continua de estas, para después utilizar un vector y coincidirlas. El procedimiento hace el recuento de las herramientas que se aplicaron. Sin embargo, la explicación es ambigua.	Simbólico
Si los polígonos tienen que ser regulares para poder teselar un plano ¿Por qué podemos hacerlo solamente con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos? Explica lo más que puedas.	El argumento de los alumnos se da a partir de la observación y reflexión sobre la construcción de teselados regulares, tomando en cuenta lo previo. El argumento está relacionado con la unión de ángulos para no dejar regiones sin cubrir entre los polígonos.	Analítico

Cuadro 3 – Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a esquemas de argumentación
Fuente: elaborado por los autores

En términos generales, los argumentos de los alumnos no mostraron relación con los conceptos de las transformaciones isométricas, así como tampoco se aplicó un adecuado uso de las herramientas correspondientes a dichos conceptos en el GeoGebra, en relación con la construcción de los teselados regulares. Algunos alumnos únicamente colocaron la unión de los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado o hexágono regular) o los comandos *copiar y pegar* la misma figura, aplicando las teclas Ctrl + C y Ctrl + V lo cual, aunque, son comandos generales de un sistema operativo y el GeoGebra lo permite, no es útil en este software para una adecuada construcción ni argumento válido de las situaciones propuestas, ya que al aplicar la herramienta de arrastre el teselado se deforma y deja regiones sin cubrir entre los polígonos.

A pesar de que se promovió, en mayor medida, el esquema de argumentación analítico, en términos de representaciones geométricas mediante la aplicación de comandos en el GeoGebra, detrás de estos existía un razonamiento lógico-deductivo que los alumnos no llegaron a desarrollar. Por ejemplo, al deducir que en cualquier vértice de los teselados su ángulo debe ser 360° y que únicamente los polígonos que conforman un teselado regular son cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, por tener ángulos interiores divisores de 360°, la mayoría de los alumnos no lo desarrolló.

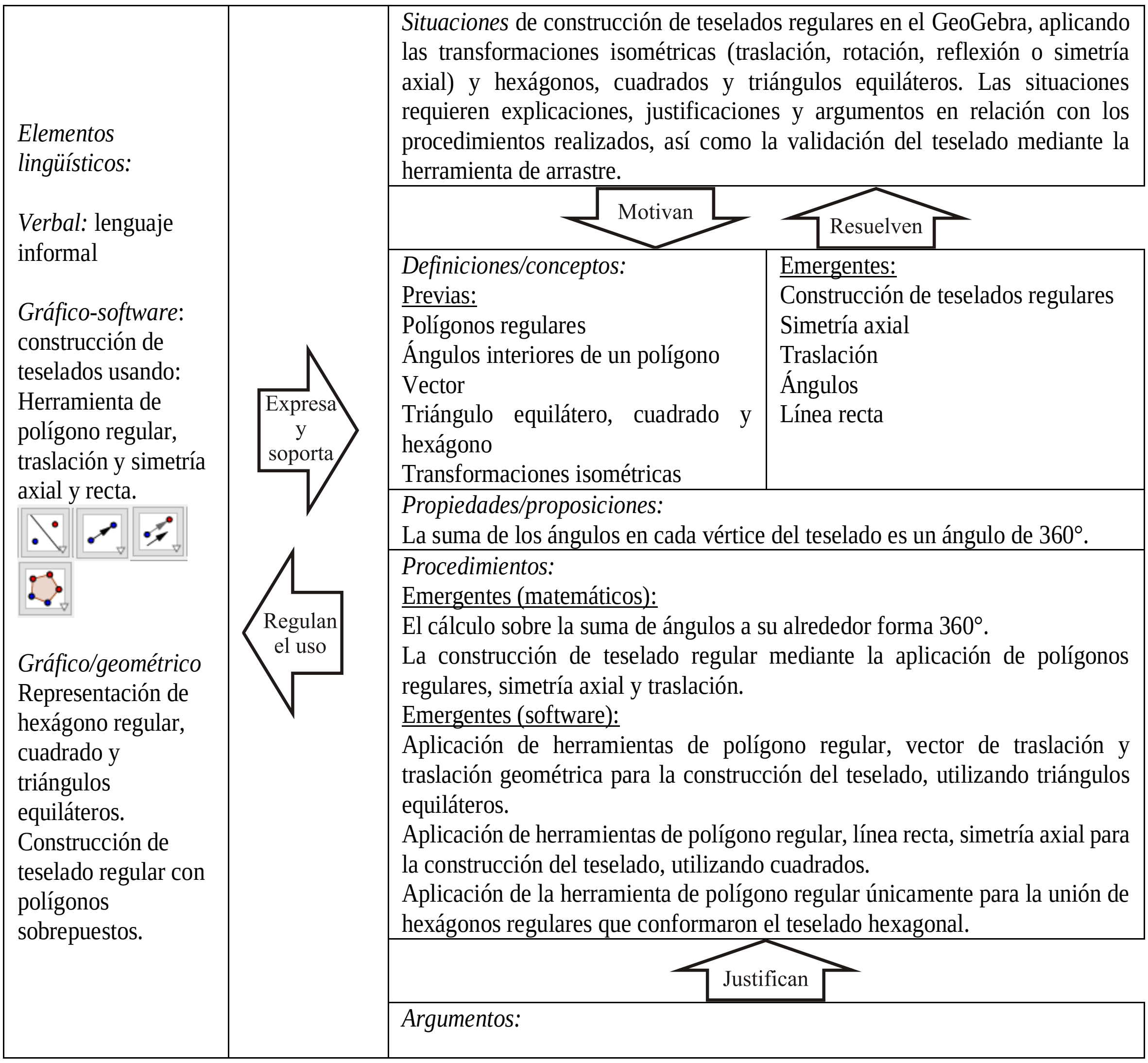
Cabe destacar que solo una pareja de alumnos hizo uso de esta propiedad para referirse

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

que, dichos polígonos son los únicos que forman un teselado regular. Así, cuando se les solicitó a los alumnos que argumentaran, al pedirles que expliquen o justifiquen sus construcciones, los esquemas empíricos fueron los más utilizados por ellos, ya que sus argumentos no tomaron en cuenta las transformaciones isométricas; además, ellos reflexionaron poco o casi nada sobre si sus construcciones correspondían a la definición de teselado regular.

4.3 Configuración cognitiva asociada a los argumentos de los alumnos. Un caso

Se considera la configuración cognitiva relativa a los argumentos de los alumnos, es decir, sus significados personales sobre la práctica argumentativa que realizan al enfrentarse a una tarea o situación problema. La Figura 10 representa la configuración cognitiva emergente del sistema de prácticas de una pareja de alumnos, por lo que se ha descrito los objetos matemáticos incluidos y las herramientas utilizadas del software GeoGebra como parte de la integración a sus significados personales.



ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

		Los alumnos recurrieron al uso de esquema de argumentación empírica, dado a la exploración e implementación de las herramientas de forma empírica, donde la construcción hecha fungió como argumento en la construcción de los teselados regulares. Los alumnos manifestaron un esquema de argumentación analítica al razonar deductivamente cómo ubicar los vectores de traslación sobre la construcción del teselado triangular. El poco manejo de términos de las herramientas de construcción del GeoGebra de los alumnos evidenció esquemas de argumentación simbólica, dado que las explicaciones y justificaciones fueron limitadas y poco coherentes.

Figura 10 – Configuración cognitiva de una pareja de alumnos sobre la construcción de teselados regulares
Fuente: elaborado por los autores

Por otra parte, al comparar la configuración epistémica de los objetos matemáticos con la configuración cognitiva de los alumnos, se observó que el uso del *lenguaje matemático* de los alumnos fue limitado, recurriendo, principalmente, a un lenguaje informal, donde no siempre es claro los significados del alumno referente al objeto matemático. En relación con los *conceptos previos* coincidieron tanto en la configuración epistémica como en la configuración cognitiva, mientras que en los *emergentes* se destacan la traslación y simetría axial en el proceso de construcción de los teselados.

Referente a las *propiedades*, la pareja de alumnos solo recurre a *la suma de los ángulos en cada vértice del teselado debe ser 360°*. Esta propiedad emerge cuando los alumnos realizan la construcción del teselado, aplicando la traslación y simetría axial, esto como parte de sus *procedimientos* en el software GeoGebra. Aunque, sus *argumentos* o explicaciones carecen de coherencia en relación con las construcciones presentadas en el software, estos manifestaron poca organización de ideas. La mayoría de estos se describen en términos del uso de las herramientas del GeoGebra, pues cuando se pedía explicaciones a detalle de los pasos seguidos para generar la construcción del teselado regular no se explicitó el cómo fue que se aplicaron las herramientas del GeoGebra.

5 Discusión y reflexiones finales

Aunque los resultados presentados corresponden a la tercera actividad de las cinco propuestas en un estudio más amplio, estos son importantes porque permiten tipificar los argumentos manifestados por los alumnos y evidencian cómo las herramientas de la geometría dinámica forman parte de estos argumentos. Esta actividad fue elegida por tener mayor cantidad de argumentos y uso del software GeoGebra. De acuerdo con la tipificación de argumentos, en los que fueron útiles las herramientas del EOS y los esquemas de argumentación, fue posible identificar argumentos recurrentes por los alumnos, principalmente, esquemas de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

argumentación empíricos, ya que estos argumentos se basan en descripciones sobre percepciones visuales de los objetos geométricos, tales como: la construcción de polígonos en una línea recta, la simetría axial para *pasarlos a otro plano*, haciendo notar la inexperiencia del uso las herramientas del GeoGebra y evidenciando construcciones por el método de prueba y error.

Por otra parte, las configuraciones ontosemióticas permitieron articular y comparar los objetos matemáticos de referencia con los emergentes en la práctica argumentativa de los alumnos, así como analizar a priori la secuencia de actividades de este estudio. Los resultados coinciden con los expuestos en Flores (2007), aunque estos se hayan trabajado con profesores de bachillerato y, en este estudio, con un grupo de alumnos de bachillerato. Además, aunque las actividades diseñadas están relacionadas, es necesario replantear algunas situaciones que guíen a los alumnos al planteamiento de conjeturas y justificaciones en pro de la mejora del desarrollo del proceso de argumentación.

De acuerdo con el supuesto hipotético de este estudio, se comprueba, por una parte, que las tareas matemáticas que integran geometría dinámica promueven, en gran medida, la argumentación: sin embargo, el argumento no necesariamente es correcto o válido. Además, los alumnos no siempre mostraron un razonamiento deductivo en aquellas situaciones donde fue promovido, por el contrario, hubo discrepancia entre el significado personal de los alumnos y el significado referencial, como se observa en la configuración cognitiva y epistémica, respectivamente. Por tanto, no hubo un proceso de significación del contenido matemático (transformaciones isométricas) en relación con el uso de las herramientas del software.

En concordancia con Mariotti (2000), la representación y la aplicación de comandos externos del software dinámico están ligadas a procesos internos que organizan y controlan el pensamiento geométrico al producir conjeturas o demostraciones. Sin embargo, aunque hubo un esfuerzo de los alumnos para aprender a usar las herramientas del software referente a las transformaciones isométricas, en dirección a aplicarlas adecuadamente, se perdía de vista que el teselado debiera cumplir con propiedades (arrastre). En este sentido, en un proceso de construcción geométrica que involucra el uso de un software de geometría dinámica, la visualización de objetos matemáticos juega un papel relevante para el desarrollo del proceso de argumentación y, por ende, la construcción del significado, aunque, no es suficiente para que el alumno razone de manera deductiva y justifique un argumento válido.

Lo anterior requiere de un significado de los objetos matemáticos donde el alumno sea capaz de representar, aplicar y asociar herramientas digitales. Aunque este estudio desarrolla una secuencia de actividades, los alumnos no encontraron relación entre ellas, ya que no

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

consideraban los conocimientos previos para seguir avanzando en su resolución. En este sentido, se identificaron conflictos cognitivos cuando el alumno realizó la construcción de teselados regulares, pues, aunque algunos argumentos describían un procedimiento de construcción, escasamente explícito, este no era consistente con el protocolo de construcción. Por tanto, en términos del EOS, el proceso de significación en relación con el objeto matemático de las transformaciones isométricas no fue desarrollado ostensivamente en el proceso de argumentación del alumno.

Finalmente, este estudio permite tener referencia de los tipos de argumentos a los que recurren los alumnos cuando resuelven situaciones en el contexto geométrico, mediante la aplicación de la geometría dinámica. Esto da pauta para crear una trayectoria que guíe al alumno a pasar de esquemas de argumentación no analíticos a esquemas analíticos. En este sentido, el diseño de tareas es relevante para encaminar al alumno tanto en el proceso de argumentación como a la relación estrecha entre los argumentos y el significado implicado en un proceso de construcción geométrica cuando se utiliza un software de geometría dinámica.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado con apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con número de beca 330779 y del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

BALACHEFF, N. **Is argumentation an obstacle?** Invitation to a debate…. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. 1999. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html. Acceso em: 23 abril. 2020.

BISQUERRA, R. **Metodología de la investigación educativa**. Madrid: La muralla, 2004.

BOERO, P. **Argumentation and mathematical proof:** A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. 1999. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html. Acceso em: 12 febrero. 2020.

DRIJVERS, P.; GODINO, J.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 82, n.1, p. 23-49, 2013.

DUVAL, R. **Algunas cuestiones relativas a la argumentación.** International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. 1999. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html. Acceso

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

em: 12 marzo. 2020.

FIALLO, L.; GUTIÉRREZ, A. Tipos de Demostración de Estudiantes del Grado 10º en Santander (Colombia). *En:* INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 11., 2007, La laguna. **Actas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)**. La Laguna: CajaCanarias, 2007. p. 355-368.

FLORES, Á. Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 19, n. 1, p. 63-98, 2007.

FONT, V.; GODINO, J. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 67-98, 2006.

FONT, V.; RUBIO, N. Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En: CONTRERAS, J. ARTEAGA, P. CAÑADAS, G.GEA, M. GIACOMONE, B. LÓPEZ-MARTÍN, M. (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. 2017. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acceso em: 13 agosto. 2020.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Lyon, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. **ZDM-Mathematics Education**, Berlín, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J.; GIACOMONE, B.; BLANCO, T.; WILHELMI, M.; CONTRERAS, Á. Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning. *En:* CSÍKOS, C.; RAUSCH, A.; SZITÁNYI, J. (Eds.). **Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Szegel: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2016. p. 291-298.

GODINO, J.; RECIO Á. Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 19, n. 3, p. 405-414, 2001.

HARADAS, E. Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin. **Contactos,** Ciudad de México, v. 7, n. 3, p. 45-56, 2009.

HAREL, G. Students' proof schemes revisited. *En:* BOERO, P. (Ed.). **Theorems in schools**: From history, epistemology and cognition to classroom practice. Rotterdam: Sense Publishers, 2007. p. 65-78.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studie. *En:* SCHOENFELD, A.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Eds.). **Research in collegiate mathematics education III**. Washington DC: AMS, 1998. p. 234-283.

KRUMMHEUER, G. The ethnography of argumentation. *En:* COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.). **The emergence of mathematical meaning**: Interaction in classroom cultures. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1995. p. 229-269.

LARIOS, V.; ARELLANO, C.; GONZÁLEZ, N. Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 3, p. 280-310. 2018.

LARIOS, V.; GONZÁLEZ, N. Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

ambientes de geometría dinámica. **Relime**, v. 13, n. 4-I, p. 147-160. 2010.

MARIOTTI, A. Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 44, n. 1, p. 25-53, 2000.

MOLINA, J.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 1, p. 93-116, 2019.

NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NIELSEN, J. Dialectical Features of Students' Argumentation: A Critical Review of Argumentation Studies in Science Education. **Research in Science Education**, New Zeland, v. 43, n. 1, p. 371-393, 2013.

ROJANO, M. **Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología**: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública, 2006.

RUBIO, N. **Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.** 2012. 446 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas) – Facultat de Formació del Professorat, Universitat de Barcelona, Barcelona, 2012.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (SEP). **El modelo Educativo**: El planteamiento pedagógico de la reforma educativa. Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, 2016.

TALL, D.; MEJIA-RAMOS, J. Embodiment, symbolism, argumentation and proof. *En:* INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION, 10th, 2007, Taitung City. **Proceedings on Reading, Writing and Argumentation.** Taitung City: National Taitung University, 2007. p. 1-18.

TOULMIN, S. **The Uses of Arguments**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Submetido em 12 de Fevereiro de 2020.
Aprovado em 16 de Novembro de 2020.