

Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente vmt com geogebra

Where are the notable points of a triangle located? Prospective mathematics teachers interacting within vmt with geogebra

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL¹

FELIPE DE JESUS RIBEIRO MARQUES²

Resumo

O uso de ambientes de geometria dinâmica pode auxiliar na compreensão de propriedades geométricas e na elaboração de justificativas. O GeoGebra tem sido muito explorado com esses propósitos. Todavia, sua utilização em situações que preconizam interações online ainda é escassa na educação matemática. Neste artigo analisamos interações a distância de futuros professores de matemática em um ambiente que integra o GeoGebra (VMTcG). São ilustradas análises referentes à resolução de uma atividade sobre os pontos notáveis de um triângulo. Em suas interações os licenciandos manipularam o mouse, realizaram construções no GeoGebra e buscaram justificar suas descobertas em outros espaços (chat ou quadro branco) do VMTcG. Enquanto, em uma sala, os graduandos analisaram a colinearidade dos três pontos, as observações dos licenciandos da outra estiveram circunscritas à localização de cada ponto e à natureza do triângulo. A elaboração de justificativas continua sendo um desafio em cenários virtuais de natureza discursiva como o VMTcG.

Palavras-chave: Formação inicial de professores. Ambientes de geometria dinâmica. VMT com GeoGebra. Pontos notáveis de um triângulo. Justificativas.

Abstract

The use of dynamic geometry environments can assist in the understanding of geometric properties and preparation of justifications. The GeoGebra has been widely explored for these purposes. However, its use in situations advocating online interaction is still scarce in mathematics education. In this article we analyze interactions of prospective mathematics teachers within an environment that integrates the GeoGebra (VMTcG). Analyses are illustrated referring to the resolution of an activity about the notables points of a triangle. In their interactions undergraduate students manipulated the mouse, made buildings in GeoGebra and tried ways to justify their discoveries in other spaces (chat or white board) of the VMTcG. While in one room some undergraduates analyzed the co-linearity of those three points, the observations of students within another room were related to the location of each point and the nature of the triangle.

¹ Professor da UFRRJ – Instituto de Educação/Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino – mbairral@ufrj.br

² Licenciando em Matemática pela UFRRJ. Ex-bolsista de IC do CNPq – felipe.ribeiromarques@ig.com.br

The elaboration of justification remains a challenge in virtual scenarios discursive nature as VMTcG.

Keywords: *Prospective mathematics teachers. Dynamic geometry environment. VMT with GeoGebra. Notable points of a triangle. Justification.*

Introdução

Ambientes de geometria dinâmica (AGD) podem contribuir com o aprendizado matemático, pois eles permitem a construção e o manejo de objetos matemáticos na tela do computador (PEREIRA, 2012). Um dos seus diferenciais em relação aos recursos manipulativos convencionais é a possibilidade de clicar, arrastar e transformar uma figura, mantendo ou não as suas propriedades euclidianas.

A visualização de um objeto geométrico é outra singularidade de um AGD: ele permite ao usuário observar a figura construída em diferentes perspectivas (tamanhos, posições etc.) na tela. Os AGD também favorecem a agilidade na investigação, pois as construções geométricas que tomariam algum tempo para serem realizadas no papel podem ser feitas mais rapidamente no computador (PEREIRA, 2012).

Estudos em educação matemática destacam que, com utilização de AGD, o usuário possui liberdade para procurar soluções, fazer argumentações (SCHEFFER; PASIN, 2013), testar hipóteses (RICHT et al., 2012), criar conjecturas (BACCALINI-FRANK, 2012; BACCALINI-FRANK; MARIOTTI, 2010), deduzir propriedades matemáticas e criar estratégias variadas (GRAVINA, 1996) na exploração de pontos notáveis de um triângulo (BATTAGLINO; FIGUEROA, 2012; LASA; WILHELMI, 2013).

A utilização de AGD em situações que preconizem interações *online* ainda é escassa na educação matemática (POWELL, 2014). Dessa forma, neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa realizada em um ambiente virtual com *chat* e GeoGebra. As implementações fazem parte de um projeto de pesquisa³ que analisa interações discentes e docentes em ambientes virtuais de aprendizagem. Aqui analisamos interações, no *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG), de futuros professores de matemática resolvendo uma atividade sobre os pontos notáveis de um triângulo. A análise esteve orientada pela seguinte questão de pesquisa: Que singularidades podem ser observadas nas interações dos licenciandos, quando um problema é proposto de modo diferente nas salas do VMTcG?

³ Financiado pelo CNPq (bolsa PQ e de IC)

Aprendizagem matemática em AGD: uma revisão

De acordo com Meier e Gravina (2012), o *software* GeoGebra permite uma abordagem mais divertida para temas fundamentais da geometria. Ele pode facilitar e auxiliar o professor no aprendizado do aluno. Zulatto (apud AMARAL, 2011) destaca um estudo sobre *software* de geometria dinâmica, discutindo suas potencialidades, sob o ponto de vista dos professores de Matemática que o utilizam em suas aulas. Os docentes destacaram como aspectos positivos a possibilidade de realizar construções geométricas, a promoção de atividades investigativas e de descobertas matemáticas, e a dinamicidade na visualização. Por exemplo, ao construir e arrastar as figuras, é possível identificar as propriedades geométricas descobertas. Além disso, de acordo com os professores entrevistados, quando conteúdos matemáticos são trabalhados com esses *softwares*, os alunos têm mais facilidade de observar as figuras, suas propriedades e invariantes.

Amaral (2011) destaca atividades exploratórias e colaborativas de natureza aberta, em que, juntamente com programas dinâmicos, os professores participantes do curso, utilizando *softwares* dinâmicos, conseguiram construir coletivamente justificativas e argumentações para problemas de geometria. Cirillo e Herbst (2010) sublinham a importância de os docentes e os discentes expandirem as formas de justificativas e de demonstração, para não ficarem restritos a um único método de solução. Nesse sentido, os AGD podem ser um grande aliado, principalmente, em problemas de geometria que exigem a construção de objetos.

Kusiak et al. (2012) evidenciaram que os estudantes têm interesse em participar das atividades de geometria plana realizadas com o GeoGebra. Nas turmas trabalhadas no Ensino Fundamental esta experiência manifestou a importância da utilização dos recursos tecnológicos nas aulas, pois ampliou as oportunidades de aprendizagem dos discentes, além de colaborar na estruturação do raciocínio diferenciado em termos de eficiência, rapidez e precisão. Na pesquisa de Richit et al. (2011), também com o uso do GeoGebra, foi possível que os discentes elaborassem um conjunto de atividades exploratórias e investigativas e criassem hipóteses e conjecturas a respeito de conceitos como a derivada e integral.

Powell (2014) enfatiza a importância de articular três tipos de conhecimento (tecnológico, pedagógico e do conteúdo) na incorporação de ferramentas digitais no ensino da Matemática. O pesquisador trabalhou com um grupo de professores de matemática no VMTcG, com o propósito de aprimorar as práticas dos docentes. Os

educadores trabalharam sincronicamente, em grupos de três ou quatro participantes, para discutir e solucionar problemas matemáticos de cunho exploratório e investigativo. Nesse trabalho colaborativo no ambiente virtual, o autor evidenciou normas sociomatemáticas, que são uma forma de conhecimento pedagógico e do conteúdo (CPC). Os participantes construíram argumentos, justificativas e demonstrações, o que mostra uma evolução do seu conhecimento tecnológico e do conteúdo (CTC). Também revelaram conhecimento tecnológico e pedagógico (CTP), ao usar cores para que os elementos das figuras geométricas ficassem destacados. Segundo Powell (2014), ressaltar as interseções desses conhecimentos e a sua evolução é importante para que os docentes reflitam sobre como eles podem ser incorporados na sua prática pedagógica. Como vimos, o GeoGebra vem sendo usado para trabalhar com geometria, funções, cálculo e outros conteúdos, pois o usuário pode construir, manipular ou visualizar figuras geométricas, gráficos, tabelas etc. Existem diversos AGD utilizados nas pesquisas em educação matemática, por exemplo, régua e compasso, *Geometricks*, *Tabulae*, *Cabri-Geómètre*, *Geoplan* e GeoGebra.

Em nosso projeto atual estamos usando o GeoGebra, porém integrado no ambiente *Virtual Math Team* (VMT) com GeoGebra, o VMTcG. Acreditamos que o VMTcG pode contribuir no ensino como mais uma possibilidade para dinamizar o trabalho com os conteúdos matemáticos, principalmente aqueles que exigem construções mais sofisticadas e diferentes formas de visualização dos objetos construídos.

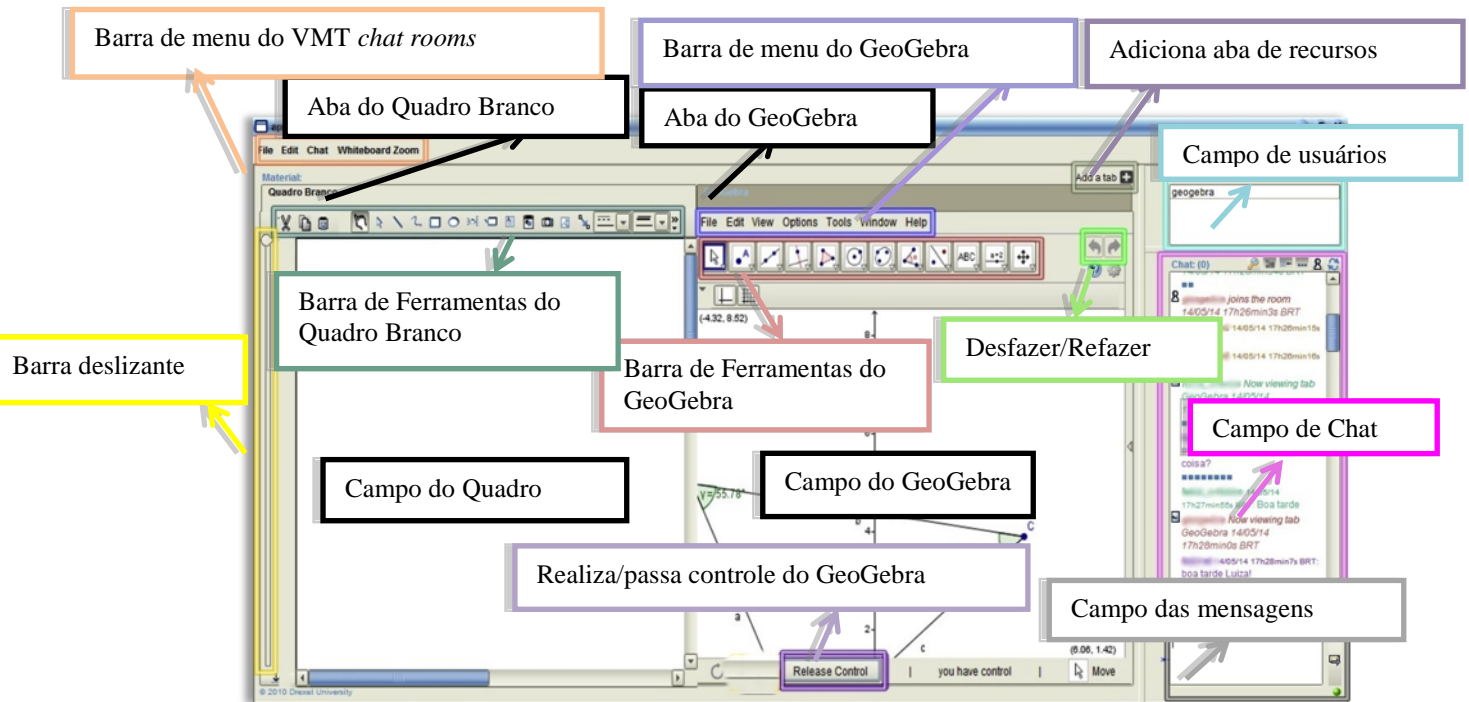
A pesquisa: contextualização, análise e coleta de dados

O contexto onde coletamos os dados da investigação é o VMTcG, que é um ambiente virtual gratuito utilizado para a resolução colaborativa de atividades de matemática. Ele é desenvolvido por uma universidade na Philadelphia (EUA). O *site* VMTcG possui três áreas principais: o VMT *lobby*, o VMT *chat rooms* e o VMT *wiki*.

No VMT *chat rooms* são trabalhadas as atividades. Ele é constituído do quadro branco⁴ (*white board*) para construções, desenhos e representações gráficas variadas; do GeoGebra, que auxilia na resolução das tarefas; da *wiki* e da área de *chat*, que serve para interações por escrito. Na Figura 1 são ilustradas algumas das partes de uma sala no VMTcG.

⁴ O VMTcG inicia com o quadro branco, e para abrir o GeoGebra é necessário clicar na aba correspondente. Essas duas áreas não são abertas simultaneamente.

Figura 1: Imagem da sala do VMTcG editada



Fonte: Elaboração dos autores

O quadro branco das salas possui ferramentas similares a outros programas, por exemplo, o *Word* e *Paintbrush*. O GeoGebra do VMTcG tem as mesmas funcionalidades de construção do GeoGebra 2D. A única diferença é que o VMTcG possui o botão *Realize/take control* (Realiza/Passa controle). O objetivo desse botão é que os integrantes das salas trabalhem no programa um a cada vez, ou seja, quando o usuário tem necessidade de construir algo, ele solicita ao grupo o controle do programa. Tudo o que um integrante do ambiente fizer, os outros acompanham, observando.

A barra deslizante é outra ferramenta das salas do VMTcG. Ao deslizá-la, ela mostra todo histórico construído no quadro branco ou no GeoGebra. Por exemplo, construíram um triângulo e um quadrado em uma sala. É possível saber qual polígono foi construído primeiro: deslizando a barra para cima, ela desfaz tudo que foi feito no campo gráfico do GeoGebra e, movendo-a para baixo, ela refaz toda a construção. Existe também um botão *Add a Tab*, cuja função é adicionar uma aba de algum recurso disponível no ambiente, como o GeoGebra e o quadro branco.

A área do *chat* é dividida em três campos: o campo de mensagens, o de usuários e o de *chat*. A finalidade do campo de mensagens é a escrita dos diálogos entre os integrantes da sala. Já o campo de usuários mostra quem está no ambiente. Por último, o campo de

chat registra a escrita dos participantes com sinalizadores temporais de interação e de outras ações feitas no quadro branco.

Existe uma função na área do *chat* na qual podemos indicar algo no quadro branco, ou seja, fazer referência entre uma mensagem escrita e uma ilustração no quadro ou vice-versa. As salas do VMTcG são constituídas de quatro participantes e um professor. Esse número de participantes facilita acompanhar os interlocutores durante seu trabalho no *chat*, no quadro e no GeoGebra (BAIRRAL; SALLES, 2012; KINDEL, 2012).

O VMTcG ainda pode gerar um tipo de planilha, com toda a conversação feita no campo de *chat*, ou seja, um novo tipo de transcrição para coleta de dados, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Planilha gerada em HTML pelo sistema do VMTcG

Chat transcript for the room: "triângulo não construído"											
Chat Index	Date	Time Start Typing	Time of Posting	hugo_esquivel	jhony_rabello	angelica_alessandra	geogebra	alinet	bairral	GeoControlTimer	Refers to
1	05/13/2014		19:16:17					joins the room			
	05/13/2014		19:39:54					[alinet created a textbox]			
	05/13/2014		19:39:55					START:TextEditing			
	05/13/2014		19:40:14					[alinet changed the text to: Construum]			
	05/13/2014		19:40:19					[alinet changed the text to: Construum um tri]			
	05/13/2014		19:40:24					[alinet changed the text to: Construum um tri]			
	05/13/2014		19:40:29					[alinet changed the text to: Construum um triangu...]			
	05/13/2014		19:40:33					[alinet changed the text to: Construum um triangu...]			
	05/13/2014		19:40:39					[alinet changed the text to: Construum um triangu...]			

Fonte: Acervo pessoal

A transcrição gerada acima é editada em um documento. Nessa edição, vamos reduzindo a informação de acordo com o foco de análise e acrescentando dados provenientes de construções no GeoGebra e outras representações pictóricas provenientes do quadro branco.

Análise de interações no VMTcG

Neste artigo descreveremos parte do processo de resolução *online* das tarefas pelos licenciandos. Assumimos interação como um processo comunicativo que objetiva o compartilhamento de significados. No nosso caso, são os significados para os objetos matemáticos em socialização *online* constante, segundo intercâmbios síncronos nos diferentes espaços do VMTcG. Analisamos o aprendizado matemático mediante as interações.

O trabalho de campo teve salas com dois propósitos diferentes: **1)** salas para a ambientação no VMTcG e **2)** salas para a resolução da tarefa proposta. As análises exemplificadas neste artigo são as salas de resolução da atividade. Nelas os graduandos interagiram aproximadamente 1 hora e 30 minutos.

Na ambientação os interlocutores têm oportunidade de se familiarizar com o ambiente virtual. Não há atividade matemática específica para ser resolvida. É apenas um conhecimento do cenário e de seus diferentes espaços. Os licenciandos⁵ interagiram aproximadamente 30 minutos. Nesse tempo, normalmente, os participantes percebem, por exemplo, que o GeoGebra não pode ser utilizado ao mesmo tempo por todos, pois um botão do VMTcG, chamado *take control* (passa o controle), possibilita o trabalho de apenas um participante no GeoGebra.

Licenciandos interagindo no VMTcG e analisando a posição dos pontos notáveis de um triângulo

Analisamos dois contextos interativos: a sala triângulo construído⁶ e a sala triângulo não construído⁷. Cada sala é considerada uma unidade de análise, e elas foram planejadas do seguinte modo:

Tabela 1: Descrição das implementações

Sala	Propósito	Tempo de trabalho	Participantes
Ambientação 1 e 2	Trabalho livre no VMT para o conhecimento de algumas de suas ferramentas	30 min	Fernanda, Flávia, Gustavo, Joaquim, Jonatas e Rose
Triângulo construído	Observem o triângulo construído no GeoGebra e os três pontos notáveis (ortocentro/O, circuncentro/C e baricentro/B). Agora movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.	1 hora e 30 minutos	Flávia, Jonatas e Rose
Triângulo não construído	Construam um triângulo qualquer no GeoGebra. Agora localizem o seu ortocentro (O), o seu circuncentro (C) e o seu baricentro (B). Movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.		Fernanda, Joaquim e Gustavo

Fonte: Elaborada pelos autores

⁵ Eles possuíam conhecimento do GeoGebra e estavam fisicamente em lugares diferentes.

⁶ Nesta sala ficaram os discentes com familiaridade com o *software* GeoGebra.

⁷ Nesta sala ficaram os discentes que não conheciam o GeoGebra ou tinham pouca familiaridade com o *software*.

Embora as atividades sejam diferenciadas (em termos de construção geométrica e de domínio de ferramentas do GeoGebra), o seu propósito era o mesmo: analisar o comportamento dos pontos notáveis de um triângulo. O conhecimento prévio dos licenciandos era diferenciado em termos de uso de GeoGebra, e nenhum deles tinha trabalhado no VMTcG antes. Vejamos parte do processo interativo em cada sala.

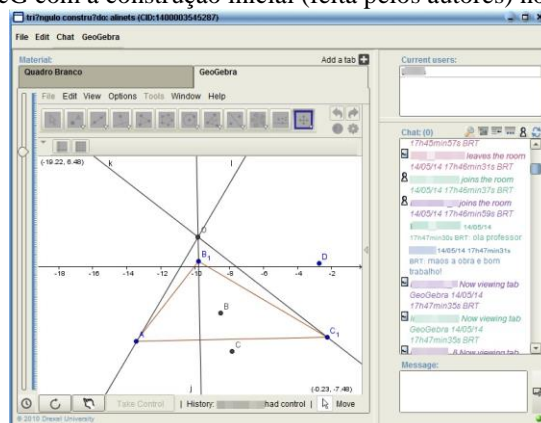
Interações na sala triângulo construído⁸

A tarefa proposta foi a seguinte:

Observem o triângulo construído no GeoGebra e os três pontos notáveis (ortocentro/O, circuncentro/C e baricentro/B). Agora movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.

Na sala já estava construído um triângulo qualquer e os pontos notáveis; desse modo, cabia aos integrantes trabalhar com a figura fornecida.

Figura 3: Sala do VMTcG com a construção inicial (feita pelos autores) no quadro branco



Fonte: *Printscreen* da sala triângulo construído do VMTcG

Os interlocutores começaram a movimentar a construção e a observar o que acontecia com os pontos notáveis e também com o triângulo. Começaram a surgir as primeiras observações, por exemplo.

Quadro 1: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem ⁹
76	Jonatas	eu observei que em qualquer tipo de triângulo, esses pontos são colineares
77	Flávia	isso, eles dependem dos pontos azuis
78	Flávia	Azuis
79	Jonatas	outra, se o triângulo for retângulo, O é o vértice do ângulo reto e C e o ponto médio da hipotenusa
80	Jonatas	e outra, B esta sempre entre O e C

⁸ Nesta sala o triângulo e os três pontos foram previamente construídos por nós. Os licenciandos podiam fazer construções complementares, se necessário.

⁹ A plataforma VMT registra todas as inscrições no ambiente. Esse tipo de tabela é gerado a partir desse registro, inclusive os índices, que são os ordenadores dos turnos de interação.

81	Flávia	faz ele retângulo ai, Rose
82	Flávia	pra eu observar
83	Felipe	mas tente justificar essa observações Jonatas
84	Jonatas	difícil hein

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Neste trecho¹⁰ percebemos *Jonatas*¹¹ fazendo algumas observações (76-80), porém a tarefa não consistia só em fazê-las, mas também em justificá-las. O participante *Felipe* fez o questionamento (“*mas tente justificar essas observações Jonatas*”, 83), que foi respondido por Jonatas: “*difícil hein*” (índice 84). Assim, percebemos que este integrante fez boas observações, mas explicitava dificuldades iniciais em justificar suas ideias.

Quadro 2: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
88	Felipe	é só usar definição Jonatas
89	Flávia	verdade, Jonatas.. essa eu não tinha reparado
90	Rose	sim, está retângulo
91	Felipe	Sim
92	Felipe	Flávia
93	Flávia	Sim sim
94	Jonatas	isso é fácil de ver... pois o ortocentro é o encontro de todas as alturas, certo?
95	Jonatas	e no triângulo retângulo, 2 alturas são os catetos
96	Jonatas	tah certo o que eu falei?
97	Artur	concordo Jonatas
98	Artur	o que dizem a Flávia e a Rose?
99	Flávia	eu concordo tbm
100	Rose	Concordo

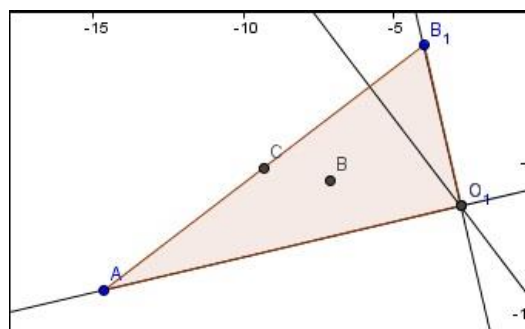
Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

No Quadro 2, o mediador *Felipe* inicia auxiliando o discente *Jonatas* na ideia para argumentar (88) sobre as observações feitas no Quadro 1 (76-80). No decorrer deste trecho, percebemos os outros integrantes intrigados com suas observações. A graduanda *Rose* tentou justificar uma das observações (“*outra, se o triangulo for retângulo, O é o vértice do ângulo reto e C e o ponto médio da hipotenusa*”, 79), movimentando o triângulo até ficar com um formato de um triângulo retângulo (“*sim, está retângulo*”, 90). Embora a observação de *Rose* estivesse correta, ela não havia se certificado se a construção feita era mesmo um triângulo retângulo, como ilustra a Figura 4, a seguir:

Figura 4: Construção inicial no VMTcG do triângulo e dos pontos notáveis

¹⁰ Todos os trechos foram transcritos na forma natural da interação.

¹¹ Todos os nomes são fictícios. Felipe e Artur são os professores no VMTcG.



Fonte: *Printscreen* da tela no VMTcG

Analisando a Figura 4, *Jonatas* notou que duas alturas do ponto notável ortocentro coincidiam com os catetos do triângulo retângulo (94-95). Entretanto, o licenciando também aparentou não atentar para verificar se o triângulo era retângulo. Esse apelo visual é muito comum no trabalho com ambientes de geometria dinâmica (MEIER; GRAVINA, 2012). Intrigado, *Jonatas* perguntou aos integrantes da sala se sua observação estava correta. O professor *Artur* concordou com suas ideias e, em seguida, *Flávia* e *Rose* também concordaram (96-100). No trecho seguinte, notamos que os discentes estavam movimentando livremente a figura, sem a utilização do GeoGebra, como era esperado.

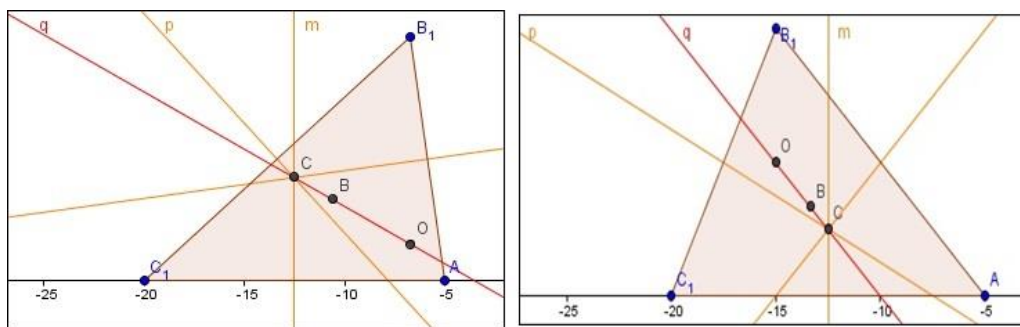
Quadro 3: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
113	Jonatas	Posso colocar uma reta vermelha aqui q sempre passara pelos 3 pontos?
114	Flávia	Pode..ve se vai
115	Flávia	Isso nao prova que eles são colineares
116	Flávia	Isso prova?
117	Jonatas	Acompanhem a reta vermelha
118	Jonatas	Comprovei?
119	Flávia	Certo...e sempre q vc movimenta os pontos, ela se move junto
120	Jonatas	Isso...então mostra que sempre serão colineares
121	Jonatas	Tah certo, professor?

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

O fragmento acima mostra ideia de *Jonatas* para comprovar a colinearidade dos pontos notáveis. Ele sugeriu colocar uma reta ligando os pontos e, seguidamente, movimentou o triângulo e percebeu (113-120) que a reta continuava unindo o ortocentro (O), o baricentro (B) e o circuncentro (C), como mostra a Figura 5.

Figura 5: Construção inicial como retas acrescentadas pelos licenciandos



Fonte: *Printscreen* da tela no VMTcG

Todavia, *Flávia* estava com dúvida se isso provava (115-116). *Jonatas* perguntou ao professor se estava correto (121), o que foi ratificado por *Felipe* (127). Essa observação, embora correta, não significava provar.

Quadro 4: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
126	Jonatas	Correto?
127	Felipe	Correto
128	Jonatas	E ainda digo mais... B sempre estava entre O e C

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Continuando sua reflexão, *Jonatas* apresentou mais uma observação: que o baricentro estava entre o circuncentro e ortocentro (128). Essa informação estava correta. Ela vem de um teorema¹², e a reta que passa nesses pontos é conhecida como Reta de Euler. Optamos por não apresentar essa informação naquele momento, para deixar o processo interativo fluir mais dinamicamente com as descobertas dos futuros professores.

Quadro 5: Fragmentos de mensagens escritas

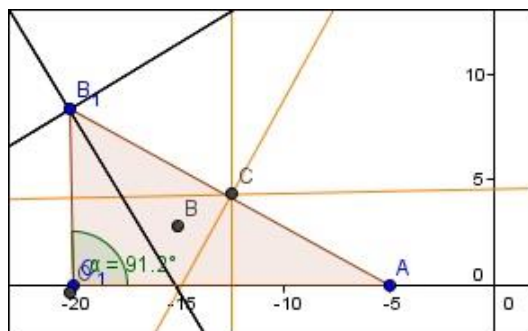
Índice	Autor	Mensagem
132	Jonatas	Usa o plano cartesiano e coloca um cateto no eixo x, e o outro no eixo y fica retângulo
133	Felipe	O triângulo
134	Jonatas	Cartesiano

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Aqui, neste pequeno fragmento, *Jonatas* estava tentando orientar as colegas *Rose* e *Flávia* a justificarem uma das observações feitas (“*outra, se o triângulo for retângulo, O é o vértice do ângulo reto e C é o ponto médio da hipotenusa*”, 79). As futuras professoras mediram um dos ângulos do triângulo e estavam movimentando-o, porém, não estavam conseguindo deixar o ângulo com a medida de 90° , como mostra a Figura 6.

Figura 6: Construção e ângulo medidos pelos licenciandos

¹² O teorema diz que, em um triângulo qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro, e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.



Fonte: Printscreen da tela no VMTcG

Observamos que as graduandas tiveram dificuldades em manusear o *software* para chegar a uma argumentação desejada e acabaram apagando o triângulo, como mostra o índice 152 do Quadro 6.

Quadro 6: Fragmentos de mensagem escrita na sala triângulo construído

Índice	Autor	Mensagem
152	Flávia	Professor, eu destruí o triangulo..rsrs
153	Artur	Não tem problema..rsrs

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Dado o avançado da hora, o professor *Artur* decidiu terminar a sessão. Antes, pediu (157-158) que colocassem as observações feitas na sala, e os participantes o fizeram (159-164).

Quadro 7: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
157	Artur	Oi Flávia, sim, podemos terminar, mas para fecharmos coloque aqui as observações que vocês fizeram
158	Artur	Diga, sobre os pontos B, O e C.
159	Flávia	O B C são colineares
160	Rose	A gente viu que o C realmente é p circuncentro, pois a partir do lados fiz as mediatrizes
161	Flávia	O Jonatas mostrou isso com a reta vermelha que passa q pelos 3 pontos
162	Artur	Ok, algo mais?
163	Felipe	Mas Rose eu já disse isso na questão
164	Flávia	Tem a questão do triangulo retângulo que um dos pontos e o ponto médio da hipotenusa

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Com esta atividade, percebemos que os participantes conseguiram fazer as observações. Entretanto, eles encontraram dificuldades para certificar algumas de suas ideias. Acreditamos que a pouca experiência com o *software* e também com o ambiente tenha dificultado suas justificativas; no entanto, ainda houve discente que conseguiu justificar uma das observações ditas, que foi o caso da colinearidade dos pontos notáveis (Quadro 1, índice 76; Quadro 7, índices 160 e 161).

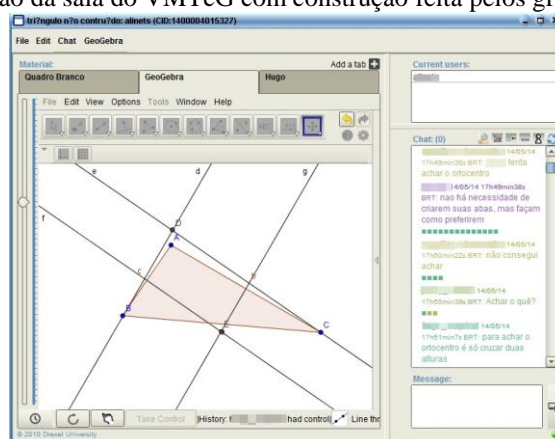
Interações na sala triângulo não construído¹³

A tarefa proposta foi a seguinte:

Construam um triângulo qualquer no GeoGebra. Agora localizem o seu ortocentro (O), o seu circuncentro (C) e o seu baricentro (B). Movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.

Os integrantes trataram de construir um triângulo qualquer e tentaram localizar seus pontos notáveis, como ilustra a Figura 7.

Figura 7: Ilustração da sala do VMTcG com construção feita pelos graduandos



Fonte: *Printscreen* da sala triângulo não construído do VMTcG

Conforme prevíamos, alguns graduandos não se lembravam das definições de ortocentro, baricentro e circuncentro. Com isso, tiveram problemas iniciais na construção dos pontos notáveis, principalmente o baricentro. O mediador *Felipe* informou os participantes (85) sobre esses pontos, como ilustra o Quadro 8.

Quadro 8: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
85	Felipe	Lembrando o baricentro é o encontro das medianas, o ortocentro encontro das alturas e circuncentro o encontro das mediatrizes
86	Gustavo	Me perdi galera
87	Felipe	Movendo o triângulo que observações vcs podem dar
88	Gustavo	Não estou tendo acesso ao desenho
89	Joaquim	Bom, ortocentro e o circuncentro são externos ao triângulo
90	Joaquim	Então ele é obtusângulo
91	Felipe	Gustavo feche e abra novamente

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

Além de relembrar a definição dos pontos notáveis, *Felipe* perguntou que observações os participantes poderiam fazer (86). *Gustavo* estava tendo dificuldades de acesso, e o mediador lhe sugeriu fechar e abrir a sala novamente (86-91). *Joaquim* fez uma

¹³ Nesta sala os licenciandos precisaram realizar todas as construções.

observação, que informava que, se o ortocentro e o circuncentro estiverem fora do triângulo, então, este será obtusângulo.

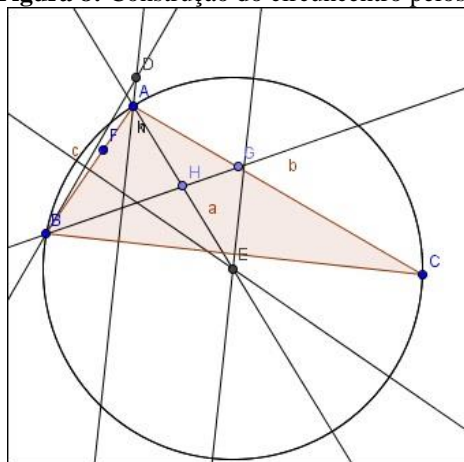
Quadro 9: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
135	Joaquim	O círculo tem que passar exatamente nos três vértices do triângulo
136	Joaquim	As mediatrizes estavam certos
137	Gustavo	Eu fiz isso
138	Joaquim	Ficou um pouquinho fora quando vc fez
139	Joaquim	Tenta aí
140	Gustavo	Ok
141	Gustavo	E aí?
142	Joaquim	Viu, tá fora ainda
143	Joaquim	Não está passando pelo ponto A
144	Joaquim	As mediatrizes estão certas
145	Gustavo	Tá sim
146	Joaquim	O círculo, não
147	Fernanda	A construção da circunferência a partir dos vértices do triângulo estava errada para achar o circuncentro
148	Joaquim	O raio do círculo tem que ser EA, EB ou EC
149	Joaquim	O centro é o ponto E
150	Fernanda	?
151	Joaquim	Isso
152	Gustavo	No meu visor está aparecendo a construção correta mas para vc!
153	Gustavo	Vcs
154	Felipe	Correto
155	Fernanda	Apareceu certo pra mim
156	Gustavo	acho que foi atualizado a página
157	Joaquim	Pra mim tbm tá certo

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

O trecho acima ilustra algo intrigante ocorrido na sala, que acabou tirando o foco da tarefa nesse período. Um dos participantes construiu o ponto notável que era o circuncentro e criou a circunferência que passava pelos vértices do triângulo, com origem neste ponto (C). Todavia, como não estava aparecendo esta construção para *Joaquim*, começaram a interagir sobre o ocorrido (152). No primeiro momento, *Joaquim* achou que *Gustavo* tivesse feito incorreto, mas *Gustavo* rebateu, dizendo que tinha feito correto, e posteriormente apareceu a construção na forma descrita por *Gustavo* (135-152). No final, *Gustavo* perguntou aos demais integrantes se estavam conseguindo ver a figura corretamente. Eles confirmaram, inclusive *Joaquim* (152-157). A Figura 8 gerou esse debate:

Figura 8: Construção do circuncentro pelos graduandos



Fonte: *Printscreen* da tela no VMTcG

Acreditamos que dificuldades comunicativas como as anteriores podem ter ocorrido por problemas de Internet, pois o VMTcG exige uma excelente conexão. Ou pode ter havido problemas operacionais da página que estávamos utilizando.

Quadro 10: Fragmentos de mensagens escritas

Índice	Autor	Mensagem
200	Felipe	Pessoal o que vcs podem dizer sobre a relação desses pontos notáveis
201	Felipe	Com o triângulo
202	Joaquim	A posição dos pontos muda de acordo com tipo de triângulo
203	Joaquim	Se for obtusângulo, por exemplo, o ortocentro é exterior a ele
204	Felipe	Que tipo
205	Felipe	São eles
206	Joaquim	Se for acutângulo, é interior...
207	Joaquim	Se for equilátero, os três pontos se sobrepõem
208	Felipe	Correto
209	Artur	Muito bem, e vcs podem justificar
210	Joaquim	Na questão do ortocentro no triângulo obtusângulo, é porque a altura encontra o prolongamento do lado, não o lado em si
211	Joaquim	No triângulo equilátero, já que todos os lados são iguais, a mediana é também, perpendicular, como a altura
212	Joaquim	Então ambas, na verdade, são mediatrizes
213	Felipe	Certo mas como vc pode afirmar que o triângulo é deste tipo
214	Joaquim	Determinar o tipo do triângulo usando as cevianas, é isso?

Fonte: Transcrições geradas pelo VMTcG

No Quadro 10, *Felipe* voltou a perguntar sobre a relação dos pontos notáveis com o triângulo (200-201), e *Joaquim* apresentou algumas observações (202-207). *Artur* animou e questionou os participantes (“*Muito bem, e vcs podem justificar*”, 210). *Joaquim* trouxe justificativas (2011-212) e *Felipe* retornou (“*Certo mas como vc pode afirmar que o triângulo é deste tipo*”, 213), pois percebeu pouca movimentação do triângulo e não observou o uso de ferramentas do GeoGebra para ratificar as justificativas de *Joaquim*.

Resultados e reflexões sobre as interações em cada sala analisada

As interações dos licenciandos ocorriam natural e simultaneamente, com inserções e justificativas, ora no quadro branco, ora no *chat* e nas construções no GeoGebra. Em ambas as salas os participantes trabalharam em uma mesma figura. Quando um licenciando mexia nela, todos tinham a visualização simultânea do que acontecia. Quando um estudante queria realizar alguma construção ou manipulação no GeoGebra, ele(a) solicitava o *mouse*, usando o comando *passa o controle*. Todo o processo de movimentação e exploração era observado – na tela – por todos os integrantes da sala. Embora a dinâmica de trabalho (manipulação, observação, construção, justificação) dos graduandos tenha sido a mesma em ambas as salas do VMTcG, as suas explorações e descobertas matemáticas, conforme esperávamos, foram bem diferentes, como pode ser visto no Quadro 11.

Quadro 11: Singularidades nas interações em cada sala

Objetivo: analisar o posicionamento do ortocentro, do circuncentro e do baricentro em um triângulo qualquer	Sala com construções iniciais e licenciandos sem experiência prévia com o GeoGebra	Sala sem construções e licenciandos com experiência com o GeoGebra
Enunciado da atividade	Observem o triângulo construído no GeoGebra e os três pontos notáveis (ortocentro/O, circuncentro/C e baricentro/B). Agora movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.	Construam um triângulo qualquer no GeoGebra. Agora localizem o seu ortocentro (O), o seu circuncentro (C) e o seu baricentro (B). Movam os pontos livres e façam três observações. Lembrem-se de justificar cada uma das vossas observações.
Propriedades geométricas emergentes nas interações	-Os pontos B, O e C são colineares. - B sempre está entre O e C.	-A posição dos pontos muda, de acordo com tipo de triângulo. -O ortocentro e o circuncentro são externos ao triângulo. Se for obtusângulo, por exemplo, o ortocentro é exterior a ele. Se for acutângulo, é interior. Se for equilátero, os três pontos se sobrepõem.
Algumas justificativas	-“A gente viu que o C realmente é o circuncentro, pois a partir do lados fiz as mediatrizes” (Quadro 7, índice 160) -“O Jonatas mostrou isso com a reta vermelha que passa pelos 3 pontos” (Quadro 7, índice 161)	-“No triângulo equilátero, já que todos os lados são iguais, a mediana é também, perpendicular, como a altura (Quadro ... índice 211)
Marcas interativas de reflexões colaborativas	- “ tah certo o que eu falei?” (Quadro 2, índice 96) -“ A gente viu que ... ” (Quadro 7, índice 160) -“o que dizem a Flávia e a Rose?” (Quadro 2, índice 98)	- “Me perdi galera ... ” (Quadro 8, índice 86) -“ Viu , tá fora ainda” (Quadro 9, índice 142) -“ Pessoal o que vcs podem dizer sobre ...” (Quadro 10, índice 200)
Dúvida	“Comprovei?” (Quadro 3, índice	“Determinar o tipo do triângulo

	118)	usando as cevianas, é isso?" (Quadro ... índice 214)
Sobre as interações e as explorações dos licenciandos no VMTcG	Os licenciandos tiveram mais tempo para realizar novas construções e detiveram-se na observação da colinearidade dos três pontos e na posição do ponto B em relação aos outros dois (O e C).	Os licenciandos tiveram menos tempo para realizar novas construções, mas também atenderam ao propósito da atividade. Suas descobertas ficaram circunscritas à localização de cada ponto e à natureza do triângulo (acutângulo, obtusângulo e equilátero).

Fonte: Elaboração dos autores

As descobertas matemáticas dos dois grupos de futuros professores estavam adequadas à resolução da atividade. Enquanto em uma sala os graduandos analisaram a colinearidade dos três pontos, as observações dos licenciandos da outra estiveram circunscritas à localização de cada ponto e à natureza do triângulo.

O fato de ter a figura previamente construída possibilitou aos participantes realizar mais movimentações, enquanto na outra sala os graduandos tiveram que dedicar um tempo maior fazendo construções e movimentaram menos. Outro fato que também nos chamou a atenção foi que, na sala que possuía a figura construída, os graduandos utilizaram mais ferramentas do GeoGebra (medir ângulos, mover, observar eixos e ponto médio) para verificar a validade de suas conjecturas.

Mesmo havendo uma variedade de observações e reflexões de cunho colaborativo, percebemos nas duas salas a falta de uma justificativa mais elaborada para as mesmas propriedades emergentes. O convencimento pela mera visualização da figura parece ter sido suficiente em alguns casos. Em outras situações, o processo de geração de conjecturas é tão rico e variado (BACCAGLINI-FRANK; MARIOTTI, 2010) que essa diversidade pode ter sido um distrator no encadeamento (AMARAL, 2011) coletivo da justificativa.

A dificuldade na organização de uma justificativa mais convincente pode ter ocorrido, também, pelo tempo dedicado à resolução da atividade. Além do mais, o VMTcG traz um novo formato simultâneo de comunicação (mensagens escritas, inserções no quadro branco e construções no GeoGebra) e uma dinâmica interativa (síncrona) com que os licenciandos precisam também se familiarizar mais. A conexão lenta da Internet pode ter sido outro limitador ao trabalho. Portanto, cabe investigar mais como interações no VMTcG podem auxiliar no aprimoramento de processos de prova (LASA; WILHELMI,

2013), que precisam ser diversificados (CIRILO; HERBST, 2010), inclusive em ambientes virtuais.

Considerações Finais

Nesse artigo analisamos interações de futuros professores de matemática em um ambiente virtual com o GeoGebra. Foram ilustradas análises referentes à resolução de uma atividade na qual os licenciandos manipularam via *mouse*, realizaram construções no *software* GeoGebra e buscaram justificar suas descobertas em outros espaços do VMTcG. Um grupo explorou a colinearidade dos três pontos notáveis do triângulo, e o outro analisou a localização de cada ponto e a forma do triângulo. A dinâmica interativa do VMTcG e as descobertas feitas pelos licenciandos enriquecem o trabalho sobre os pontos notáveis de um triângulo (BATTAGLINO; FIGUEROA, 2012).

O VMTcG mostra-se um ambiente virtual propício para discussão colaborativa de problemas matemáticos, em pequenos grupos, seja com futuros professores (KINDEL, 2012), seja com docentes em formação continuada (POWELL, 2014). É importante ressaltar que, em contextos virtuais com natureza discursiva como o VMTcG, uma atividade proposta de modo diferente deflagra um processo interativo diverso. Esse planejamento tem implicações na comunicação e, conseqüentemente, no aprendizado dos interlocutores. Portanto, o presente estudo ratifica a inter-relação de questões de natureza didática, comunicativa e cognitiva no desenvolvimento profissional docente em cenários virtuais (BAIRRAL, 2013).

O tipo de atividade proposto no VMTcG permitiu aos licenciandos pensarem e refletirem nas ideias geradas e, com ajuda do GeoGebra e da interação favorecida pelo quadro branco e pelo *chat*, os integrantes construíram, observaram propriedades e elaboraram justificativas para as propriedades emergentes em suas manipulações. Todavia, é importante destacar que nem sempre um *chat* é suficiente para esgotar uma discussão e dar conta da solução de um problema ou da construção de determinada prova matemática (BAIRRAL, 2013).

Acreditamos que a vivência formativa ocorrida no VMTcG tenha contribuído para que os discentes interagissem *online*, conjecturassem, percebessem a importância de justificar suas ideias e trabalhar colaborativamente em tarefas de geometria, mesmo que para alguns essa justificativa não seja simples. Acreditamos, também, que esse tipo de

trabalho tenha trazido aos futuros educadores um novo olhar sobre os ambientes virtuais como mais uma possibilidade de inovação para as suas aulas de matemática.

Enfim, ao realizarmos inovações desse tipo, estamos contribuindo com a formação inicial de professores de matemática para o uso de AGD em suas aulas e tornando os futuros docentes mais conscientes da importância de desenvolver estratégias de análise de interação e de criar formas para promoção do debate colaborativo (AMARAL, 2011) e argumentativo (SCHEFFER; PASIN, 2013) constante entre os interlocutores.

Referências

AMARAL, R. B. Argumentação matemática colaborativa em um ambiente *online*. *Acta Scientiae*, Canoas, v.13, n.1, 2011.

BACCAGLINI-FRANK, A. E. B. Dragging and Making Sense of Invariants in Dynamic Geometry. In this activity, students learn to make conjectures about properties that do not change. *Mathematics Teacher*. v. 105, n. 8, 2012.

BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*, v. 15, n. 3, p. 225-253, 2010.

BAIRRAL, M. A. *O uso de chat e de fórum de discussão em uma educação matemática inclusiva* (Vol. 5). Rio de Janeiro: Edur, 2013.

BAIRRAL, M. A.; SALLES, A. T. Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. *Investigações em Ensino de Ciências*. Porto Alegre, v.17, n.2, p. 453-466, 2012

BATTAGLINO, A. I.; FIGUEROA, M. El baricentro y las medianas de un triángulo: una experiencia en el aula. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*. São Paulo, v.1, n. 2, p. 42-48, 2012.

CIRILLO, M.; HERBST, P. G. *Moving Toward More Authentic Proof Practices in Geometry*. 2010. Disponível em:
<<http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/78169/Ciri?sequence=1>>.
Acesso em: 19 nov. 2014, 13:05.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 1996, p.1-13.

KINDEL, D. S. *Um ambiente colaborativo a distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNIBAN, São Paulo, 2012.

KUSIAK, R. S. et al. A utilização do software GeoGebra no ensino da geometria plana: uma experiência PIBID. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE INCLUSÃO DIGITAL. 2012, Passo Fundo. Anais... Passo Fundo, 2012.

LASA, A.; WILHELMI, M. R. Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*. São Paulo, v. 2, n. 1, p.52-64, 2013.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA*, 2012, São Paulo. *Anais...* p. CCL-CCLXIV, 2012.

PEREIRA, T. de L. M. *O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

POWELL, A. B. Construção colaborativa do conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo de professores de Matemática. *Boletim Gepem*. n.64, p. 1-19, 2014. <http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.023>

RICHIT, A. et al. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. *In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA*, 1., 2011, São Paulo. *Anais...* São Paulo, 2012, p. 90- 99.

SCHEFFER, N. F.; PASIN, P. A argumentação de professores de matemática suscitada pelo uso de softwares dinâmicos: construindo significados. *Vidya*. Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 9-17, 2013.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2002.

Enviado: 31/07/2015

Aceito: 24/12/2015