Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem

Realistic mathematics education: an approach to teaching and learning processes

PAMELA EMANUELI ALVES FERREIRA[1]
REGINA LUZIA CORIO DE BURIASCO[2]

Resumo

Este artigo é resultado de um estudo teórico e tem como objetivo geral apresentar algumas ideias e princípios da abordagem holandesa para o ensino e aprendizagem de matemática chamada Educação Matemática Realística (RME - Realistic Mathematics Education). A RME é tema de alguns trabalhos desenvolvidos no interior do GEPEMA – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – e sustenta a perspectiva teórica do grupo no que diz respeito aos processos de ensino, de aprendizagem, de avaliação. Esse artigo busca apresentar alguns aspectos do contexto de origem e dos princípios gerais que a configuram. Como resultado, apresentamos ao final do texto um quadro resumo dos seis princípios que regem a RME, os quais são discutidos ao longo do texto. Uma intenção subjacente é de divulgar em âmbito nacional as principais ideias que sustentam essa abordagem para fomentar a pesquisa nessa perspectiva.

Palavras-chave: *Educação Matemática Realística. Matematização. Hans Freudenthal.*

Abstract

This paper is the result of a theoretical study and its aim to present the ideas and principles of Realistic Mathematics Education (RME) – the Dutch approach to teaching and learning mathematics. The RME is subject of GEPEMA's research – Group of Study and Research in Mathematics Education and Assessment – and supports their theoretical perspective with regard to the teaching, learning, and assessment processes. This article presents aspects of RME's context and the general principles. As a result, we present an overview of the six principles for RME, which are discussed in this paper. An intention is to promote research by the dissemination of the main ideas of this approach.

Keywords*: Realistic Mathematics Education. Mathematizing. Hans Freudenthal.*

Neste artigo[3] tecemos considerações a respeito de uma abordagem para o ensino e aprendizagem denominada Educação Matemática Realística – RME[4]. Ao longo do texto são apresentadas algumas características que configuram essa abordagem, a qual é foco

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, docente do Depto. de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – PR. E-mail: pamelauel@gmail.com
[2] Doutora em Educação, docente do Depto. de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – PR. Bolsista do CNPq – Brasil. E-mail:*reginaburiasco@gmail.com*
[3] Parte desse artigo é resultado da investigação realizada por Ferreira (2013).
[4] Sigla pela qual é mais conhecida e que corresponde às iniciais de *Realistic Mathematics Education*.

de estudos do GEPEMA[5]. A partir da tese[6] de doutorado de sua coordenadora, o GEPEMA tem se dedicado ao estudo e pesquisa de práticas de avaliação que envolvem o ensino e a aprendizagem de Matemática e trabalhado em pesquisas que visam conceituar e operacionalizar a avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. A RME se tornou objeto de pesquisa do grupo por apresentar características que se alinham à sua perspectiva de avaliação. Uma intenção subjacente à apresentação desse artigo é a de divulgar a abordagem RME para fomentar a discussão e pesquisa de práticas relacionadas à avaliação.

Nasce uma abordagem

A Educação Matemática Realística – RME é uma abordagem para o ensino que surgiu na Holanda entre o final da década de 1960 e começo dos anos 1970. Nessa época, educadores holandeses, influenciados pelas ideias de Hans Freudenthal (1905-1990), buscavam elaborar uma proposta curricular que modernizasse a Educação Matemática do país, com uma perspectiva de reforma educacional em oposição ao movimento da Matemática Moderna, que tinha uma perspectiva de ensino estruturalista como base.

Hans Freudenthal, preconizador desta abordagem, foi um matemático alemão que desenvolveu interesses em Matemática, Ciências e Literatura. Em 1923, ele entrou na Universidade de Berlim para estudar matemática e física. Seus primeiros trabalhos foram relacionados à topologia e álgebra, e fez também, grandes contribuições ao campo da Geometria, Filosofia, História da Matemática e Educação Matemática.

Em 1927, enquanto Freudenthal estudava na Universidade de Berlim, assistiu a uma palestra ministrada por Luitzen Egbertus Jan Brouwer, adepto da corrente filosófica da matemática conhecida como intuicionismo. Esse contato, promoveu um relacionamento entre os dois, e em 1930, Brouwer o convidou para trabalhar na Universidade de Amsterdã como seu assistente (EST, 1993). Essa relação trouxe inspirações para o trabalho de Hans Freudenthal devido ao interesse no intuicionismo de Brouwer.

Durante a invasão da Alemanha na Holanda, em meados de 1940, Freudenthal (por ser judeu) teve que se afastar de suas funções na Universidade de Amsterdã, devido à perseguição nazista. Em maio de 1945, após a Holanda ter sido libertada pelas tropas canadenses, Freudenthal pôde voltar às suas funções, tomando posse como professor na

[5] Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, da Universidade Estadual de Londrina. Mais informaçoes em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/ >.

[6] Buriasco (1999).

Universidade de Utrecht, de 1946 até o ano de 1975, quando se aposentou. Freudenthal, morreu em um banco de um parque, perto de sua casa, em Utrecht, em 1990.

> Existem cientistas e estudiosos. Hans Freudenthal era um estudioso. Existem aqueles cujas atividades estão confinados dentro dos limites de sua disciplina e há aqueles cujas atividades vão muito além desses limites. Hans Freudenthal pertencia à última categoria. Como alguns outros, ele provou ser capaz de sintetizar uma extensa gama de conhecimentos com a matemática como a chave dominante (VAN EST, 1993, p.59, tradução nossa).

O movimento para reforma curricular não foi exclusivo da Holanda. Educadores e autoridades de outros países, também, buscavam reformas para o ensino de matemática em seus países. Entretanto, o que parece ter alavancado a reforma na Holanda foi o relacionamento de Hans Freudenthal com a ICMI[7] (Comissão Internacional de Instrução Matemática), como presidente, entre os anos de 1967 e 1970.

Em 1908, no IV Congresso Internacional de Matemática em Roma, foi aprovada uma resolução, apresentada por iniciativa do educador americano David Eugene Smith (1860-1944), cuja finalidade era criar uma Comissão Internacional[8] com o objetivo inicial de fazer um estudo comparativo a respeito dos métodos e planos de ensinar matemática nas escolas secundárias. O presidente fundador da ICMI foi o matemático alemão Felix Klein[9] (1849-1925) e o primeiro secretário-geral foi o suíço Henri Fehr, um dos cofundadores da revista internacional *L'Enseignement Mathématique*.

Depois de interrupções de suas atividades ao longo das duas Guerras Mundiais, a ICMI foi reconstituída em 1952. Naquele momento, a comunidade internacional matemática estava se reorganizando e a ICMI tornou-se uma comissão oficial da União Internacional de Matemática (IMU[10]).

Ao longo do tempo, como a missão da educação geral se expandiu, aumentaram também as necessidades e complexidade do ensino de matemática. O pequeno espaço disponibilizado para uma das seções da ICMI comprometeu a comunicação de problemas e ideias relacionadas com ao ensino de matemática. Isto levou o então presidente Hans Freudenthal a organizar, em 1969, o primeiro Congresso Internacional

---

[7] *International Commission on Mathematical Instruction*.

[8] No entanto, a ideia de uma comissão internacional já havia sido formulada por Smith, três anos antes na revista internacional *L'Enseignement Mathématique.*

[9] Mais tarde, os ICMIs estiveram sob a presidência de matemáticos e educadores eminentes, citando alguns: Jacques Hadamard (de 1932 até a guerra), H. Marshall Stone (1959-1962), André Lichnerowicz (1963-1966), Hans Freudenthal (1967-1970), Jean-Pierre Kahane (1983-1990), Miguel de Guzmán (1991-1998) e Hyman Bass (1999-2006). Assim, o interesse e o engajamento produtivo de pesquisadores matemáticos preocupados com a educação matemática escolar têm uma história longa e substancial, embora desigual (ICMI, 2012, *online*).

[10] IMU – International Mathematical Union.

de Educação Matemática (ICME[11]), em Lyon, França. O ICME, desde então, evoluiu para congressos quadrienais. Eles representam, hoje em dia, um elemento importante no programa de atividades da ICMI, mas não apenas o único (ICMI, 2012, *on-line*).

Além de sua relação com os ICMI e ICME, Hans Freudenthal teve também outras influências que, por sua vez, influenciaram as atuais bases da RME. Hans Freudenthal foi o editor fundador da *Educational Studies in Mathematics*[12] e um dos fundadores do PME[13] (Grupo Internacional de Psicologia e Educação Matemática). Ele também foi fundador e presidente da Comissão para o Estudo e Melhoria do Ensino de Matemática (CIEAE[14]), que conta com mais de 50 anos de atividade (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Na Holanda, o movimento de reforma teve impulso a partir de 1968, com o projeto Wiskobas ("matemática nas escolas primárias") e teve como fundadores Fred Goffree, Edu Wijdeveld e, mais tarde, Adrian Treffers. O Wiskobas foi um projeto do CMLW (*Mathematics Curriculum Modernization Committee*), criado, em 1961, para modernizar a educação matemática nas escolas secundárias. Em 1971, o Instituto IOWO[15] forneceu as instalações para o desenvolvimento do projeto Wiskobas. O IOWO tinha, na época, como diretor Hans Freudenthal, que, por sua resistência ao movimento da Matemática Moderna em relação à Educação Matemática, deu um novo impulso ao movimento holandês para a reforma curricular.

Em 1981, o Instituto IOWO foi sucedido pelo grupo de Investigação para a Educação Matemática e Centro de Computação Educacional (OW & OC) e, em 1991, em homenagem ao precursor da RME, passou a se chamar *Instituto Freudenthal* (FI ou FIsme - *Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education*).

O principal objetivo daquela reforma curricular holandesa foi o de abandonar a abordagem *mecanicista*, até então, prevalecente para a educação matemática. Nessa

[11] *International Congresson Mathematical Education*.

[12] *Educational Studies in Mathematics* (Estudos Educacionais em Matemática). De acordo com o inventário de publicações relativas à RME, contruído pelo GEPEMA e atualizado até 2010, é o periódico com maior quantidade de publicações.

[13] PME – *International Group for Psychology and Mathematics Education*. Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), o PME foi estabelecido para superar o behaviorismo dominante na psicologia educacional. O PME é um grupo internacional de educadores e pesquisadores de matemática que se reúnem anualmente para compartilhar e discutir interesses a respeito da Educação Matemática. Foi fundado em 1976, no III ICME, realizado na Alemanha.

[14] CIEAEM– *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*. Afiliada ao ICMI, fundada a partir de 1950, tem como meta investigar as atuais condições e possibilidades para o desenvolvimento da educação matemática a fim de melhorar a qualidade do ensino da matemática. As conferências da CIEAEM são anuais.

[15] *Institute for Development of Mathematics Education* (Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática).

busca, a Holanda não perseguiu nem a abordagem *empirista*, predominante na educação matemática da Inglaterra, nem a *estruturalista*, que nos EUA levou ao movimento *New Math* (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). No quadro a seguir, apresentamos algumas características das abordagens citadas, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010).

Quadro 1: Abordagens tradicionais segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010).

Abordagem	Características
Mecanicista	"Característica desta abordagem é seu foco em cálculos com números simples, e a pouca atenção prestada às aplicações; o que é certamente verdade para o início do processo de aprendizagem. Matemática é ensinada de uma forma atomizada. Estudantes aprendem os procedimentos de uma maneira passo a passo na qual o professor demonstra como resolver um problema" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).
Empirista	Típico deste tipo de educação era que os alunos eram deixados livres para descobrir muito por si próprios e eram estimulados a realizar investigações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).
Estruturalista	Este é um método de ensinar matemática que foca em conceitos abstratos, como a teoria dos conjuntos, funções e outras bases diferentes de dez (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).

Fonte: autora.

Dada a insatisfação com o ensino por meio das abordagens dominantes na época, Freudenthal (1968, 1983, 1991) fomentou uma discussão a respeito do que acreditava ser Educação Matemática, lançando suas ideias a respeito do seu ensino e aprendizagem, ao apresentar e discutir

- matemática como **Atividade Humana**;
- ensino e aprendizagem como **Princípio de Reinvenção**;
- aprendizagem Matemática por meio da **Matematização**;
- reinvenção de ferramentas matemáticas por meio da Matematização Progressiva[16].

Freudenthal teve várias influências na elaboração de suas ideias. Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), ele foi, também, influenciado pelas ideias pedagógicas de sua esposa

[16] Estas ideias tiveram fortes influências da perspectiva construtivista de Brower, adepto da corrente filosófica intuicionista, para a qual a intuição ocupa o papel principal para o conhecimento. Nessa perspectiva, construtivistas defendem que a matemática é produto de construções mentais. Uma vez que é considerada fruto de contruções mentais (humanas), Freudenthal apresenta o slogan "Matemática como atividade humana".

Suus Lutter-Freudenthal, uma das forças motrizes por trás do movimento *JenaPlan*[17] de Peter Petersen, na Holanda. Foi, também, fortemente influenciado pela reforma pedagógica do educador belga Ovide Decroly, sendo, ambos, membros ativos da *New Education Fellowship*[18] (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000). A ideia de Freudenthal a respeito do aprendizado de matemática em contextos realísticos se assemelha à ideia educacional de Decroly relativa aos Centros de Interesse, bem como o princípio de Decroly sobre elaboração em espaço e tempo corresponde ao princípio da Reinvenção-Guiada de Freudenthal (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Embora o movimento RME tenha começado no final da década de 60, a expressão *Educação Matemática Realística* começou a ser utilizada apenas no final dos anos 70 (TREFFERS, 1991). O termo "*realistic*" tem origem no verbo neerlandês "*zich REALISE-ren"* e foi traduzido, para o português, também pelo GEPEMA[19], para "realístico" ao invés de "realista", porque parece estar mais relacionado ao significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tomar consciência de" e, por sua vez, à possibilidade de "tornar real" na mente[20] dos estudantes, o que sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolvem não precisam ser "autenticamente reais", mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005).

Freudenthal (1968) propôs uma discussão a respeito do que é matemática e o que deveria ser considerado útil para a aprendizagem[21]. Para ele, a matemática é vista com um meio de organizar e lidar com um assunto, que pode envolver a procura e resolução de problemas, a conceituação de um tema estudado de um ponto de vista matemático (FREUDENTHAL, 1971). Como matemático, Freudenthal (1968) argumentava que a função dos matemáticos era, especificadamente, matematizar assuntos próprios do

---

[17] O *JenaPlan* é uma abordagem de ensino pautada nas ideias educacionais de Peter Petersen (1884-1952) e recebeu este nome por seu precursor ser natural de Jena, Alemanha.

[18] Uma antiga organização internacional que tinha como objetivo a reforma pedagógica. Nessa organização podem ser citados ainda Martin Buber, Ovide Decroly, John Dewey, Geheeb Paulo, Maria Montessori, Helen Parkhurst, Meuter Hanna, Jean Piaget e Peter Petersen. As conferências realizadas por essa organização ocorreram em meados de 1920-1940.

[19] GEPEMA – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, da Universidade Estadual de Londrina. Outras informações em: http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/index.html.

[20] Segundo Heyting (1956, p. 22 apud SHAPIRO, 1997), a matemática, a partir do ponto de vista intuicionista, é um estudo de determinadas funções da mente humana, e o programa de Brouwer consistiu em um estudo de construções matemáticas mentais, no qual o "existir" deveria ser tomado como sinônimo de "ser construído". Assim, na perspectiva de Freudenthal, a possibilidade de aprender matemática está associada à de torná-la "real", ou seja, imaginável na mente dos estudantes.

[21] Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), embora Freudenthal nunca tenha referenciado estudiosos como o alemão Wolfgang Klafki, perguntas básicas de Klafki tornaram-se, também, questões de interesse de Freudenthal: o que deve ser ensinado em um assunto escolar? Para qual propósito? E para quem?

conhecimento matemático, mas que era possível, também, matematizar assuntos da realidade.

De acordo com Freudenthal (1991), a matemática deve ser conectada com a realidade, estar próxima dos alunos, ser relevante para a sociedade e ser de valor humano. Para Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), sob a perspectiva da Educação Matemática Realística, o aluno deve "fazer matemática" partindo de fenômenos[22] e, ao lidar com eles, desenvolver ferramentas matemáticas necessárias para esse lidar.

Da Atividade Humana

Freudenthal (1991) defendia a ideia da Matemática como uma "atividade humana" em construção, na qual deveria ser dada aos alunos a oportunidade de "reinventar" a matemática, fazendo-a (FREUDENTHAL, 1991; TREFFERS, 1987; DE LANGE, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999). Ele e seus seguidores acreditam que os alunos deveriam ter a oportunidade "guiada" para reinventá-la, em lugar de serem considerados como receptores de uma matemática já "pronta" e "acabada". Segundo Freudenthal (1971, p. 413-414), a matemática como atividade humana

> É uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Este pode ser um assunto da realidade, que deve ser organizado de acordo com modelos ou padrões matemáticos caso os problemas da realidade devam ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, com resultados novos ou antigos, de sua propriedade ou de outros, que deve ser organizado de acordo com novas ideias, para ser mais bem compreendido, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Nesta perspectiva, a essência da Educação Matemática não reside no ensino dos objetos matemáticos[23] simplesmente, mas sim na atividade: um processo de organização e tratamento de um assunto por meio desses objetos. Sendo a matemática vista como uma ação, não faz sentido ensiná-la como uma sucessão[24] de conteúdos "prontos para o consumo" sem dar aos alunos diferentes oportunidades para experienciar a matemática como uma "atividade humana" Nesse sentido, os conteúdos, conceitos, objetos, ideias, algoritmos, propriedades matemáticas emergem dos fenômenos com os quais os alunos podem se envolver ao lidar com um assunto, em vez de ser o ponto de partida.

[22] Aqui entendidos como tudo o que pode ser percebido pelos sentidos ou pela consciência.
[23] Estamos chamando de objeto matemático, qualquer conteúdo matemático já conhecido e sistematizado historicamente.
[24] Série de coisas ou acontecimentos que se seguem ou se sucedem em determinada ordem.

Freudenthal (1968, 1973, 1991) argumenta que, se as alunos aprendem matemática de uma forma isolada, divorciada de suas experiências, ela será esquecida e não serão capazes de aplicá-la. Para este autor, os alunos têm maior chance de aprender matemática construindo-a, reinventando-a, recriando-a.

A sistematização própria da matemática e o que os alunos devem aprender é a atividade de sistematizar e não apenas o resultado da sistematização (FREUDENTHAL, 1968). Segundo o autor, o poder maravilhoso que a matemática tem de eliminar o contexto e colocar outros contextos "na mesma forma" é que faz dela uma atividade útil. Portanto, parece inócuo apresentar apenas conteúdo sistematizado para ser operacionalizado, uma vez que, como um sistema fechado, até uma máquina pode operar, e isso não caracteriza uma atividade humana. O que é próprio dos humanos é a atividade de matematizar o assunto estudado, seja ele matemático ou não (FREUDENTHAL, 1968).

> Pensar em uma matemática possível de ser transferida significa pensar que alunos "aprendem" ao armazenar e reproduzir informações (conceitos, objetos matemáticos), assim como, por exemplo, robôs e computadores. Quem "recebe" não participa da escolha de quais informações vai receber e, muito menos, da decisão de quais são importantes para serem "armazenadas", de quando aplicá-las, para quê e/ou por que elas são relevantes, ou como foram obtidas. Essa poderia ser adjetivada como uma "atividade robótica", "atividade cibernética", mas não humana (LOPEZ, 2010, p. 15-16).

Freudenthal (1968, 1983) considera uma inversão antididática[25] o ensino da matemática a partir do próprio conteúdo matemático para depois aplicá-lo em problemas, o que caracteriza uma forma de ensino contrária às ações dos matemáticos. Na perspectiva proposta por este autor, os alunos devem fazer matemática, lidar com ela, para então produzir conhecimento, resolver problemas, organizar e utilizar fenômenos da sala de aula em situações do dia a dia.

Da Reinvenção Guiada

Ao encontro da perspectiva da matemática como uma atividade humana, Freudenthal (1991) considerava que a aprendizagem era concebida, na realidade, a partir da exploração de situações que possibilitassem aos estudantes "reinventar"[26] a matemática, processo que chamou de "Reinvenção Guiada". Ele reconhecia que, embora todo corpo

[25] As críticas de Freudenthal a respeito da inversão antididática, visualizada na perspectiva de instrução tradicional, bem como suas ideias a respeito do princípio de reinvenção foram, provavelmente, inspiradas pelo movimento de reforma pedagógica, por sua vez, fortemente influenciada pelas ideias de Peter Petersen e Maria Montessori (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

[26] Isto significa possibilitar que os alunos experimentem um caminho "semelhante" ao processo pelo qual a matemática foi elaborada historicamente e, então, atribuir algum sentido à sua utilidade em situações diversas.

de conhecimento matemático não pudesse ser simplesmente reinventado em situações de sala de aula, os estudantes deveriam ter a oportunidade de experienciar processos como "autores", com a perspectiva de que a matemática fosse visualizada sempre em movimento, como uma ação e não como algo pronto, acabado, imutável.

Na reinvenção guiada

- ✓ os alunos têm um papel fundamental e são considerados: (a) protagonistas da aprendizagem; (b) reinventores de ferramentas, procedimentos, conceitos matemáticos; (c) autores do que fazem.
- ✓ o professor serve de guia, interventor, orientador, mediador do processo de aprendizagem.
- ✓ as tarefas são motes, pontos de partida, para o processo de reinvenção; devem ser propícias à matematização.
- ✓ a matemática é uma atividade humana.
- ✓ a experiência do aluno tomada com um eixo da aprendizagem, na qual a construção de conceitos matemáticos é feita de forma que ele consiga reconstruir o que aprendeu[27].

De acordo com o princípio da reinvenção, os alunos devem ter a oportunidade de vivenciar um processo semelhante àquele pelo qual um determinado objeto matemático foi construído (FREUDENTHAL, 1973). Nesse processo, a ajuda do professor é fundamental como um orientador, mediador, guia que oferece direções, verifica a convergência entre o que os estudantes produzem e o que há de padrões vigentes na comunidade matemática. O ponto de partida neste processo são as estratégias informais dos estudantes, que vão se tornando mais formais, segundo as orientações do guia (DRIJVERS, 2003). Nessa perspectiva, o processo de aprendizagem é estruturado por níveis[28]. Em um nível, determinado conceito pode ser o objeto da matematização, que em outros níveis, pode ser ferramenta útil para organização de outros assuntos, na busca de matematizar e sistematizar outros objetos.

---

[27] Sistematização construída a partir das referências: (FREUDENTHAL, 1968, 1971, 1983, 1991; DE LANGE, 1987; TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; DRIJVERS, 2003).

[28] Esta ideia está fundamentada nos níveis de Van Hiele, elaborados pelo casal neerlandês Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele em suas teses de doutorado, que foram orientadas por Martinus Jan Langeveld e Hans Freudenthal na Universidade de Utrecht (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Da Matematização

Freudenthal considerava a matemática não como o corpo do conhecimento matemático, mas como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de forma mais geral, como a atividade de organizar e lidar "matematicamente" a "realidade" – atividade que chamou de "matematização" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003). Para Freudenthal (1991), aprender matemática deveria ter origem no "fazer" matemática, sendo a matematização o núcleo da Educação Matemática. Treffers (1987) descreveu a matematização como

> uma atividade organizada. Ela refere-se à essência da atividade matemática, à linha que atravessa toda educação matemática voltada para a aquisição de conhecimento factual, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de habilidades e ao uso da linguagem e de outras organizações, às habilidades na resolução de problemas que estão, ou não, em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 51-52, tradução nossa).

Associado ao conceito de atividade humana, o foco da matematização não reside sobre a forma ou produtos da atividade, mas sim sobre a própria atividade, bem como sobre seu efeito. Na opinião de Freudenthal (1968), Educação Matemática para alunos, acima de tudo, deve ter como objetivo a matematização da realidade "cotidiana" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), matematização busca por "fazer mais matemática". Para esclarecer o que significa "mais matemática", pode-se pensar em características da matemática como generalidade, certeza, exatidão e concisão:

> *generalidade*: generalizando (olhando para analogia, classificando, estruturando); *certeza*: refletindo, justificando, provando (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.); *exatidão*: modelando, simbolizando, definindo (limitando interpretações e validade); e *concisão*: simbolizando e esquematizando (desenvolvimento de padrão procedimentos e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução e sublinhados nossos).

Para Freudenthal (1968, 1971), era possível "matematizar a realidade" e "matematizar a matemática" (STREEFLAND, 2003). Freudenthal denominou esta organização da atividade de matematização que pode envolver "assunto da realidade" e "assunto matemático". Ao processo que Freudenthal chamava de matematização podem ser identificadas duas grandes vertentes. A primeira é a que explica o sujeito ir dos contextos "realísticos" envolvidos nas tarefas ou fenômenos explorados, para um assunto matemático. A segunda diz respeito ao desenvolvimento dos procedimentos matemáticos para explorar os fenômenos.

Na tentativa de poder falar sobre essas vertentes, Treffers (1978[29], 1987), em sua tese, distinguiu matematização horizontal e vertical: a primeira como uma tarefa de tornar um assunto acessível para tratamento matemático e a segunda como uma tarefa de promover um processamento matemático mais "sofisticado" (apud FREUDENTHAL, 1991). Treffers e Goffree (1985) também apresentam algumas ideias a respeito dos conceitos de matematização horizontal e vertical. Segundo os autores, a matematização é um processo dinâmico; o que pode ser um assunto a ser matematizado, em certo momento, pode ser utilizado mais tarde como um modelo de caráter algorítmico para matematizar outro assunto de nível mais elevado. A matematização horizontal transforma um problema em campo matemático (o problema é abordado por métodos matemáticos, ou ainda, o problema é esquematizado a fim de ser manipulado por ferramentas matemáticas). As atividades de processamento dentro do sistema matemático caracterizam a matematização vertical, a qual significa ainda uma renovação do problema do mundo real em matemática.

> Na componente horizontal a estrada para a matemática é pavimentada por meio de formação de modelo, esquematização e atalhos. A componente vertical atua por processamento matemático, aumentando o nível de estrutura no campo do problema correspondente. Sem dúvida, separar grupos de atividade sem dois componentes parece um pouco artificial. (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 109, tradução nossa).

Treffers (1987) conceitua a "matematização horizontal" como uma tentativa de esquematizar o problema matematicamente, ou seja, a matematização horizontal consiste em esquematizar o que se considera necessário para que seja possível abordar o problema por meios matemáticos, seja por meio da formação de um modelo, de esquematização, ou de simbolização. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010), envolve a ida do "mundo da vida real" para o "mundo da matemática". Isto significa que as ferramentas matemáticas são utilizadas para elaborar, organizar o modelo e resolver problemas situados em algumas situações da vida real.

As tarefas que acompanham e estão relacionadas ao processo matemático, à solução do problema, à generalização da solução e à posterior formalização podem ser descritas como uma "matematização vertical", segundo Treffers (1987). Para Van den Heuvel-Panhuizen (2010), matematizar verticalmente significa mover-se dentro do "mundo" da matemática. Refere-se ao processo de reorganização dentro do sistema matemático resultando em atalhos, fazendo uso de ligações entre conceitos e estratégias.

[29] TREFFERS, A. Wiskobas doelgericht. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht, 1978. A tese de Adrian Treffers está originalmente escrita na língua holandesa.

Freudenthal, em seu livro Revisitando a Educação Matemática (FREUDENTHAL, 1991), discorre a respeito de uma sua resistência para aceitar as duas componentes da matematização como propostas por Treffers (1987), porque para ele não era possível separá-las e nem compará-las atribuindo-lhes maior ou menor valor. Para Freudenthal (1991), não há um ponto de corte claro que promova a distinção entre os dois "mundos". Treffers (1987) também reconheceu que esta distinção entre matematização horizontal e vertical é um pouco artificial, dado que elas estão fortemente inter-relacionadas.

A resistência de Freudenthal para distinguir os dois tipos de matematização[30] propostas por Treffers (1987) parece ter base em uma de suas críticas a respeito das abordagens tradicionais de ensino enfatizarem apenas um ou outro componente da matematização. Para ele, as duas formas de matematizar possuem igual valor e merecem mesma importância. Assim, o conceito global de matematização deve incluir tanto matemática aplicada como matemática pura. Para ilustrar as diferenças entre as abordagens tradicionais de ensino e a Educação Matemática Realística com relação à matematização, Treffers (1987) apresenta o seguinte quadro.

Quadro 2: Tipos de matematização na Instrução Matemática.

Abordagem para a Educação Matemática	**Matematização**	
	Horizontal	**Vertical**
Mecanicista	–	–
Empirista	+	–
Estruturalista	–	+
Realística	+	+

Fonte: Treffers (1987, p. 251, tradução nossa).

Se por um lado, a matematização é própria das tarefas dos estudantes, atividade de organizar e lidar com assuntos matematicamente, por outro, a "didatização[31]" é própria das tarefas do professor como uma atividade de organizar fenômenos suscetíveis à matematização. Nesta perspectiva, Freudenthal (1983) explora o conceito de fenomenologia didática. Segundo Freudenthal (1983), conceitos matemáticos, estruturas, ideias foram elaborados como ferramentas para organizar e lidar com fenômenos do mundo físico, social e mental. A fenomenologia de um conceito matemático, de uma estrutura ou ideia significa a ação de descrevê-la em sua relação

[30] Freudenthal (1991) afirma que, apesar de sua resistência inicial, acabou aceitando o uso das expressões matematização horizontal e vertical. Vale a pena observar que Freudenthal foi o orientador da tese de Adri Treffers.

[31] É considerada função do professor de apresentar didaticamente a realidade por contextos ricos.

com os fenômenos para os quais foi criada. Estendendo esta ideia para o processo de aprendizagem a *fenomenologia didática* se mostra como uma maneira de o professor oportunizar aos alunos os "lugares" ou "situações" pelas quais podem reinventar "suas" matemáticas, matematizar. Freudenthal (1983) apresenta o conceito de *fenomenologia didática*[32] como uma heurística sob a qual, a partir da exploração de fenômenos, são elaborados/construídos objetos matemáticos.

Uma condição para pôr em prática a fenomenologia didática é propiciar aos estudantes tarefas "ricas"[33]. Nesse sentido, os contextos das tarefas de matemática desempenham um importante papel na resolução dos estudantes (DE LANGE, 1987; TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Em síntese, a Educação Matemática Realística pode ser caracterizada por cinco/seis[34] princípios que são fundamentados nos *níveis de Van Hiele*, na *fenomenologia didática* de Freudenthal e na *Reinvenção Guiada* por meio da *matematização progressiva*. Esses princípios são apresentados no quadro a seguir.

Quadro 3: Resumo dos Princípios da RME[35].

Princípios[36]	Características
(1) Da *Atividade*	- refere-se à interpretação da matemática como atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - aprender é uma atividade construtiva (NES, 2009); - as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).
(2) Da *Realidade*	- a RME tem a função de tornar os alunos capazes de aplicar matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o processo de matematização ocorre a partir da exploração de contextos "ricos" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - fenômenos da realidade devem ser organizados por meio da matemática (NES, 2009); - é importante o uso de contextos que sejam significativos para o aluno como ponto de partida para a aprendizagem (WIDJAJA; HECK, 2003).
(3) De *Níveis*	- os alunos passam por vários níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - começam de seus procedimentos informais e por meio da matematização progressiva e esquematizações avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - "os modelos de" são desenvolvidos na direção de se tornarem "modelo

[32] Uma maneira de descrever ideias matemáticas como sendo relacionadas com os fenômenos que são "matematizáveis".

[33] Tarefas ricas são aquelas com as quais os estudantes se sentem atraídos para resolver e, possivelmente, matematizar (DE LANGE, 1987; TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2010).

[34] Na maioria dos textos são apresentados cinco princípios. Van den Heuvel Panhuizen (2000, 2010) apresenta seis.

[35] Quadro construído com base nas descrições de Streefland (1991), Treffers (1987), Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2001, 2010), Widjaja e Heck (2003), Nes (2009).

[36] Apenas Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2010) apresenta o sexto princípio. Os demais autores apresentam apenas os cinco primeiros.

	para" (STREEFLAND, 1991).
(4) Do *Entrelaçamento*	- domínios matemáticos, como geometria, número, medição e manipulação de dados não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e/ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003); - a resolução de problemas de contextos ricos significa que por vezes se tem de aplicar uma ampla gama de ferramentas matemáticas e entendimentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000); - a força do princípio entrelaçamento é que traz coerência para o currículo. Este princípio refere-se não só aos diferentes domínios de matemática, mas também podem ser encontradas dentro deles mesmos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).
(5) Da *Interatividade*	- a aprendizagem matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções uns com os outros e com o professor (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e colaboração oportunizam a reflexão a respeito do trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).
(6) De *Orientação*	- os estudantes devem contar com uma oportunidade "guiada" para "reinventar" a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o ensino e os programas devem basear-se num conjunto coerente de trajetórias de ensino-aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores proporcionam aos alunos um ambiente de aprendizagem em que este processo de construção possa surgir e ser desenvolvido (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Fonte: Ferreira (2013, p.37-38).

A Educação Matemática Realística é considerada pelos participantes do GEPEMA, do qual as autoras fazem parte, como uma abordagem para os processos de ensino e aprendizagem. As ideias subjacentes a esta abordagem são favoráveis ao contexto de avaliação como prática de investigação bem como ao de oportunidade de aprendizagem que o grupo defende.

Já se passaram mais de 50 anos desde as primeiras publicações das ideias de Freudenthal mesmo assim a RME não é muito divulgada no nosso país. Este artigo pretende apresentá-la, ainda que de forma breve, com a intenção de divulgar aquelas consideradas as principais ideias que a sustentam.

REFERÊNCIAS

BURIASCO, R. L. C. de. *Avaliação em Matemática:* um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999. Disponível em: <http://www.uel.br/grupo-

estudo/gepema/Disserta%E7%F5es/Tese%20-%20Buriasco.pdf>. Acesso em 16 out. 2014.

DE LANGE, J. *Mathematics, Insight and Meaning.* Utrecht: OW &OC, 1987.

DRIJVERS, P. H. M. *Learning algebra in a computer algebra environment.* 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: <http://bit.ly/teseferreira2013>. Acesso em 16 out. 2014.

FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics.* v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

______. Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*. v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

______. *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

______. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

______. *Revisiting Mathematics Education.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics.* v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; TERWEL J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies.* v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

ICMI. *Overview of ICMI*. 2012. Disponível em: <http://www.mathunion.org/icmi/about-icmi/overview-of-icmi/>. Acesso em: 16 nov. 2012. (on-line).

LOPEZ, J. M. S. *Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática.* 2010. 141f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

MEYER, M.; DEKKER, T.; QUERELLE, N. Context in mathematics curricula. *Mathematics teaching in the middle school*. v. 9, p. 522-527, 2001.

NES, F. T. Van. *Young children's spatial structuring ability and emerging number sense*. 2009. 360f. Dissertação (Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education) – Instituto Freudenthal, Utrecht, 2009.

STREEFLAND, L. *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer, 1991.

______. Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics.* v. 54, n. 1, p. 37-62, 2003.

SHAPIRO, S. *Philosophy of mathematics:* structure and ontology. New York: Oxford University Press, 1997.

TREFFERS, A. *Three Dimensions:* a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

______. Meeting innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics.* v. 22, n. 4, p. 333-352, 1991.

TREFFERS, A.; GOFFREE, F. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (ed.). *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. *Assessment and Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

______. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9.* Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

______. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics.* v. 54, n. 1, p. 09-35, nov. 2003.

______. The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning Mathematics.* Alberta-Canadá, v. 25, n. 2, p. 2-9, 2005. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2008.

______. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). *Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Fremantle: MERGA. 2010.

VAN EST, W. T. Hans Freudenthal. *Educational Studies in Mathematics.* v. 53, n. 1-2, p. 59-69, 1993.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia.* Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

Enviado: 01/03/2015
Aceito: 25/01/2016