

# Modelagem matemática e tecnologias digitais: uma aprendizagem baseada na ação

## Math modeling and digital technologies: a learning based in action

---

RODRIGO SYCHOCKI DA SILVA<sup>1</sup>  
DANTE AUGUSTO COUTO BARONE<sup>2</sup>  
MARCUS VINÍCIUS DE AZEVEDO BASSO<sup>3</sup>

### Resumo

*O presente artigo expõe o recorte de uma pesquisa de doutorado em andamento que investiga a construção de conceitos matemáticos por estudantes do ensino médio em uma escola técnica federal. Adota-se como proposta metodológica a Engenharia Didática de M. Artigue na condução e realização das atividades. Analisa-se a produção dos estudantes à luz da teoria da abstração reflexionante de J. Piaget. Mostra-se a título de conclusão parcial do experimento na presente pesquisa que o uso das tecnologias digitais oportunizou aos sujeitos envolvidos o desenvolvimento e manutenção de formas de pensamento as quais foi possível que cada um construísse e desenvolvesse os seus próprios significados para os conceitos matemáticos abordados.*

**Palavras-chave:** Abstração Reflexionante. Aprendizagem. Engenharia Didática. Modelagem Matemática. Tecnologias Digitais.

### Abstract

*This article exposes the clipping of a doctoral research in progress investigating the construction of mathematical concepts by high school students in a federal technical school. Is adopted as proposed methodology Didactic Engineering M. Artigue in conducting and carrying out of activities. It analyzes the production of students in the light of the theory of reflective abstraction of J. Piaget. It is shown as partial completion of the experiment in this study that the use of digital technologies provided an opportunity to the subjects involved the development and maintenance of forms of thought which it was possible that each build and develop their own meanings for the addressed mathematical concepts.*

**Keywords:** Reflective Abstraction. Learning. Didactic Engineering. Mathematical Modeling. Digital Technologies.

---

<sup>1</sup>Doutorando em Informática na Educação (PGIE, UFRGS). Docente do IFRS – Campus Caxias do Sul, e-mail: [rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br](mailto:rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br)

<sup>2</sup>Doutor em Informática. Docente do Instituto de Informática da UFRGS, e-mail: [barone@inf.ufrgs.br](mailto:barone@inf.ufrgs.br)

<sup>3</sup>Doutor em Informática na Educação. Docente do Instituto de Matemática da UFRGS, e-mail: [mbasso@ufrgs.br](mailto:mbasso@ufrgs.br)

## Introdução

Os desafios cotidianamente impostos pela vida adulta em sociedade e a conduta dos sujeitos inseridos nos mais diversos contextos sociais possibilitam tornar a escola um laboratório de reflexão e desenvolvimento dos mais variados tipos de sujeitos, onde após determinado ciclo escolar<sup>4</sup> encerrado estes sujeitos também estarão inseridos na sociedade. A complexidade da atual sociedade exige que cada vez mais os sujeitos sejam capazes de posicionar-se e refletir sobre os aspectos exigidos na vida em sociedade. Com isso, acredita-se que a vida escolar consiste em um importante processo de constituição e desenvolvimento do sujeito, uma vez que importantes contribuições desta etapa de construção são necessárias no futuro, no que se refere à vida em sociedade.

Quanto aos conceitos matemáticos abordados na escola, acredita-se que sua apresentação aos estudantes de forma isolada e sem relação com os demais, acaba por tornar a matemática uma ciência isolada e sem sentido, muitas vezes desvinculada com os aspectos da realidade que cerca o sujeito. Entende-se que sejam necessários e suficientes a ação e o trabalho cognitivo sobre os objetos do conhecimento em estudo, os quais possibilitam aos estudantes a evolução, compreensão e construção dos mais diversos conceitos presentes na matemática escolar.

Com isso, nota-se que a possibilidade de explorar matematicamente alguns fenômenos presentes na realidade por intermédio da modelagem matemática constitui um cenário em potencial para o desenvolvimento e aprimoramento do pensamento hipotético e abstrato, caracterizado pela criação, validação/refutação, reformulação de hipóteses pelo sujeito envolvido com a proposta. O uso das tecnologias digitais emerge como uma possibilidade de o sujeito agir sobre o objeto do conhecimento, tornando possível o estabelecimento de relações que permitam a construção e apropriação de conceitos matemáticos.

Ao propor aos estudantes a investigação sobre situações-problema presentes na realidade, acredita-se que o estudo da matemática na escola desempenhará uma função importante: o estímulo ao exercício da reflexão por parte do sujeito. Entende-se que a construção de relações que possam explicar fenômenos e prever o funcionamento das mais diversas situações de forma idealizada, estimula consideravelmente o

---

<sup>4</sup>Entende-se *ciclo escolar* como todo o período de permanência do sujeito vinculado ao sistema escolar vigente.

desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Uma das hipóteses da presente pesquisa de doutorado em andamento é que o processo da criação, verificação e aperfeiçoamento das relações matemáticas fazendo-se uso da tecnologia constitui um importante exercício para o sujeito, capaz de promover sua autonomia e também o melhoramento na sua capacidade de tomada de decisões.

A teoria da abstração reflexionante proposta por Piaget (1977) constitui nesta pesquisa uma ferramenta importante, necessária e suficiente, para analisar a evolução dos sujeitos envolvidos com a proposta. Por meio dessa teoria, considera-se ser possível inferir que a construção do conhecimento matemático é resultado de sucessivos e graduais micro-avanços do sujeito durante a sua ação sobre o objeto em estudo. A metodologia de trabalho adotada na presente pesquisa é fundamentada nas concepções da Engenharia Didática, segundo a proposta de Artigue (1996), a qual constitui uma importante fonte de conhecimentos e reflexão para o professor envolvido no exercício da prática docente.

A intenção do presente texto é apresentar e discutir alguns resultados parciais de um experimento didático (fase 2, de um total de 3) de uma pesquisa de doutorado a qual considera que a construção do conhecimento matemático seja o resultado da possível combinação dos fatores: (1) evolução da atividade cognitiva do sujeito, manifestada pelo aperfeiçoamento no processo da abstração; (2) aperfeiçoamento da ação do sujeito sobre os objetos; (3) uso da tecnologia como parceira no estabelecimento de relações entre o sujeito e o objeto do conhecimento, potencializando a análise, interpretação e construção de modelos matemáticos com o auxílio do computador.

## **Modelagem, Ensino da Matemática e Tecnologias Digitais**

Discute-se na presente seção alguns aspectos da modelagem matemática em relação ao ensino de matemática. Mais especificamente, quais as possíveis contribuições na incorporação dessa proposta de trabalho na qualificação da aprendizagem dos sujeitos envolvidos. Argumenta-se que este processo envolva uma aprendizagem múltipla, na qual professor e estudantes envolvidos aprendem através do estabelecimento e manutenção de relações provenientes de suas ações e coordenações de ações sobre os objetos em estudo. Tratamos também de apresentar e refletir sobre

alguns estudos realizados e que contribuam para a discussão envolvendo o uso das tecnologias digitais no ensino da matemática.

Inicialmente, Meyer *et al* (2011) afirmam que:

A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos. Na Modelagem, esse sistema tem de ser mudado. Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. Passamos de objetos que o professor ensina para objetos que o aluno aprende. (MEYER *et al*, 2011, p.24)

Nota-se nessa citação uma necessidade de compreensão das relações entre objetos e sujeitos. Ao mesmo tempo em que a matemática é desenvolvida por diversos sujeitos, inseridos em determinado contexto de sociedade, verifica-se certo desconhecimento sobre a importância que a ciência matemática possui para o avanço e desenvolvimento da sociedade.

A realidade e seus complexos fenômenos que nos rodeiam fazem com que a matemática seja uma ferramenta, ou ainda, um recurso para que seja possível aproximar-se cada vez mais dos objetos da realidade. Um dos modos de realizar essa aproximação seria assumir uma possível representação da realidade através da modelagem matemática.

Ao mesmo tempo em que avança o desenvolvimento da matemática, a modelagem matemática busca, através do estabelecimento e manutenção de relações estabelecidas entre os sujeitos e os objetos do conhecimento, empenhar-se na tentativa de compreender a realidade. A tentativa de criar relações e expressar em termos de equações os mais diversos fenômenos faz da modelagem matemática uma proposta investigativa, baseada principalmente na elaboração, verificação e validação de possíveis hipóteses por parte do sujeito.

Skovsmose (2007) apresenta três aspectos que, intimamente interligados, têm grande importância na compreensão da realidade por meio da matemática. Mais especificamente, o autor afirma que a matemática contribui para o melhoramento dos modelos matemáticos e assim, possa contribuir para a compreensão dos fenômenos da realidade.

A matemática fornece a possibilidade para *raciocínio hipotético* (grifo do autor), pelo que eu me refiro à análise de conseqüências de um cenário imaginário. Por meio da matemática parecemos aptos a investigar detalhes particulares de um projeto ainda não realizado. Assim a matemática constitui um instrumento importante para levar adiante o experimento mental detalhado. (SKOVSMOSE, 2007, p.124)

*Por meio da matemática é possível investigar detalhes particulares de uma situação hipotética, embora a matemática também cause severas limitações para tal raciocínio hipotético* (grifo do autor). Qualquer projeto tecnológico tem implicações não identificadas pelo raciocínio hipotético. Esse é um problema básico relacionado a qualquer tipo de investigação de contrafatos baseada matematicamente. (SKOVSMOSE, 2007, p.125)

(...) Isso nos leva a um terceiro aspecto da matemática em ação. Este aspecto concerne à compreensão: *a matemática embasa a modulação e constituição de uma ampla variedade de fenômenos sociais e, desse modo, ela se torna parte da realidade* (grifo do autor). Vivemos em um ambiente que integra uma realidade virtual fundamentada no modelo a uma realidade já construída em uma mistura formidável. (SKOVSMOSE, 2007, p.127)

Percebe-se que os argumentos apresentados anteriormente sobre matemática em ação reforçam nossa concepção sobre a importância e contribuição que os sujeitos possuem no desenvolvimento dos conceitos. Nota-se que a ciência matemática possui destaque na compreensão e modelagem dos fenômenos, uma vez que por intermédio dela seja possível aumentar nosso entendimento sobre os objetos do conhecimento e fenômenos da realidade.

O estudo de fenômenos da realidade fazendo uso da matemática e de recursos tecnológicos constitui um aspecto importante na formação de todos os sujeitos envolvidos. Para tal, fundamentamos nossas ideias em Almeida *et al* (2012), Biembengut e Hein (2011), Allevato (2005), Borssoi (2013), Malheiros (2004), Soares (2012), Araújo (2002) e Soistak (2010).

Biembengut e Hein (2011) consideram que:

O modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções. Tanto que a noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da ciência é testemunha disso! O objetivo de um modelo pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão, dentre outros. (BIEMBENGUT, HEIN, 2011, p.11)

Logo, através da percepção, é possível constatarmos que o sujeito se baseia na construção de modelos para aumentar a sua compreensão sobre determinado tema. É

importante destacar que as limitações de cada sujeito fazem com que os modelos construídos também sejam de complexidade gradual. Dependendo da complexidade dos fenômenos investigados, a abordagem pode não ser de fácil assimilação pelos sujeitos, tornando a investigação e previsões sobre o fenômeno investigado incapaz de ser realizado.

Acredita-se que uma prática envolvendo o uso da modelagem matemática constitua uma potencial fonte de construção de conceitos matemáticos pelos sujeitos. Sobre o uso de modelos matemáticos e suas contribuições para o processo de formação, Biembengut e Hein (2011) disserta que:

Ao participar de um trabalho com modelagem ou modelação, no qual o conteúdo não é dissociado da realidade, pois há conexão entre o que se aprendeu e o que se executou, acreditamos que alunos e professores tornar-se-ão mais entusiastas com a possibilidade de transformar a escola, ainda que de forma lenta e gradual, para que ela venha a exercer o papel que lhe cabe na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante. (BIEMBENGUT E HEIN, 2011, p.125)

No que se refere ao uso das tecnologias digitais, em especial a informática, em investigações envolvendo modelagem matemática, Almeida *et al* (2012) destaca como justificativas plausíveis:

- a) possibilita lidar com situações-problema mais complexas e fazer uso de dados reais, ainda que estes sejam em grande quantidade ou assumam valores muito grandes;
- b) permite que a maior parte dos esforços se concentre nas ações cognitivas associadas ao desenvolvimento da atividade de modelagem, considerando que a realização de cálculos, aproximações e representações gráficas é mediada pelo uso do computador;
- c) possibilita lidar com situações-problema por meio de simulações numéricas ou gráficas, variando a parâmetros nas representações gráficas e (ou) algébricas. (ALMEIDA *et al*, 2012, p.32)

Em sua pesquisa de doutorado, Allevato (2005) tentou compreender de que forma os estudantes estabeleciam possíveis relações a partir de ações feitas na sala de aula tradicional, usando lápis e papel, em comparação às ações desenvolvidas no laboratório de informática, durante a resolução de problemas que envolviam o assunto funções. A autora afirma que a forma de construir conhecimento em um ambiente que se faça uso do computador seja qualitativamente diferente de um ambiente que apenas faça uso de lápis e papel. É oportunizado aos estudantes desenvolver novas formas de pensamento, baseado em ações que envolvam simulação, experimentação e visualização.

Durante a investigação, a autora constatou que apesar dos problemas propostos não serem distintos dos usados em aulas que valorizavam apenas o uso de lápis e papel, a importância de seu estudo estava em verificar as estratégias e caminhos escolhidos pelos estudantes para superar os desafios impostos pelos problemas em estudo. Isto, nas palavras da autora, influenciou todos os envolvidos no processo: o professor e os estudantes. Ao direcionar o olhar para as contribuições que o uso das tecnologias proporcionou para a execução da pesquisa, a autora afirma que o professor que faz uso deste tipo de recurso deve refletir sobre a qualidade da produção matemática dos seus estudantes, o qual deve valorizar as formas e estratégia utilizadas pelos sujeitos na elaboração das soluções.

Na tentativa de identificar e compreender possíveis relações entre o uso das tecnologias digitais e a aprendizagem dos sujeitos envolvidos, Borssoi (2013) em sua pesquisa de doutorado investigou como, a partir do uso de atividades que fazem uso da Modelagem Matemática e recursos tecnológicos, os estudantes podem desenvolver uma aprendizagem significativa<sup>5</sup> sobre o assunto que está sendo proposto. Borssoi (2013, p.172) apresenta na forma de itens contribuições sobre o uso das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática proposta a estudantes:

- As atividades são pensadas de modo a avançar gradativamente em grau de dificuldade, permitindo ao aluno que novos conhecimentos sejam integrados à estrutura cognitiva a partir de conhecimentos prévios identificados, à medida do possível, pelo professor;
- Atribuem maior responsabilidade ao aluno, em relação a ambientes convencionais de ensino;
- Promovem o trabalho colaborativo, quando os alunos passam a *pensar juntos* (grifo da autora) com os pares, com o professor, com a tecnologia;
- Motivam o aluno a mobilizar a tecnologia como parceira intelectual;
- Proporcionam a avaliação formativa do aluno ao longo da unidade de ensino;

A análise dos itens acima mostra que na pesquisa de Borssoi (2013) o uso das tecnologias digitais fez-se presente ao longo de processos envolvendo ensino e aprendizagem. Tais processos implicaram na transformação de todos os sujeitos

---

<sup>5</sup>A autora constrói o problema de pesquisa a partir das ideias de Moreira (2011), o qual define UEPS – Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Uma UEPS é uma sequência didática fundamentada em teorias de aprendizagem, mais precisamente na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. A hipótese, nesta teoria é que não há ensino sem aprendizagem e de que o ensino é o meio e a aprendizagem é o fim.

envolvidos, tanto professor quanto estudante, sendo a tecnologia um meio de ligação entre o ensino e a aprendizagem. A autora ainda contribui com algumas reflexões sobre a eficácia no uso das tecnologias em sala de aula, constatando que não seja apenas fazendo o *uso* e sim a *forma* de encaminhamento metodológico proposta pelo professor é que pode resultar em benefícios no processo de construção e aprendizagem dos conceitos e ideias.

A partir de um olhar que deve ser feito sobre a eficácia no uso das tecnologias em sala de aula, convergindo sobre o potencial da aprendizagem mediado por tecnologias digitais no ensino, as pesquisas de Malheiros (2004), Soares (2012) e Araújo (2002) contribuem na presente discussão. As três pesquisas mostram que o uso das tecnologias digitais durante o encaminhamento pedagógico do professor permitiu que os estudantes fossem desafiados das mais diversificadas formas ao longo do processo de trabalho com modelagem matemática, contribuindo para uma aprendizagem qualitativamente mais eficiente. Nas palavras de Malheiros (2004), em atividades que envolvam modelagem e tecnologias digitais o professor instiga e desafia os estudantes à investigação sobre os mais diversos fenômenos observados, gerando assim um profícuo envolvimento com a proposta.

Quanto ao uso de software para a investigação e análise de modelos, por estudantes de biologia na disciplina de cálculo, Soares (2012), em sua pesquisa de doutorado, propõe um olhar sobre como a tecnologia interliga e possibilita aos sujeitos estabelecer relações com o mundo externo, com os aspectos inerentes à realidade. A autora infere que, ao utilizar as tecnologias no intuito de oportunizar aos estudantes uma aproximação com situações da realidade por intermédio da análise de modelos, está-se oportunizando também uma aproximação positiva em relação à matemática.

Soares (2012) acredita que o software, supracitado, desempenha função essencial no processo de aprendizagem da matemática, mais especificamente a partir da análise de modelos. A partir da análise do modelo matemático envolvendo a transmissão da malária, o propósito era que os estudantes aprendessem conceitos matemáticos, e que, durante o processo o uso da tecnologia, potencializasse a construção e desenvolvimento das ideias. Além disso, o uso das tecnologias permite, segundo a autora, oportunizar ao estudante a reorganização do processo de aprendizagem, no qual os esforços estão concentrados na análise de hipóteses e argumentação, presentes nas etapas de estudo. Com isso, ocorre a valorização do pensamento matemático, no qual o foco não está em apenas resolver o modelo, mas sim

interpretar as possíveis soluções a partir de variações de parâmetros e construções de hipóteses, implicando uma reorganização no aprender matemática.

Na mesma linha de pensamento da citação anterior, Araújo (2002), em sua investigação de doutorado, ao tratar da modelagem em um curso de cálculo fazendo uso das tecnologias, acredita que a tecnologia possibilita que o sujeito se preocupe com a interpretação e compreensão da situação e dos resultados obtidos. O computador surge como ferramenta na execução dos cálculos e tarefas que manualmente poderiam demandar muito tempo.

Portanto, a intencionalidade no uso das tecnologias digitais consiste no fato de que as mesmas oportunizam aos sujeitos envolvidos uma reorganização e um ganho qualitativo durante o processo de aprendizagem. Ao incorporar as tecnologias digitais em ambientes que proponham a investigação de situações que envolvam modelagem matemática, significa que há oportunidade para valorizar o trabalho cognitivo dos sujeitos envolvidos na construção de conceitos matemáticos. Neste aspecto, Blum e Niss (1991, apud ARAÚJO, 2002, p. 45) destacam na forma de itens a valorização de um trabalho que envolva a modelagem matemática e correlativamente faça uso das tecnologias ao longo do processo:

- 1) A possibilidade de melhor se concentrar nos processos de modelagem devido ao alívio que as tecnologias proporcionam aos cálculos de rotina;
- 2) A possibilidade de melhor compreender os problemas por meio de variação de parâmetros, estudos numéricos, algébricos e gráficos;
- 3) A desvalorização de habilidades ligadas a rotinas computacionais e a valorização de habilidades relacionadas com modelagem como, por exemplo, a construção, aplicação e interpretação de modelos;
- 4) A possibilidade de tratar com mais facilidade certos conteúdos matemáticos que são mais próximos de modelagem, tais como equações diferenciais e de diferenças no ensino médio, sistemas dinâmicos e teoria do caos no ensino superior etc.;
- 5) Uma maior abertura para a modelagem e aplicações nos currículos;
- 6) A possibilidade e necessidade de lidar com problemas que precisam dos computadores para serem tratados.

Neste sentido, no âmbito da educação matemática, uma abordagem envolvendo modelagem matemática na sala de aula constitui-se em um desafio, uma vez que se opõe a uma prática comumente observada em sala de aula, conforme afirma Soistak (2010):

Especificamente no ensino da matemática, esses problemas educacionais são vivenciados no dia a dia da sala de aula, refletindo na aprendizagem dos alunos. Quando da indagação sobre a importância da matemática aos alunos, eles concordam que a disciplina deve ser ensinada na escola. No entanto, confessam que encontram dificuldades de aprendizagem e não conseguem relacionar a matemática presenciada na escola com a matemática encontrada em situações do cotidiano. (SOISTAK, 2010, p.39)

Tais desafios constituem um ponto que converge com os aspectos apresentados por Mayer *et al* (2011) no início desta seção, apontando a matemática como um estigma. Ao considerar a Modelagem Matemática como uma possibilidade para atenuar esse estigma, Soistak (2010) afirma que essa inserção poderia desafiar e desenvolver o interesse do estudante pelo estudo da matemática, uma vez que a modelagem propõe o estudo e investigação de diversos fenômenos que ocorrem em contextos de certas realidades, inclusive o cotidiano.

Portanto, acreditamos que, ao inserir uma proposta de trabalho envolvendo o uso da modelagem matemática na investigação e construção de conceitos matemáticos, se estabelece entre todos os sujeitos envolvidos uma reconstrução de saberes e conceitos prévios. Ou seja, a cada passo que avança a investigação matemática no sentido da compreensão do objeto de conhecimento ou fenômeno em estudo, professor e estudantes (re)constróem e (re)significam diversos conceitos, potencializando qualitativamente o momento de aprendizagem e construção de novos conceitos matemáticos. Neste caso, o uso da tecnologia digital informática surge como uma ferramenta que objetiva auxiliar os sujeitos durante a criação, verificação e validação dos possíveis modelos propostos, como também desafiar o desenvolvimento das ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão máxima do contexto investigado.

### **Abstração Reflexionante: contribuições da Epistemologia Genética**

A Epistemologia Genética de Jean Piaget é a teoria que apresenta como hipótese para o desenvolvimento cognitivo humano a ação do sujeito sobre os objetos e os seus sucessivos avanços, devido à organização das *coordenações das ações* realizadas pelo sujeito. Na epistemologia genética considera-se “objeto” tudo o que não é o sujeito. É importante destacar que o pensamento e as ideias do próprio sujeito também podem ser constituídos objetos, desde que o sujeito aja sobre eles e assim avance na direção da tomada de consciência.

O termo “coordenações de ações” apresentado no parágrafo anterior é a fonte de estudo no processo de abstração proposto por Piaget (1977). O verbo abstrair significa retirar, extrair, puxar, neste caso temos que a abstração consiste no processo de retirada de qualidades dos objetos ou também a retirada de uma elaboração através das coordenações de ações sobre os objetos. Nesse sentido, a abstração proposta por Piaget divide-se em duas categorias gerais: abstração empírica e abstração reflexionante. Inicialmente vamos expor o ponto de vista do autor sobre essas categorias:

Recordemos inicialmente nossas definições. A abstração “empírica” (*empirique*) tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações dos sujeitos sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis, ao passo que a abstração “reflexionante” (*réfléchissante*) apóia-se sobre as coordenações de ações do sujeito, podem estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas. (PIAGET, 1977, p.274)

No estudo da matemática a empiria se faz presente, ao passo que a extração das características próprias dos objetos é necessária e contribui para elaborações mais complexas e que generalizam as qualidades, enriquecendo assim o objeto de estudo. À medida que se aumenta o número de abstrações do sujeito durante o processo interativo com o objeto, a qualidade de seu pensamento evolui devido ao progresso da abstração reflexionante e as sucessivas tomadas de consciência durante o processo.

A abstração reflexionante possui duas características essenciais para a compreensão sobre como os níveis de abstração e tomada de consciência progridem no decorrer da ação do sujeito. Trata-se dos processos de reflexão e reflexionamento. Sobre isso, Piaget (1977) apresenta:

Lembre-mos, igualmente, de que a abstração reflexionante comporta sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, “reflexionamento” (*réfléchissement*), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior e, de outro lado, uma “reflexão” (*réflexion*), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior. (PIAGET, 1977, p.274)

A união da reflexão e do reflexionamento constitui uma estrutura capaz de não apenas atravessar de um nível para o seguinte as formas de pensamento, mas juntas possuem o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou projeções. Isso significa que os patamares superiores atingidos pelo sujeito através da ação e coordenação de ações possuem

relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos através da ação. Ou seja, é por intermédio de sucessivas operações de reflexão e reflexionamento que é possível que o sujeito avance na direção dos patamares superiores de abstração e tomada de consciência de maior qualidade. A reorganização e coordenação de suas ações permitem qualificar cada vez mais a ação na direção da compreensão sobre o objeto, ou seja, a evolução da abstração empírica à reflexionante é um processo pelo qual o sujeito constrói, reconstrói, organiza e reorganiza os seus esquemas e estruturas de pensamento todo momento.

Os estudos apresentados por Piaget (1977) mostraram que para atingir esse patamar de abstração o sujeito deve passar por etapas que são necessárias e graduais, nas quais em cada novo desafio o sujeito é desequilibrado e deve se organizar de tal forma a superar as contradições e dificuldades que surgem na interação.

Portanto, de modo sucinto, a discussão desta seção buscou apresentar algumas características do processo de abstração, destacando-se os conceitos de reflexão e reflexionamento. Apresentamos alguns elementos necessários para a compreensão do seu funcionamento, o qual consiste em um complexo mecanismo capaz de explicar a apropriação e desenvolvimento do sujeito a partir de sua ação sobre os objetos, sejam materiais ou mentais. Tais conceitos serão utilizados na análise e exploração das produções dos estudantes.

## **Procedimentos metodológicos: materiais e métodos**

As aulas nas quais ocorreu a aplicação do segundo experimento didático com os estudantes do ensino médio aconteceram em um dos laboratórios de informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Caxias do Sul durante cinco semanas nas aulas regulares da disciplina de matemática<sup>6</sup>. Cada um dos encontros ocorreu de forma presencial e tiveram a duração de uma hora e quarenta minutos. Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso do objeto virtual “Cadeias de Markov – 2D” ocorreu por meio do acesso à internet e os registros escritos foram produzidos pelos

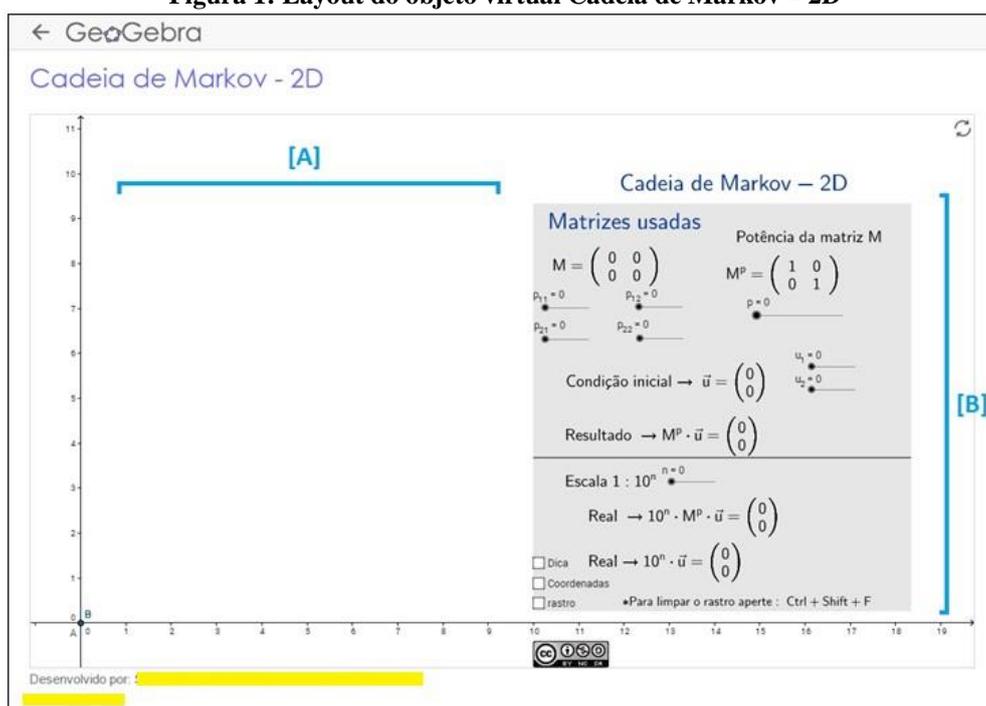
---

<sup>6</sup> O presente trabalho da tese de doutorado possui ao todo três *fases* de experimentação didática, as quais ocorreram em momentos distintos da pesquisa. As fases dois e três ocorreram na mesma instituição, porém com a participação de públicos alvos diferentes. A fase dois ocorreu no ensino médio e a fase três no ensino superior.

estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor ao longo das aulas.

A partir do uso do software GeoGebra foi construído e disponibilizado no repositório virtual do GeoGebra, o objeto “Cadeia de Markov – 2D”. O objeto virtual possui dois ambientes de trabalho, que na figura 1 abaixo foram indicados por [A] e [B]. No espaço [A] é oportunizado ao sujeito que está manipulando visualizar geometricamente o que ocorre com a representação do vetor envolvido nos cálculos. O espaço da parte [B] consiste em uma janela predominantemente algébrica, onde há alguns parâmetros que podem ser modificados e, conseqüentemente, alteram os resultados visualizados em [A]. Em [B] é possível que o sujeito explore a operação de potenciação envolvendo matrizes quadradas de ordem dois e três. Ainda é possível também explorar o conceito de escala através de comandos disponíveis na parte [B].

**Figura 1: Layout do objeto virtual Cadeia de Markov – 2D**



**Fonte:** Autores deste texto (Disponível em: <http://tubebeta.geogebra.org/material/simple/id/860625>)

Após cada encontro o material produzido por cada estudante foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta para cada um dos quatorze estudantes da turma. A sequência de atividades realizada no ensino médio foi organizada do seguinte modo: “Conhecendo o contexto” (1º dia), “Conhecendo o objeto virtual” (2º dia), “Retomando a problemática inicial” (3º dia), “Avançando no estudo da Cadeia de Markov” (4º dia) e

“Exercitando” (5º dia). Para a construção e realização da sequência de atividades, inspira-se na ideia de Artigue (1996) sobre Engenharia Didática:

A engenharia didática vista como metodologia de pesquisa de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p.196)

Com isso, acredita-se que a engenharia didática possibilita ao professor repensar a sua prática docente enquanto atua em sala de aula e, oportuniza que a realidade escolar se torne cenário para reflexão, criação e encaminhamento de propostas inovadoras de ensino. Ao trabalhar utilizando os aspectos experimentais desse método de pesquisa o professor pode se questionar se é possível que os alunos aprendam determinando conteúdo mediante uma sequência de atividades que pode ser repensada e readequada durante a execução da proposta.

Ao propormos a abordagem de situações-problema envolvendo modelagem matemática por meio das Cadeias de Markov<sup>7</sup>, a Engenharia Didática ocorreu através de quatro etapas ou fases:

- 1) *Análise prévia* – Nesta fase nos questionamos como ocorria o ensino dos conteúdos propostos e quais os efeitos que isto implica na aprendizagem dos estudantes.
- 2) *Concepção do experimento, análise a priori e criação das hipóteses* – Tratou-se da criação da sequência de atividades que constituíam o experimento. Formulação, por parte do professor, das hipóteses que seriam possivelmente validadas durante a execução das atividades.
- 3) *Experimento* – No qual ocorreu a execução das atividades planejadas na anterior.
- 4) *Análise a posteriori* – A partir dos dados coletados durante a fase da experimentação, o professor tenta validar ou não as hipóteses conjecturadas.

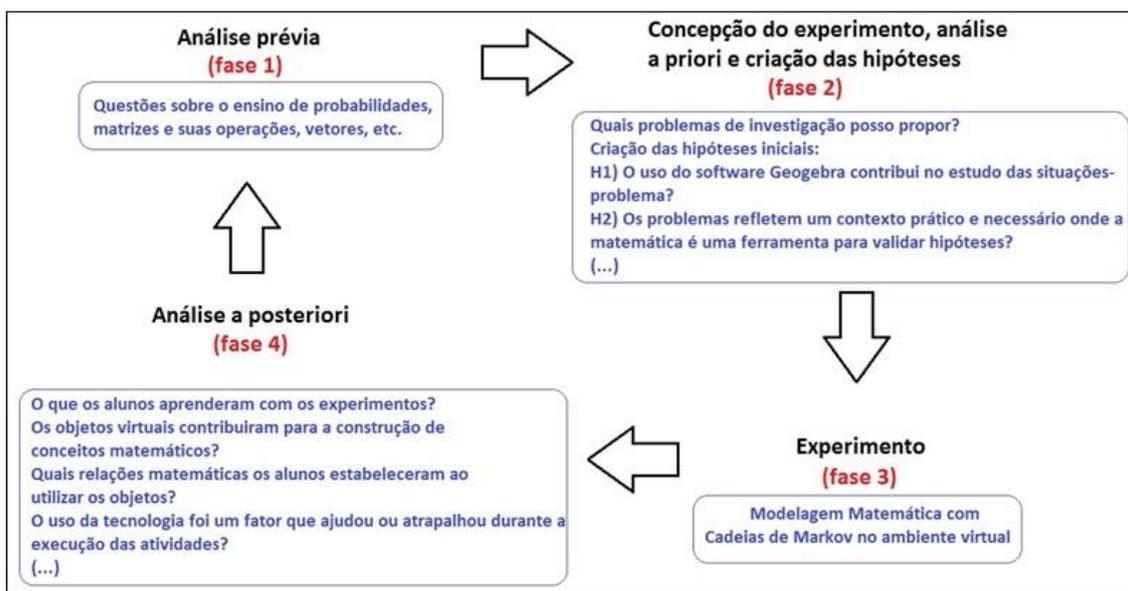
A partir das etapas anteriores, observou-se que a engenharia didática constituiria no caso de nossa pesquisa uma metodologia cíclica, ou seja, durante a execução do seu roteiro de atividades (fase 3) ao se deparar com novas dificuldades apresentadas pelos estudantes e que não foram detectadas anteriormente (fase 1), o professor pode reorganizar os seus procedimentos e formas de encaminhamento. Neste momento o professor pode redefinir também a sua concepção sobre o experimento e criar hipóteses

---

<sup>7</sup> Resumidamente, pode-se dizer que uma Cadeia de Markov é um tipo de sistema dinâmico no qual o atual estado da cadeia em uma sucessão de intervalos de tempo depende do estado que se encontrava a cadeia na etapa imediatamente anterior à atual. Para maiores detalhes matemáticos sobre esse assunto consulte Anton e Rorres (2012), Anton e Busby (2003) e Behrends (2000).

adicionais, ou ainda refutar alguma das hipóteses anteriores. Assim, uma readequação da proposta metodológica visa a contribuir na construção e aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos. O esquema apresentado na figura 2 ilustra as fases que envolvem a engenharia didática e suas relações com a presente proposta de trabalho.

**Figura 2: Esquema sobre a engenharia didática presente nesta pesquisa**



**Fonte:** autores deste texto

## **Análise e discussão dos resultados obtidos no experimento**

A presente seção busca apresentar, refletir e discutir à luz do referencial teórico utilizado, a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes ao longo da sequência<sup>8</sup> de atividades. Busca-se também refletir sobre a importância no uso das tecnologias digitais ao longo do processo de aprendizagem, a qual oportunizou que os sujeitos envolvidos pudessem por meio de suas ações e coordenações de ações sobre os objetos em estudo construir diversos conceitos matemáticos envolvendo a modelagem matemática em situações-problema com Cadeias de Markov.

Anteriormente afirmou-se que a sequência de atividades realizada no ensino médio foi organizada do seguinte modo: “Conhecendo o contexto” (1º dia), “Conhecendo o objeto virtual” (2º dia), “Retomando a problemática inicial” (3º dia), “Avançando no estudo da Cadeia de Markov” (4º dia) e “Exercitando” (5º dia). A partir de agora se faz um recorte e expõe-se a produção dos estudantes em dois momentos do experimento, 1º e 5º dias, pois com a limitação do presente artigo não será possível explorar e detalhar todos os dias da sequência de atividades.

<sup>8</sup> A sequência completa está disponível em:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/sequencia\\_markov\\_ensino\\_medio.pdf](https://dl.dropboxusercontent.com/u/60260993/sequencia_markov_ensino_medio.pdf)

**Conhecendo o contexto – 1º Dia:** A atividade neste dia foi organizada em dois momentos: o primeiro consistiu em fazer a leitura e discussão de uma notícia veiculada em um jornal, e o segundo momento consistiu em apresentar uma situação-problema inicial envolvendo o fluxo migratório entre dois lugares. A notícia<sup>9</sup> sugerida foi acessada via internet, notícia da qual os estudantes puderam conhecer a ocorrência do fenômeno da migração.

Após a leitura do texto pelos estudantes, alguns questionamentos foram feitos, com o objetivo de provocar uma reflexão sobre as causas apresentadas no texto, bem como fazer os estudantes contribuir com outras causas que poderiam influenciar no processo. O que se percebeu neste momento da atividade é que os estudantes se envolveram com a proposta e realizaram um exercício de reflexão sobre o objeto em estudo. Algumas contribuições são mostradas na figura 3 a seguir.

---

<sup>9</sup> Disponível integralmente em: <http://zh.clicrbs.com.br/rs/noticias/noticia/2014/08/novos-imigrantes-mudam-o-cenario-do-rio-grande-do-sul-4576728.html>

**Figura 3: Hipóteses criadas pelos estudantes sobre a migração**

(1d) Ainda a respeito do fenômeno da migração (emigração ou imigração), você pode listar alguns outros fatos que possam influenciar a sua ocorrência?

Melhorar condições de vida, estudo, custo de vida mais barato, emprego. [E.4]  
( ) Não assimilei a pergunta.

Buscam melhores condições de vida com um custo de vida relativamente baixo e um salário melhor para sustentar sua família [E.1]  
( ) Não assimilei a pergunta.

O fácil acesso as oportunidades ofertadas pelo Brasil e a ideia de que o Brasil é um país rico. [E.3]  
( ) Não assimilei a pergunta.

No caso do Haiti, o motivo da imigração se deu por conta do terremoto de 2010 que devastou o país, e como o Brasil tem acordo de refúgio com o Haiti a imigração se deu pra cá. [E.8]  
( ) Não assimilei a pergunta.

Além de buscarem uma nova chance em suas vidas, buscando novos empregos, outros fatores também podem a busca por melhores condições de estudos em melhores universidades. [E.10]  
( ) Não assimilei a pergunta.

Muitos vêm por influência de estudos que já estão aqui ou ainda vêm por conta própria, algumas pesquisas político (Bangladesh ou Gômbia) ou ainda por questões humanitárias (Haiti). [E.12]  
( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

Logo em seguida, da discussão sobre a notícia, durante o segundo momento ocorreu a apresentação de uma situação-problema envolvendo o fluxo migratório, conforme mostrado na figura 4. O problema tratava de um possível movimento migratório na localidade de Caxias do Sul (RS), onde empiricamente foram assumidas como hipóteses as taxas de migração.

**Figura 4: A situação-problema inicial. Fonte: arquivo pessoal**

No contexto da migração, quando as pessoas chegam a Caxias do Sul, por exemplo, se deparam com uma realidade muitas vezes diferente da que estavam habituadas em seu lugar de origem. Na tentativa de buscar o seu "lugar ao sol" para se alocar, os imigrantes deslocam-se da cidade para os subúrbios. Observa-se que o contrário também ocorre, ou seja, pessoas partem do subúrbio para a cidade. Certa vez foi considerada a seguinte situação-problema:

"Suponha que no ano 2010 a taxa de migração de Caxias do Sul para o seu subúrbio seja de 7%. E que durante o mesmo ano a taxa de migração do subúrbio para a cidade seja de 4%. Se a população observada no ano 2010 foi de 350000 habitantes na cidade e no subúrbio foi de 100000 habitantes então qual a população estimada para o ano 2011 para cada um dos lugares?"

Fonte: arquivo pessoal.

Foi solicitado que os estudantes elencassem possíveis assuntos matemáticos que pudessem ser utilizados na resolução da questão. Os assuntos elencados pela turma e suas respectivas frequências foram: porcentagem (13 citações), lógica (1 citação), função (5 citações), probabilidade (6 citações), estimativa (2 citações), “soma em cima da quantidade que se tem” (2 citações), estatística (2 citações), regra de três (4 citações), sistemas lineares (3 citações), progressão aritmética (1 citação). Percebeu-se que neste questionamento os estudantes citaram mais de um assunto que poderia ser utilizado na resolução, evidenciando que diferentes conteúdos matemáticos e as relações estabelecidas entre eles fossem considerados uma possível ferramenta na construção da solução para o problema.

No cálculo de estimativas para as populações nos anos seguintes (2011, 2012 e 2013) após início da observação do fenômeno, as estratégias usadas pelos estudantes para resolver os questionamentos envolveu predominantemente cálculos com porcentagens, somas e subtrações. Isto ocorreu de forma satisfatória para todos os integrantes da turma. Ao se deparar com a pergunta sobre uma possível generalização do processo envolvido na situação-problema, diferentes respostas foram fornecidas. Algumas considerações sobre essas respostas são importantes e merecem nossa atenção neste momento.

Cada sujeito epistêmico é o resultado de uma quantidade inestimável de reflexões/reflexionamentos, abstrações/tomadas de consciência que são realizadas ao longo da vida biológica. Todas as atividades praticadas pelos sujeitos, por meio de suas ações, são influenciadas devido o grau de envolvimento e profundidade no qual o sujeito explora os objetos em estudo. Ou seja, por parte do sujeito é possível que através das ações e coordenações de ações seja aperfeiçoada a qualidade de seu pensamento. Tal aperfeiçoamento da qualidade permite que diante de uma situação nova ou desafio imposto, o sujeito desenvolva estratégias que tentem convergir para a solução dos impasses ou desafios.

Ao longo da escolarização cada sujeito organiza a sua própria construção do conhecimento, derivando-se assim inúmeras formas e processos de aprendizagem. Aliado ao processo está a evolução da abstração; enquanto reflexionante; constituindo-se em um elemento que influencia diretamente na capacidade do sujeito resolver impasses e desafios impostos pelos objetos.

Logo, por intermédio do resultado manifestado pelos estudantes foi possível perceber diferentes caminhadas percorridas por estes ao longo de um processo individual de aprendizagem.

**Figura 5: Exemplos de enunciado para o princípio geral. Fonte: arquivo pessoal**

(P5) Se fosse possível neste momento enunciar um "princípio geral", você conseguiria elaborar um modelo ou método capaz de explicar como calcular o número de habitantes de Caxias do Sul e do seu subúrbio em cada ano? Explique.

$$\begin{cases} X_m = 0,93X_{m-1} + 0,04y_{m-1} \\ y_m = 0,96y_{m-1} + 0,07X_{m-1} \end{cases}$$

**[E.4]**  
( ) Não assimilei a pergunta.

Pode-se calcular através de porcentagem, diminuindo a porcentagem da cidade do subúrbio e vice-versa, somando a população entre o segundo o total.

**[E.1]**  
( ) Não assimilei a pergunta.

$(x \cdot y) + x$	x: pop. cidade	Ex: $(350.000 \cdot 0,04) + 350.000 = 364.000$
$(a \cdot b) + a$	y: pop. imigrante p/cidade	$(100.000 \cdot 0,07) + 100.000 = 107.000$
	a: pop. subúrbio	
	b: pop. imigrante p/subúrbio	

**[E.10]**  
( ) Não assimilei a pergunta.

O número de habitantes do ano anterior + 7% (para cidade) e/ou 4% (para subúrbio)

$(m-1) + 7\% \rightarrow$  Para cidade

$(m-1) + 4\% \rightarrow$  Para subúrbio

$\rightarrow$  sendo m o ano atual.

**[E.11]**  
( ) Não assimilei a pergunta.

Para mim, o princípio geral é repetir o processo feito anteriormente (criar de três)

**[E.14]**  
( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

Com isso, diferentes noções e percepções sobre generalidades surgiram nas respostas dos estudantes, reafirmando nossa discussão feita até agora, a qual atribui qualidade na expressão do pensamento, como sendo o produto de uma construção gradual e sucessiva, própria da atividade cognitiva do sujeito. Na figura 5 expomos alguns exemplos de possíveis enunciados para um princípio geral que pudesse explicar a situação proposta.

**Exercitando – 5º Dia:** A proposta consistia em analisar uma situação-problema (figura 6), à luz dos conceitos construídos ao longo das quatro primeiras aulas e também fazendo uso do objeto virtual Cadeias de Markov – 2D. A partir da segunda aula, em todas as atividades seguintes foi utilizado o objeto virtual na execução da sequência de atividades. A proposta explorava e retomava as ideias e conceitos desenvolvidos ao longo dos dias anteriores, tais como: vetores de probabilidade, matrizes estocásticas e

vetor estacionário. Os conceitos de escala, matriz e probabilidade também foram usados de modo implícito durante a exploração da situação problema proposta.

**Figura 6: Terceira situação-problema**

(Adaptada de Anton e Rorres (2012))

Observe a seguinte situação-problema.

*Em estações de medições da qualidade do ar nas cidades é possível através de medições e suas análises inferirmos sobre a qualidade do ar “respirado” pelos habitantes da cidade. Em Caxias do Sul verificou-se através da observação e análise de alguns registros empíricos que se em determinado dia a qualidade do ar é boa, então existe uma chance de 90% de que venha a ser boa a qualidade do ar no próximo dia. No estudo verificou-se também que se a qualidade do ar é ruim em determinado dia então existe uma chance de 45% de que a qualidade do ar venha ser ruim também no próximo dia. Nota-se que a qualidade do ar respirado hoje (17/06/2015) é boa, então qual a probabilidade do ar respirado também ser boa daqui 8 dias?*

Fonte: arquivo pessoal.

O que se percebeu no quinto dia com a proposta é que a construção de um possível modelo matemático pelos estudantes esteve relacionada com o desenvolvimento das atividades realizadas nos quatro dias anteriores do experimento. Ou seja, os conceitos e ideias construídos e desenvolvidos anteriormente foram mobilizados e utilizados no quinto dia de atividades na tentativa de solucionar a situação problema. O potencial evidenciado na aplicação de uma sequência de atividades com estudantes do ensino médio que envolvia a modelagem matemática de situações fazendo uso das cadeias de Markov é reforçado nas palavras de Silva *et al* (2015), o qual os autores dissertam:

“(…) considera-se que uma abordagem interdisciplinar de conteúdos potencializa o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos envolvidos. Ao propor o estudo de conceitos matemáticos que são necessários na compreensão de fenômenos em outras áreas do conhecimento, os estudantes estabelecem relações, constroem e reconstróem conceitos, formulam e reformulam hipóteses, enfim, aumentam a sua capacidade reflexiva sobre determinado assunto, proporcionando assim a construção de diversos conceitos de matemática de forma à melhor compreender o mundo que os cerca.” (SILVA *et al*, 2015, p.10)

Ao fazer uso do objeto virtual, os estudantes por meio de suas ações e coordenações de ações puderam construir/reconstruir, validar/revalidar as próprias hipóteses e assim argumentar sobre a situação. Neste aspecto, a tecnologia digital surgiu neste caso como uma aliada para os cálculos exaustivos e extensos, cabendo aos sujeitos dedicar-se a compreensão dos conceitos e ideias que estavam em discussão.

Observa-se a partir da fundamentação teórica que o exercício da abstração não deva ser considerado um processo somente em consequência da ação do sujeito sobre o objeto, mas sim como uma complexa reorganização de suas estruturas de pensamento proveniente da criação e do aperfeiçoamento do sujeito ao longo do processo. Logo,

nota-se que a produção de conhecimento manifestada pelos sujeitos nesta etapa da sequência de atividades constitui-se em um trabalho genuinamente cognitivo e individual de cada um que ocorreu através de sucessivas reflexões e reflexionamentos.

A partir da construção de hipóteses, as quais se constituíram num exercício predominantemente mental, foi intensificado e melhorado o exercício da abstração, uma vez que se buscou determinar as explicações causais para o fenômeno observado a partir da coordenação das ações sobre o objeto em estudo. E mais, pelo fato que o aperfeiçoamento da capacidade de abstração ocorre concomitantemente com o processo de melhoramento da tomada de consciência, nota-se que ambos os processos sejam indissociáveis e contribuam para o aumento da capacidade cognitiva do sujeito. Diante disso, o que se observou a partir da produção dos estudantes no enfrentamento da terceira situação-problema é que diante dos desafios impostos ocorreu a mobilização de diferentes esquemas e estruturas cognitivas agindo em cooperação e colaboração mútua durante o processo de aperfeiçoamento das sucessivas abstrações.

Durante a elaboração do princípio matemático envolvendo a situação estudada o aperfeiçoamento da qualidade de pensamento dos sujeitos tenha ocorrido e seja o resultado das sucessivas operações de reflexão e reflexionamento; as quais oportunizaram ao sujeito avançar na direção dos patamares superiores de abstração com maior qualidade. Logo, na união da reflexão e do reflexionamento constitui-se uma estrutura capaz de não apenas passar de um nível para o seguinte, mas que juntas tenham o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou também consideradas projeções. Isso significa que o patamar superior alcançado pelo sujeito através da ação e coordenação de ações tem relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos a partir da ação. Neste caso, pode-se afirmar que a reorganização e coordenação das ações, mentais ou materiais, permitiram aos estudantes aperfeiçoar cada vez mais suas ações na tentativa de compreender os objetos em estudo, ou seja, durante a elaboração do princípio matemático ocorreu a evolução do exercício da abstração reflexionante, a qual foi um processo pelo qual cada sujeito construiu, reconstruiu, organizou e reorganizou os seus esquemas e estruturas de pensamento. As figuras 7, 8, 9 e 10 a seguir mostram exemplos da construção dos modelos matemáticos pelos estudantes.

**Figura 7: Modelo produzido pelo estudante [E.3]**

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é *boa*, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique. [E.3]

*Sim, se usa a matriz que foi encontrada pelo valores informados no início de exercício, depois a matriz foi multiplicada pelo o exponencial que foi encontrada a partir da informação do data 17/06 sendo p=0 e multiplicada pela condição inicial que foi dado no exercício. Assim,*

$$M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,55 \\ 0,1 & 0,45 \end{bmatrix}, \text{ MP, que } 17/06 = p=0, \text{ para outros dias } n=17: \text{valor } p \text{ para dia } 17/06$$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ou  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para dom (dia)

( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

**Figura 8: Modelo produzido pelo estudante [E.2]**

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é *boa*, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar *da* qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique. [E.2]

*Sim,*

$$\begin{bmatrix} A_{10m} \\ A_{20m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,9 & 0,55 \\ 0,1 & 0,45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10n} \\ A_{20n} \end{bmatrix}$$

*A probabilidade de qualidade do ar no dia é dada a partir da matriz estocástica elevada na potência que representa o dia respectivo, multiplicada pela condição inicial*

( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

**Figura 9: Modelo produzido pelo estudante [E.11]**

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é *boa*, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar da qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique. [E.11]

$$\begin{bmatrix} B_{20m} \\ R_{20m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,55 \\ 0,10 & 0,45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ Sendo m a data desejada}$$

( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

**Figura 10: Modelo produzido pelo estudante [E.5]**

(Q4) Mantidas as condições *ideais* para a situação-problema e supondo que seja usada como condição inicial  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  para representar o dia (17/06/2015), no qual a qualidade do ar que se está respirando é *boa*, você consegue expressar através de um modelo matemático, ou regra genérica uma maneira que possa ser usada para estimar *da* qualidade do ar na cidade de Caxias do Sul ao longo dos demais dias? Explique. [E.5]

$$\begin{bmatrix} B_n \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,45 \\ 0,1 & 0,55 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} B_{17} \\ R_{17} \end{bmatrix}$$

*uma n é o dia que se quer saber e p é a diferença de dias. Por exemplo se quer saber se ar no dia 30/06 então n=30 e p=13 (30-17).*

( ) Não assimilei a pergunta.

Fonte: arquivo pessoal.

## Considerações finais

Em relação aos resultados obtidos com a construção, aplicação e análise da sequência de atividades, algumas conclusões e contribuições podem ser elencadas. Na introdução do presente artigo foram apresentados questionamentos que indagavam sobre a importância do professor em refletir sobre o seu papel e contribuição para a vida

dos estudantes, a partir da incorporação de um conjunto de situações que têm um potencial para construção de conhecimento por parte do aluno. Nesse sentido, nossa proposta converge com o pensamento de Lopes *et al* (2015) que argumenta:

Ao tentar encontrar uma maneira de solucionar os problemas, no caso os exercícios propostos, os estudantes sentiram-se desafiados, e isso os motivou durante a atividade. Tal condição, de desafio e uso da criatividade, vem ao encontro do conceito de engenharia didática que compara, guardadas as singularidades, o trabalho da sala de aula com o de um engenheiro. (LOPES et al, 2015, p.570)

Diante dos resultados apresentados neste artigo, nota-se que a partir do momento que o professor se dá conta que a aprendizagem matemática pelos estudantes é intimamente influenciada na ação sobre os objetos do conhecimento, qualitativamente nota-se a contribuição do professor enquanto agente de transformação na vida do estudante.

Mencionamos no decorrer do artigo que as atividades ocorreram ao longo de cinco encontros presenciais nas aulas regulares de matemática. Duas considerações podem ser feitas a partir disso: (1) Ao executar uma proposta de trabalho organizada durante determinado período de tempo, ocorreu uma valorização da aprendizagem em termos de *processo*. Reforça-se assim que *aprendizagem* seja um conceito aderente e correlacionado ao conceito de *processo*, considerando-se algo diferente de pontual, específico e que deva ocorrer somente em determinado momento específico. (2) Ao propor um trabalho envolvendo *todos* os estudantes de uma turma regular do ensino médio oportunizou-se que o cenário de realização da pesquisa fosse mais fiel ao que se propõe: verificar e analisar sobre a construção de conhecimento matemático por estudantes que, inseridos na escola, estivessem cursando a componente curricular de matemática.

Mais detalhadamente, no item (2), considera-se que as ações provenientes de pesquisas que tenham um olhar sobre as salas de aula *regulares* como fontes para a produção de diversos conhecimentos, matemáticos ou não, tenham profícua intencionalidade e contribuam qualitativamente nas discussões quem envolvam o ensino de determinada área do conhecimento. Logo, acredita-se que ao inserir nossa proposta metodológica de trabalho nas aulas regulares da disciplina de matemática buscou-se reafirmar a importância que o tripé *aprendizagem matemática – tecnologias digitais – modelagem matemática* tem ao longo do desenvolvimento escolar.

A experimentação das situações-problema e a elaboração de possíveis modelos matemáticos pelos estudantes ocorreram em diversas etapas ao longo da pesquisa. Com a modelagem foi possível perceber o quanto a teoria e as aplicações da matemática dialogam e se relacionam ao longo do desenvolvimento escolar. Percebeu-se que ambas estão inter-relacionadas e contribuem qualitativamente para construção e aprendizagem dos conceitos matemáticos. As pesquisas consultadas consideram que a modelagem matemática apresenta aspectos profícuos se incorporadas à metodologia de ensino por parte do professor, pois valorizam o papel desempenhado pelo estudante durante o processo de investigação. Neste sentido, observa-se no uso da modelagem matemática enquanto método de investigação na sala de aula que o estudante a partir de sua ação sobre os mais diversos objetos do conhecimento possa ser o principal ator durante o processo da própria aprendizagem.

Ao fazer uma leitura sobre a teoria da abstração reflexionante de Piaget e usá-la como justificativa para a construção do conhecimento considera-se que tal teoria explique satisfatoriamente o fato dos sujeitos aperfeiçoar a qualidade de seu pensamento através da sucessiva ação e coordenação das mesmas sobre os objetos em investigação, sejam materiais ou mentais. Após a realização do experimento didático com os estudantes do ensino médio, durante a análise das produções, foi possível relacionar em diversos momentos a construção do conhecimento matemático dos sujeitos com os conceitos de epistemologia genética. Por fim, constatou-se que tais conceitos constituíram uma fundamentação teórica capaz de auxiliar na interpretação dos registros escritos, fornecendo os subsídios necessários para verificar o gradual e processual micro-avanço dos sujeitos na direção do aumento do conhecimento ou capacidade cognitiva.

Quanto ao uso dos recursos tecnológicos utilizados durante a realização das atividades foi possível verificar o potencial desenvolvimento das mais variadas formas de pensamento, possibilitando aos sujeitos elaborar conjecturas e hipóteses através da sua ação sobre o objeto do conhecimento. Nota-se que através da exploração do objeto virtual o sujeito pode visualizar, validar ou refutar de modo dinâmico as suas hipóteses antecipadamente construídas. A cada modificação na tela do computador, via mudança dos parâmetros, por exemplo, foi possível perceber uma reorganização por parte dos sujeitos, provinda da reflexão ocorrida já em um patamar cognitivo superior, fazendo com que houvesse o estabelecimento de novas abstrações que agiram na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançaram de modo dinâmico e iterativo,

promovendo a reorganização ou reestruturação do pensamento do sujeito. Diante disto, considera-se que tenha de fato ocorrido com os estudantes do ensino médio participantes da pesquisa uma *aprendizagem baseada na ação*, parafraseando o título do presente artigo.

Após a realização do experimento didático com os estudantes do ensino médio ocorreu outro experimento em 2015/2, desta vez com estudantes no ensino superior, mas isso será oportunamente publicado posteriormente.

## Referências

- ALLEVATO, N. S. G (2005). **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. (2012) **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo. Contexto.
- ANTON, H.; RORRES, C. (2012) **Álgebra Linear com aplicações**. 10º Ed. Porto Alegre. Bookman.
- ANTON, H.; BUSBY, R. (2003) **Contemporary Algebra**. Hoboken, New Jersey: Wiley.
- ARAÚJO, J. L. (2002) **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos**. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- ARTIGUE, M. (1996) Engenharia Didática. **Didáctica das Matemáticas** (Dir, Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos.
- BEHRENDTS, E. (2000) **Introduction to Markov Chains: with special emphasis on rapid mixing**. Berlin: Vieweg.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. (2011) **Modelagem Matemática no ensino**. 5º edição. São Paulo. Contexto.
- BLUM, W.,; NISS, M. (1991) **Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Order Subjects**. Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics. Dordrechts, v. 22, n.1, p.37-68.
- BORSSOI, A. H. (2013) **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Londrina (UEL). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
- LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. (2015) **A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa**. Educação & Realidade, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abr./jun.

- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. (2011) **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte. Autêntica.
- MALHEIROS, A. P. S. (2004) **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- MOREIRA, M. A. (2011) **Unidade de Enseñanza Potencialmente Significativas – UEPS**. Aprendizagem Significativa em Revista. Porto Alegre, v.2, n.1, p.43-63. Agosto de 2011. Quadrimestral.
- SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C. ; BASSO, M. V. A. (2015) **Modelagem Matemática e TICs: Possibilidades Para Uma Abordagem Interdisciplinar De Conceitos Através da Tecnologia Informática**. In: IX CLIOA, 2015, Porto Alegre. Congresso Latino-americano Interdisciplinar Orientado ao Adolescente (CLIOA). v. 1. p. 1-12.
- SOARES, D. S. (2012) **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software?** Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- SOISTAK, A. V. (2010) Uma experiência com a modelagem matemática no Ensino Médio Profissionalizante. In: **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). Ponta Grossa. Editora UEPG.
- SKOVSMOSE, O. (2007) **Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo. Cortez.
- PIAGET, J. (1977) **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Melhoramentos. Tradução de Edson Braga de Souza. Editora da Universidade de São Paulo.

Enviado: 08/10/2015  
Aceito: 24/12/2015