ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

Os Exames de Admissão ao Ginásio: o que as soluções dos alunos revelam quanto ao ensino de frações

Exámenes de Admisión al Gimnasio: lo que las soluciones de los estudiantes revelan sobre la enseñanza de fracciones

Késia **Ramires***

ORCID iD 0000-0003-1528-5136

Resumo

O objetivo deste trabalho volta-se à caracterização das soluções dos alunos às questões, sobre frações, que compuseram as provas dos exames de admissão ao ginásio entre 1931 a 1969, no antigo Gymnasio de São Paulo. As perguntas da pesquisa atentaram-se a: que saberes processuais foram empregados pelos alunos na resolução de questões relacionadas às frações? Que possíveis saberes matemáticos para o trato com as frações os professores teriam ensinado à época referida? Que mudanças podem ser notadas sobre uma matemática do ensino a partir dos registros de apropriação dos alunos? Para a análise das soluções, foi suposto que elas poderiam ser lidas como resultados de uma apropriação dos alunos sobre uma fração ensinada na época, como práticas de produção de sentido, procedentes das relações entre matemática ensinada e matemática apreendida. Sob essa perspectiva, a investigação averiguou quais os *significados* e *saberes processuais* referentes às frações que foram mobilizados pelos alunos nas soluções dos exames. Entre outros resultados, foi constatado que poucas mudanças ocorreram no que diz respeito à abordagem do ensino científico do saber fração, mostrando que, independentemente da marcha pedagógica em voga, importava aos alunos, e possivelmente aos professores primários, saber os modos combinados de mobilizar os diferentes significados e saberes processuais relacionados às frações.

Palavras-chave: Exames de admissão ao ginásio. Frações. Apropriação. História da educação matemática.

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar las soluciones de los estudiantes a las preguntas, en fracciones, que estuvieron en los exámenes de admisión al Gimnasio entre 1931 y 1969, en el antiguo Gimnasio de São Paulo. La investigación se dirigió a las preguntas: ¿qué conocimiento procesal fue utilizado por los estudiantes para resolver problemas relacionados con fracciones? ¿Qué posible conocimiento matemático para tratar con fracciones habrían enseñado los maestros en ese momento? ¿Qué cambios se pueden ver sobre la enseñanza de las matemáticas en los registros de apropiación de estudiantes? Para el análisis de las soluciones, se supuso que podían leerse como los resultados de la apropiación de los estudiantes de una fracción enseñada en ese momento, como prácticas de producción de significado, resultantes de la relación entre las matemáticas enseñadas y las matemáticas aprendidas. En esta perspectiva, la investigación investigó los significados y el procedimiento en referencia a las fracciones que los estudiantes movilizaron en las soluciones de los exámenes. Entre otros resultados, se encontró que hubo pocos cambios con respecto al enfoque de la enseñanza científica de las fracciones, lo que demuestra que, independientemente del progreso pedagógico de la época, era importante que los estudiantes y, posiblemente, los maestros de primaria conocieran formas combinadas de movilizar diferentes significados y percepciones procesales relacionadas con fracciones.

Palabras clave: Exámenes de admisión al Gimnasio. Fracciones. Apropiación. Historia de la educación matemática.

* Doutora em Educação para Ciência e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Adjunta pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Ponta Porã, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: kesiaramires@hotmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

1 Introdução

Dentro do cenário brasileiro, pesquisas têm revelado que, acerca do tema avaliações[1] nacionais educacionais, os estudos históricos, ou de política educacional, ou de avaliação escolar, ou de financiamento público etc., concentram-se sobre os exames de admissão ao ginásio[2], ou sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)[3], Prova Brasil, Saeb, entre outros[4]. Esses estudos nos mostram as exigências dos exames, os tipos de questões, o formato das provas, as legislações que regiam (ou regem) essas avaliações, a política inerente a esses processos e outros aspectos. Como documentos nacionais que permearam (ou permeiam) os sistemas de ensino, que em certa medida controlaram, (ou ainda controlam) ou que interferiram (ou interferem) sobre as práticas escolares, entendemos que essas avaliações são fontes privilegiadas para estudos do campo educacional.

Segundo essa prerrogativa, e por trabalharmos em um pós-doutoramento na linha de história da educação matemática, com ênfase na história cultural, selecionamos documentos de períodos passados ao invés de atuais. Desse modo, encontramos, nos exames de admissão ao ginásio, um *corpus* coeso com a nossa perspectiva investigativa.

Entre os anos de 1931 a 1971, esses exames foram utilizados, oficialmente, como recurso de seleção dos alunos que finalizavam o ensino primário e queriam ingressar no secundário. O ginásio, por sua vez, era a porta de entrada para essa segunda etapa, de onde advém o nome *exames de admissão ao ginásio*. As provas dessa política nacional avaliativa foram aplicadas por colégios de referência da época, tais como: o Gymnasio do Estado de São Paulo, conhecido como Gymnasio da Capital, atual Escola Estadual de São Paulo; o Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro; o Ginásio Paranaense, atual Colégio Estadual do Paraná, em Curitiba, para citar alguns. Para a pesquisa, analisamos os exames do acervo da Escola Estadual de São Paulo, pois mostra-se o mais organizado e com o maior número de provas digitalizadas.

Alguns trabalhos de cunho histórico priorizaram esse mesmo conjunto de documentos, a saber: Machado (2002) mostrou uma verdadeira anatomia das provas de matemática,

---

[1] No contexto desta pesquisa, *avaliação nacional* e *exame* foram termos tratados como sinônimos. A *prova* foi considerada como um instrumento avaliativo utilizado na realização dos exames.

[2] Alguns como: Pessanha e Daniel (2002), Machado (2002), Pinto (2005), Aksenen (2013), Virgens e Silva (2013), Santos (2017), Neves (2019), Neves, Martti e Alfonso (2019) e, mais recentemente, trabalhos do *XVI Seminário Temático: provas e exames e a escrita da história da educação matemática*, elaborado pelo GHEMAT-Brasil em 2018.

[3] Exemplos: Silva, Santiago e Câmara dos Santos (2013), Passos, Oliveira e Salvi (2011), Reis (2012), Lima (2011), Pereira *et al*. (2016).

[4] Sousa (2003), Bauer (2008), Arcas (2010), Carvalho e Macedo (2011), Becker (2012), Amaro (2013), Neves (2016).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

evidenciando os assuntos exigidos e os tipos de questões, além de fazer um comparativo entre os exames realizados em São Paulo e no Rio de Janeiro; Virgens e Silva (2013) discutiram as características dos problemas de aritmética, bem como a mudança significativa na representação do que seria um *problema* matemático durante a política desses exames; Santos (2017) apontou uma caracterização da formatação das provas e identificou as mudanças ocorridas nas questões e nos saberes matemáticos, ao longo das quatro décadas de vigência dos exames. Por outro lado, Neves (2019) não trabalhou com o mesmo acervo, mas tratou de manuais preparatórios de exames de admissão ao ginásio, discutindo, também, os significados das frações – como propomos neste artigo.

Observando esses estudos, há que se destacar a ausência daqueles que tenham se inclinado a analisar os processos empregados pelos alunos, assim como a falta de investigações relacionando as soluções dos exames com o que era possivelmente ensinado nas escolas. Próximo a essa proposta, encontramos apenas o artigo publicado por Zuin (2018). A pesquisadora apontou considerações a respeito das soluções dos alunos nas provas dos exames de admissão ao ginásio, do mesmo acervo que selecionamos, porém, deu enfoque sobre o tema *sistema métrico decimal* e restringiu-se aos registros de 1931 a 1942. Ela também discutiu sobre as correções feitas pelos avaliadores e inferiu que “os algoritmos empregados eram os convencionais, sendo as operações indicadas tanto no sentido horizontal, quanto no vertical” (ZUIN, 2018, p. 63).

Tendo em vista esse levantamento de trabalhos, entendemos que nosso propósito se mostrou inédito, se considerarmos o enfoque sobre as *respostas dos alunos* e se delimitarmos ao assunto das *frações*. Explicamos nossas escolhas. Primeiro, por que seria relevante analisar as respostas dos alunos? Esse questionamento nos parece fundamental se quisermos compreender o ensino a partir dos registros dos alunos, da sua apropriação, *do que ficou*. Entendemos que tão importante quanto analisar um conjunto de documentos que dizem respeito aos professores ou ao saber programado, é também aquilo que foi apreendido, que foi captado do ensino. Assim, ampliamos as discussões de pesquisas históricas que recaem sobre as fontes voltadas aos mestres, ou às instituições de ensino, ou aos programas, ou aos saberes restritos em livros. Durante nossa pesquisa, pensamos em priorizar as respostas dos alunos.

Outro fator é: por que tratar das frações? Enquanto formadora de professores, esse assunto sempre me interessou e me chama atenção a carência de estudos históricos relativos ao tema. Ademais, segundo pesquisas atuais (MAGINA; CAMPOS, 2008; MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009; OLIVEIRA JÚNIOR; GONÇALVES, 2014; POWELL, 2018; MAMEDE, 2018), ainda há dificuldades por parte dos alunos quanto à aprendizagem desse saber. Também,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

há obstáculos no ensino (SILVA, 2005; SILVA, 2007; BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008; BERTONI, 2008). Então, para atender ao conjunto de nossas escolhas, um achado de fontes históricas pareceu-nos decisivo e, por motivos já declarados, selecionamos o acervo da Escola Estadual de São Paulo.

Assim, constituído o panorama da pesquisa, procuramos responder às interrogações: o que elementos captados pelas respostas dos alunos poderiam dizer sobre uma *matemática apreendida, possivelmente ensinada*? Que saberes processuais foram empregados pelos alunos na resolução de questões relacionadas às frações? Mais especificamente: o que as respostas dos alunos poderiam dizer sobre uma *fração ensinada*? Ou: que possíveis saberes matemáticos para o trato com as frações os professores teriam ensinado à época? Mostramos, nas seções posteriores, como essas interrogações, a fundamentação teórica e a metodologia permitiram encontrar os resultados da pesquisa.

2 A apropriação dos alunos, a matemática do ensino, a matemática apreendida

Em história da educação matemática, há um papel importante de provas e exames como fontes de pesquisa. De acordo com Valente (2001), os registros podem revelar a concepção de avaliação dominante num determinado contexto histórico, possibilitar a leitura que o cotidiano escolar realiza de uma dada época, servir de instrumento de análise de processos de resolução de exercícios empregados pelos alunos acerca de um conteúdo.

Além disso, as soluções dos alunos podem ser lidas como resultados de um processo de apropriação a partir do trabalho desenvolvido pelos professores, do respectivo ensino, bem como elas podem evidenciar os conteúdos que eram priorizados tanto pelos professores como pelos elaboradores[5] dos exames.

A primeira suposição em que as soluções dos alunos podem ser lidas como resultados de uma apropriação acomoda-se na perspectiva histórico cultural. Nesse contexto, entendemos que o constructo criativo realizado pelos alunos deriva de interpretações de textos, de discursos, de produções de ensino de seus professores. Essa interpretação, balizada pelos conceitos de apropriação e de representação de Roger Chartier (1990, 1995, 2016), compreende os registros dos alunos como múltiplos usos, diferenciados e conflitantes sobre aquilo que foi ensinado.

[5] No caso dos exames de admissão, eram elaborados por professores designados pelo diretor ou por professores mais um inspetor do distrito de onde o exame era aplicado. Com a Lei 4024, de 1961, os exames mantiveram os professores do estabelecimento como membros da banca, mas se fosse colégio particular, havia a fiscalização de uma autoridade competente (BRASIL, 1961).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

Dito de outro modo, as apropriações seriam entendidas como práticas de produção de sentido, procedentes das relações entre uma matemática do ensino e uma matemática apreendida.

O termo *matemática do ensino* foi explorado, recentemente, por Bertini, Gomes e Oliveira (2018). Compreende "as relações dinâmicas entre aquilo que é prescrito oficialmente, as orientações e propostas e também aquilo que é efetivamente parte da prática nas escolas" (BERTIN; GOMES; OLIVEIRA, 2018, p. 14). De acordo com os autores, em provas aplicadas no primário, ou no secundário, ou em exames de admissão, há a possibilidade de encontrarmos resultados de uma matemática do ensino, principalmente ao revelar os conteúdos e tipos de atividades privilegiados nas avaliações, estabelecendo relações entre as orientações dos documentos oficiais e o material didático.

Por outro lado, o enfoque desses autores não foi o de analisar as soluções dos alunos nas questões[6] de provas de exames. Dessa forma, parece-nos que a matemática do ensino foi discutida a partir da relação entre o que era proposto para ensinar e aquilo que, possivelmente, foi ensinado, o que, de certa forma, nos ajuda a entender a história do ensino de frações, mas não converge para o mesmo objetivo que tivemos.

Em nossa pesquisa, para além de uma *matemática do ensino*, estamos propondo uma *matemática apreendida*, uma matemática da apropriação dos alunos, algo revelado na forma de representações sobre a matemática que foi ensinada. Para nós, a diferença entre ambas reside na apuração das fontes, pois, ao questionarmos as soluções dos alunos segundo a ótica de uma matemática do ensino já apropriada, interpelamos as fontes – soluções dos alunos – como sendo a representação de uma matemática ensinada.

Assim, as categorias teóricas de *apropriação* e *matemática do ensino* levam-nos a refletir sobre o termo *matemática apreendida*. Essa última, com o recorte sobre as frações, seria a matemática apropriada a partir de uma *fração ensinada*, situada, neste trabalho, em tempos de exames de admissão ao ginásio. Adiante, explanamos sobre os conceitos teóricos assumidos durante a pesquisa.

3 Metodologia

Nossa hipótese de pesquisa, de modo geral, considera a apropriação dos alunos e o

[6] O termo *questão(ões)* agrega tanto os problemas quanto os exercícios. Questões com enunciados mais longos, envolvendo alguma contextualização, exigindo interpretação do aluno, também foram chamadas de problemas. Questões de enunciado direto, indicando prontamente um comando (calcule, aponte, compare, escreva), foram entendidas como exercícios.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

respectivo registro dessa apropriação como indicativos para se discutir sobre uma matemática ensinada. Então, tomamos para a nossa investigação cerca de 14168 exemplares de soluções apresentadas em provas de exames de admissão ao ginásio. O conjunto dessas soluções englobou 488 questões matemáticas diferentes e, aproximadamente, 2060 provas. Esse acervo passou pelos processos de higienização, digitalização, catalogação e divulgação, atividades essas programadas pela pesquisa intitulada *História da Educação Matemática no Brasil, 1920-1960*, coordenada pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente. Hoje em dia, o acervo *Os exames de admissão ao ginásio: 1931-1969* está disponível por meio de três CD-ROM's e pelo repositório digital da Universidade Federal de Santa Catarina, banco de dados *História da Educação Matemática*.

Direcionando a análise para as frações, do total das 488 questões, resolvemos 312 que envolveram esse saber. Compusemos um gabarito. Em seguida, de posse do gabarito, contabilizamos todas as respostas que foram dadas como corretas e como erradas[7] pelos avaliadores da época. Para continuidade do procedimento metodológico, dirigimos nossa atenção a uma dupla análise: de um lado, averiguando aquilo *que os alunos mobilizaram matematicamente para a resolução de* problemas e exercícios exigidos nas provas; de outro, refletindo sobre *o que os exames poderiam sugerir quanto a uma fração ensinada.*

Após a seleção dos problemas e exercícios que envolviam as frações, procuramos anotar a diversidade de soluções que se apresentava, categorizando os *significados* (ou construtos) e os *saberes processuais* (estratégias, processos, procedimentos) relacionados a esse saber matemático. Os significados foram entendidos como a lógica interna do saber, ou seja, as diferentes intepretações acerca das frações. Já os saberes processuais foram relacionados à parte estratégica, isto é, à forma estrutural de organizar as ideias na resolução dos problemas.

A partir da categorização dos significados das frações que apareceram em quatro décadas de exames, computamos o percentual de questões relacionadas a cada um deles. Esse percentual está apresentado no início da seção 4. Para a finalização metodológica, após constatar quais foram os tipos de significados que sobressaíram durante as quatro décadas, também conferimos se esses tinham uma quantidade expressiva de acertos junto às soluções dos alunos, pois foi importante obter uma variedade maior de saberes processuais atrelados a cada tipo de significado. Essa etapa final está discutida na seção 5.

[7] Observamos, no conjunto das respostas corretas, que algumas estavam erradas, mas foram dadas como corretas pelos avaliadores. Outras, erradas, na verdade estavam corretas. Ainda, algumas tiveram peso de correção diferenciado pelo avaliador, ou seja, dando uma nota parcial para um aluno e não usando o mesmo critério para outro. Essas constatações revelam equívocos de correção, o que pode ter levado a consequências decisivas na vida dos jovens candidatos, considerando a importância dos exames de admissão para a continuidade da escolaridade.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

4 Síntese sobre os significados das frações identificados em questões e soluções dos exames

Como dito, a pesquisa passou pela fase de resolver as questões envolvendo frações e por separar aquelas com maior número de acertos junto aos alunos. Dessa etapa, observamos que, algumas vezes, os alunos: (a) *descobriam o valor do inteiro* baseado na correspondência entre quantia e uma parcela da fração, sendo isso um percentual de aproximadamente 23% das questões envolvendo frações; (b) ou *aplicavam a fração sobre certa quantia*, acabando por transformar essa quantia, reduzindo-a ou aumentando-a, marcando um percentual aproximado de 15% das questões.

Em outras situações, os alunos: (c) respondiam à comparação entre frações, como *qual a maior?*, ou *escreva as frações na ordem crescente*, ou seja, mobilizavam a ideia de número (ocorrência de 7% das questões). Em poucos casos, precisaram: (d) mobilizar o significado de proporção (3%) para as respostas, como na questão: *Sabendo que 1dm^3 de pedra pesa 21gr 750, achar o peso de 2m^3 875 dessa pedra* (Prova de 1940).

Além dessas, também tiveram que manipular propriedades das frações, achando: (e) frações equivalentes, ou escrevendo frações próprias ou impróprias, ou reduzindo à fração decimal ou ordinária, ou encontrando a geratriz (6% das questões). Questões: (f) em que os alunos priorizaram o algoritmo da divisão[8] ao invés da representação fracionária (25%); (g) que exigiam apenas continhas, como os *famosos carroções*[9] (17%); (h) que demandavam somente a aplicação direta das quatro operações fundamentais (4%), não foram tratadas na pesquisa.

Essa caracterização possibilitou diferenciarmos os significados das frações implícitos a cada questão, buscando entender uma parte da matemática que circulara na época. Logo, uma dica que adotamos durante essa tarefa foi de indagar: era preciso *encontrar o todo* ao interpretar uma questão, ou deveríamos *transformar o todo*, ou apenas comparar frações, ou aplicar as operações fundamentais sobre elas? Também questionamos, em todos os casos, se nas soluções dos alunos havia a necessidade da representação fracionária ou se apenas do algoritmo da divisão.

Verificamos que dois tipos de significados ocorreram com maior frequência nas quatro décadas e com maior diversidade entre as soluções corretas, a saber, os itens (a) e (b). Dessa forma, esses significados foram selecionados para dar corpo à análise e representar uma parte

[8] Desse momento em diante, todas as vezes em que nos referirmos ao termo *algoritmo da divisão*, significa que os alunos não mobilizaram a representação fracionária para os cálculos, mas sim armaram continhas na vertical – como na Figura 1 – ou não horizontal.

[9] Os carroções eram as extensas expressões numéricas adotadas pelos avaliadores para aferir o adestramento para o cálculo, para a manipulação dos algoritmos (MACHADO, 2002; VALENTE, 2001).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

daquilo que era ensinado. Os itens (f) e (g), ainda que tenham aparecido com frequência entre as questões, não foram tratados aqui, porque os alunos, por algum motivo, preferiram a utilização do algoritmo da divisão ao invés da representação fracionária, como na Figura 1, e porque, ao operar com continhas, não precisaram empregar significado algum sobre fração, como no item (g).

Uma pessoa gastou 3/5 do que tinha e 20$000 a mais.
Restaram-lhe ainda 230$000. Quanto possuía?

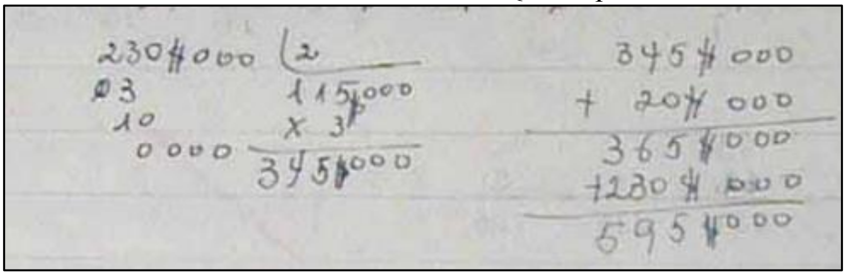

Figura 1 – Solução usando algoritmo da divisão e da adição
Fonte: Prova de 1942, CD-ROM, v. 1, Arquivo da Escola Estadual de São Paulo

Adiante, nas Tabelas[10] 1 e 2, apresentamos dados por ano e edição de exame, por número de provas aplicadas e por percentual de acertos dos alunos. Não foram tabeladas as edições com número de provas inferior a dez exemplares[11]. Também não houve, na década de 1930, questões que abrangeram o significado (b). Para a etapa final do trabalho, selecionamos uma questão representativa por década (as quais aparecem destacadas em negrito nas Tabelas), sendo essas de maior percentual de acerto, ou *alto percentual de acerto*. Posteriormente, analisamos as soluções a essas questões que foram selecionadas como representativas de cada década.

Tabela 1 – Distribuição por ano e edição de exame, por quantidade de questões com o significado (a)[12], por número de soluções corretas e percentual de acertos

Ano/edição	Quantidade de provas	Quantidade de soluções corretas	Percentual de acertos
1931-a[13]	66	8	12%
1936	74	48	**65%**
1939	23	8	35%
1941	75	27	36%
1942	80	44	55%
1943-a	70	37	53%
1944	80	45	**56%**
1946	41	27	66%
1949-a	22	8	36%

[10] Na edição de 1942, 1956-a, 1957-a, 1962-a e 1963-b encontramos mais questão(ões) envolvendo o significado (a). Na edição de 1946, ocorreu o mesmo envolvendo o significado (b). Mas, por estética de composição das Tabelas, incluímos nelas apenas a primeira questão que as provas traziam com os respectivos significados.
[11] Número de corte para composição de dados das tabelas.
[12] Na Tabela 1, os dados são das primeiras questões de cada prova que estavam relacionadas ao significado (a).
[13] Em alguns anos tivemos duas edições do exame, sendo diferenciadas pelas letras *a* e *b* logo na frente do ano.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

1952-a	39	35	**90%**
1953-a	15	6	40%
1954	42	27	64%
1955-a	34	13	38%
1956-a	36	6	17%
1956-b	47	8	17%
1957-a	18	7	39%
1958-b	52	23	44%
1959-a	15	10	67%
1959-b	42	30	71%
1960-b	12	8	67%
1961	22	2	9%
1962-a	11	8	73%
1963-a	16	7	44%
1963-b	10	7	70%
1964	20	15	75%
1966-a	16	16	**100%**
1967	24	14	58%
1968	18	7	39%
Total	**954**	**501**	**–**

Fonte: elaborada pela autora

Tabela 2 – Distribuição por ano e edição de exame, por quantidade de questões com o significado (b)[14], por número de soluções corretas e percentual de acertos

Ano/edição	Quantidade de provas	Quantidade de soluções corretas	Percentual de acertos
1940	74	51	**69%**
1946	41	27	66%
1949-a[15]	22	9	41%
1950-a	96	85	**89%**
1951	37	24	65%
1952-a	39	28	72%
1952-b	16	14	88%
1954	42	16	38%
1958-a	14	2	14%
1960-b	12	7	58%
1961	22	9	41%
1962-b	14	5	36%
1969	24	17	**71%**
Total	**453**	**294**	**–**

Fonte: elaborada pela autora

[14] Na Tabela 2, os dados são das primeiras questões de cada prova que estavam relacionadas ao significado (b).
[15] Em alguns anos tivemos duas edições do exame, sendo diferenciadas pelas letras "a" e "b" logo na frente do ano.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

De 1987 exemplares de soluções respondidas, que incluíram os significados (a) e (b), 954 compuseram a síntese da Tabela 1 e 453 a síntese da Tabela 2. Os 580 restantes foram desconsiderados, pelos seguintes motivos: por serem exemplares de edições com um número inferior a dez provas respondidas, ou por não serem as soluções das primeiras questões de cada prova com referência aos significados (a) e (b). Na continuidade, discutimos sobre as soluções empregadas pelos alunos conforme os significados enfatizados.

5 Discussão sobre os saberes processuais empregados pelos alunos

A partir da seleção de todas as questões que apresentaram, implicitamente, o significado (a), selecionamos, para compor o Quadro 1, aquelas de maior número de acertos em cada década do exame. Sendo assim, os enunciados visualizados no Quadro 1 se referem às questões representativas em cada década, as quais estão negritadas na Tabela 1.

Ano do exame	**Enunciado da questão**
1936	Uma pessoa gasta 1/4 do seu ordenado em aluguel de casa, 5/12 na alimentação, 1/6 no vestuário e economisa 200$00 cada mez. Qual é o ordenado mensal?
1944	Determinar o número de hectolitros de vinho recolhidos por um agricultor que, tendo vendido os 3/8 de sua colheita e consumido ¼ da mesma, recebeu Cr$8.287,50 pelo resto vendido à razão de Cr$21,25 o decalitro.
1952	Maria tirou 3/5 das laranjas de uma cesta, e Lúcia, ¼. Restaram 18. Quantas laranjas havia na cesta?
1966	Qual é a distância entre São Paulo e Rio de Janeiro, se a distância entre Pindamonhangaba e Guaratinguetá é de 30 km e representa 2/34 da distância entre as capitais?

Quadro 1 – Questões com *alto percentual de acerto* relacionadas ao significado (a)
Fonte: elaborado pela autora

Para a análise, precisávamos optar por alguma das questões do Quadro 1 para subsidiar a categorização pretendida. Desse modo, escolhemos a mais antiga, a do ano de 1936. Na questão da prova desse ano, representativa da década de 1930, dos 74 exemplares analisados, 26 deles demonstraram respostas equivocadas, algumas se aproximando de cálculos corretos, mas confundindo a finalização. Todas as soluções corretas tiveram a mesma construção inicial, a qual esboçamos abaixo:

$$\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}}_{1^{\text{a}}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{2}{12}}_{2^{\text{a}}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{10}{12}=\frac{5}{6}}_{3^{\text{a}}\text{ etapa}} \quad \rightarrow \text{gastos no mês}$$

Alguns alunos não colocaram a 2ª etapa na folha de prova (só a fizeram no rascunho), outros não realizaram a simplificação de 10/12. Contudo, todas as provas marcaram a mesma 1ª etapa. As diferenciações que ocorreram nas soluções deram-se após a 3ª etapa, como segue:

(A) Doze soluções, após obter o resultado 10/12, seguiram com a 4ª etapa e 5ª etapa

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

$\underbrace{\frac{12}{12}-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}}_{4^{a}\text{ etapa}}$ e então os 200 economizados correspondiam a 2/12, ou seja,

$$\underbrace{200 \equiv \frac{2}{12} \rightarrow 200 \div \frac{2}{12}}_{5^{a}\text{ etapa}}$$

Após expressar a 5ª etapa, essas doze soluções não usaram mais a representação fracionária e recorreram ao algoritmo da divisão e da multiplicação para a finalização, armando a continha na vertical de 200 dividido por 2 e depois de 100 vezes 12, chegando a 1200 como resposta.

(B) Quatro soluções, após chegar à conclusão da 5ª etapa, finalizaram o problema usando o processo de *inverter a operação da divisão pela multiplicação e inverter a ordem da fração*[16], como demonstrado abaixo. Concluíram *simplificando a multiplicação* da 6ª para a 7ª etapa

$$\underbrace{200 \div \frac{2}{12}}_{5^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{200 \times \frac{12}{2}}_{6^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{100 \times \frac{12}{1}}_{\substack{7^{a}\text{ etapa} \\ \text{(simplificou)}}} = 1200$$

(C) Sete provas também apresentaram o processo de *inverter a operação, inverter a ordem da fração*, mas fizeram a simplificação final somente na 7ª etapa

$$\underbrace{200 \div \frac{2}{12}}_{5^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{200\times 12}{2}}_{6^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{2400}{2}}_{7^{a}\text{ etapa}} = 1200$$

(D) Dos exemplares que exibiram o processo de inversão acima, outros seis diferiram-se dos cálculos apenas ao usar a fração 1/6 ao invés de 2/12, entre a 5ª para a 6ª etapa, ficando da seguinte forma[17] (dentre as seis soluções, uma foi descrita textualmente, sem usar contas)

$$\underbrace{200 \div \frac{1}{6}}_{5^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{200\times 6}{1}}_{6^{a}\text{ etapa}} = \underbrace{\frac{1200}{1}}_{7^{a}\text{ etapa}} = 1200$$

(E) Oito exemplares dos 48 com respostas corretas demonstraram procedimento com estruturação diferente dos já enunciados. Aplicaram a *redução à unidade* na correspondência entre 200 e $\frac{2}{12}$ finalizando a resolução assim

$$\underbrace{200 \equiv \frac{2}{12}}_{\substack{5^{a}\text{ etapa} \\ \text{correspondência entre} \\ \text{quantia e uma parcela} \\ \text{da fração}}} \longrightarrow \underbrace{100 \equiv \frac{1}{12}}_{\substack{6^{a}\text{ etapa} \\ \text{1 parte do todo}}} \longrightarrow \underbrace{1200 \equiv \frac{12}{12}}_{\substack{7^{a}\text{ etapa} \\ \text{o total das partes} \\ \text{ou} \\ \text{um inteiro}}}$$

[16] Vamos abreviar o termo desse processo para: *inverter a operação, inverter a ordem da fração*.
[17] Vejamos que os modelos da 5ª, 6ª e 7ª etapa podem mudar um pouco entre algumas categorias.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

(F) Mais dez exemplares dos 48 também mostraram a combinação entre: *significado de (a)* mais *redução à unidade*. Diferenciaram-se dos procedimentos anteriores a partir da 4ª etapa, pois fizeram a correspondência entre 1/6 e 200

$$\underbrace{\frac{1}{6} \equiv 200}_{\substack{4^{\text{a}}\text{ etapa} \\ \text{o que economizou} \\ \text{1 parte do todo}}} \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{\frac{6}{6} \equiv 1200}_{\substack{5^{\text{a}}\text{ etapa} \\ \text{o total das partes} \\ \text{ou} \\ \text{um inteiro}}}$$

(G) E, finalmente, apenas um exemplar mobilizou a regra de três, tratando, a parte a ser encontrada, como *x* – Figura 2. Esse procedimento também é conhecido como 4ª proporcional, pois demonstra três elementos conhecidos e um a ser encontrado.

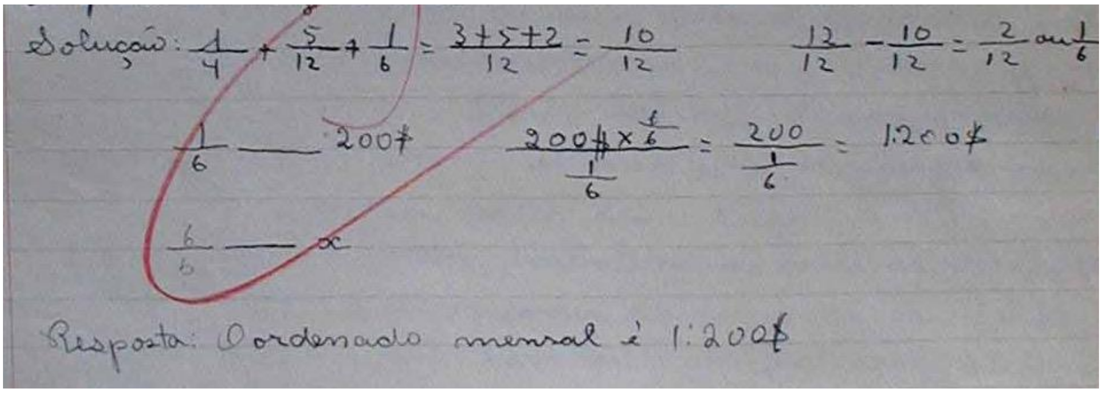

Figura 2 – Solução usando a 4ª proporcional
Fonte: Prova de 1936, CD-ROM, v. 1, Arquivo da Escola Estadual de São Paulo

Há sutileza nos processos empregados pelos alunos, ora preferindo a organização pela *redução à unidade*, ora *invertendo a operação e invertendo a ordem da fração*, ou aplicando o *algoritmo da divisão e multiplicação* (na vertical ou na horizontal). Em nenhuma das 74 respostas ao problema de 1936, encontramos indícios de desenhos (ou de gráficos) mobilizados pelos alunos. Após categorizar previamente as soluções para esse problema, analisamos aquelas para o problema da prova de 1944, da prova de 1952 e da prova de 1966. A computação dessa categorização[18] encontra-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Distribuição por esquemas de soluções dos alunos, por categorias A a G, por quantidade de ocorrências

		Problema			
Esquemas de soluções	**Categorias**	**1936**	**1944**	**1952**	**1966**
manipulação final com algoritmo da divisão	esquema A	12	8	7	6
manipulação *inverte a operação, inverte a ordem da fração*	esquema B	4	0	15	2
	esquema C	7	5	2	0
	esquema D	6	0	0	0
manipulação pela *redução à unidade*	esquema E	8	28	11	7
	esquema F	10	3	0	1
4ª proporcional usando a incógnita *x*	esquema G	1	1	0	0
uso de desenho ou gráfico	ñ há esquema	0	0	0	0

[18] Para fins didáticos e melhor leitura da Tabela 3, cada *Esquema de solução* está colorido com as respectivas *categorias* que o compõe.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

soluções erradas	26	35	4	0
Total	**74**	**80**	**39**	**16**

Fonte: elaborada pela autora

Inferimos, ao tabelar os dados, que um mesmo significado de fração poderia disparar processos diferentes de manipulação estratégica (saberes processuais diferentes), mas notamos que houve predileção dos alunos pelo emprego da *redução à unidade*. Nos quatro exemplares aqui trazidos envolvendo o significado (a) (um problema da prova de 1936, outro de 1944, 1952 e 1966), apenas no ano de 1952 vemos o processo de *inverte a operação, inverte a ordem da fração* com predominância. Nesse caso, podemos supor que os saberes processuais ligados a esse significado não se alternaram muito ao longo das quatro décadas.

O mesmo procedimento lançado para averiguar o significado (a) também foi utilizado para o significado (b). No Quadro 2, vemos a ilustração dos enunciados de questões representativas (com maior índice de acertos pelos alunos) por década de exame ao tratar desse segundo significado. Vale ressaltar a ausência de questões, na década de 1930, trazendo a ideia do significado (b).

Ano do exame	Enunciado da questão
1940	Uma pessoa ganha 9.600$ por ano. Gasta os 2/5 para alimentar-se e economisa os 2/3 do resto. Quanto economiza por ano?
1950	Ache os 2/3 de 3/6 de 1/2.
1969	Mário comprou 420 figurinhas. Colou 2/7 em seu álbum e as restantes eram repetidas. (a) Quantas eram as figurinhas repetidas? (b) Cada pacotinho com 3 figurinhas custa NCr$ 0,05. Quanto Mário gastou inutilmente?

Quadro 2 – Questões com *alto percentual de acerto* relacionadas ao significado (b)
Fonte: elaborado pela autora

De acordo com o Quadro acima, tivemos três exemplares subordinados ao significado (b) para a análise. Como feito anteriormente, escolhemos o problema mais antigo para subsidiar a categorização de soluções dos alunos. Então, seguem abaixo os tipos de saberes processuais identificados nas respostas ao problema da prova 1940:

(A) 29 respostas corretas apresentaram cálculo direto da fração sobre uma dada quantia. Essa quantia, por sua vez, dizia respeito a um elemento total, nesse caso, o de um salário inteiro. Os procedimentos mostraram que os alunos *transformavam* a quantia total do salário ao multiplicá-la pela fração (1ª etapa). Da mesma forma o faziam ao multiplicar o resto do salário por $\frac{2}{3}$ (4ª etapa). Logo, a ideia mobilizada era a de multiplicar uma fração por dada quantia, transformando-a, como explicitado

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

$$\underbrace{9600 \times \frac{2}{5} =}_{\substack{1^{\text{a}}\text{ etapa}\\ \text{multiplicando}\\ \text{a fração}\\ \text{de uma quantia}}} \quad \underbrace{\frac{19200}{5}}_{2^{\text{a}}\text{ etapa}} = 3840$$

$$\underbrace{9600 - 3840 = 5760}_{\substack{3^{\text{a}}\text{ etapa}\\ \text{encontrando o resto}\\ \text{do salário}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{5760 \times \frac{2}{3} =}_{\substack{4^{\text{a}}\text{ etapa}\\ \text{novamente}\\ \text{multiplicando}\\ \text{a fração de certa}\\ \text{quantia}}} \; \underbrace{\frac{11520}{3}}_{5^{\text{a}}\text{ etapa}} = 3840$$

(B) Apenas uma solução, ao invés de usar o sinal de multiplicação na 1ª e 4ª etapa, mostrou um sinal de traço, como

$$\underbrace{9600 \;\; - \;\; \frac{2}{5} =}_{\substack{1^{\text{a}}\text{ etapa}\\ \text{o traço foi desenhado}\\ \text{no meio}}} \quad \underbrace{\frac{19200}{5}}_{2^{\text{a}}\text{ etapa}} = 3840$$

(C) Outras duas soluções representaram o sinal de multiplicação da 1ª e 4ª etapa substituído pelo conectivo *de*

$$\underbrace{9600 \;\text{ de }\; \frac{2}{5} =}_{1^{\text{a}}\text{ etapa}} \quad \underbrace{\frac{19200}{5}}_{2^{\text{a}}\text{ etapa}} = 3840.$$

(D) O uso de desenho foi expresso apenas uma vez, como ilustrado na Figura 3

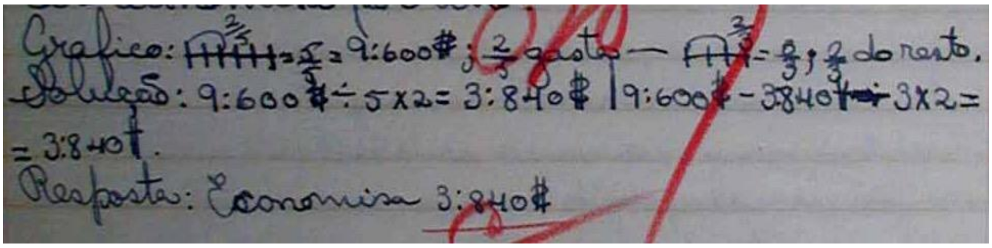

Figura 3 - Solução usando partição desenhada
Fonte: Prova de 1940, CD-ROM, v. 1, Arquivo da Escola Estadual de São Paulo

(E) Seis soluções evidenciaram uso de algoritmos na vertical. Primeiro, tinha armada a continha de 9600 dividido por 5. Do resultado, multiplicava-se por 2. Mostraram a mesma 3ª etapa da categoria A e finalizaram armando os últimos algoritmos na vertical: de 5760 dividido por 3 e de 1920 vezes 2.

(F) Alguns alunos entenderam que poderiam efetuar primeiro as contas entre as frações e depois calcular a fração resultante sobre a quantia inicial total (os 9600). Então, efetuaram assim

$$\underbrace{\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}}_{1^{\text{a}}\text{ etapa}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}}_{2^{\text{a}}\text{ etapa}} \quad \text{e então} \quad \underbrace{\frac{2}{5}\text{ de } 9600 = \frac{2}{5} \times 9600 = 3840.}_{3^{\text{a}}\text{ etapa}}$$

O esquema F foi detectado 7 vezes na folha de prova e mais 5 em folha de rascunho

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

(pois nem sempre esses cálculos de rascunho foram repassados na folha de prova). Houve, portanto, doze questões computadas como corretas nessa categoria.

(G) Também poderia ter ocorrido a solução de *redução à unidade*, a qual apareceu duas vezes, mas com a finalização errada. Após os cálculos da 1ª e 2ª etapa da categoria F, reduzir-se-ia à unidade, relacionando primeiro 5/5 à quantia inicial total (aos 9600). Depois, encontrar-se-ia um quinto (o valor da unidade) e, ao final, far-se-ia 2/5 de 9600, como a seguir

$$\underbrace{\frac{5}{5} \equiv 9600}_{\substack{3^{a}\text{ etapa} \\ \text{correspondência entre} \\ \text{o "inteiro" e a quantia total}}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{5} \equiv 1920}_{\substack{4^{a}\text{ etapa} \\ \text{redução à unidade}}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{2}{5} \equiv 3840}_{\substack{5^{a}\text{ etapa} \\ \text{uma parcela da quantia}}}.$$

Não houve solução correta computada utilizando o processo G.

Para a questão da prova de 1950, apareceram processos semelhantes aos anteriores, tais como:

- multiplicação entre frações e uma simplificação ao final, da forma

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

ou simplificação direta sem a etapa em que aparece o $\frac{6}{36}$;

- operação multiplicativa escrita pelo comando *de: 2/3 de 3/6 de 1/2* é 1/6;
- multiplicação por etapas, simplificando as frações em cada etapa

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Da primeira forma, foram encontradas 62 ocorrências; da segunda, nove; da última, catorze. Ou seja, a maioria dos alunos operaram as multiplicações e as simplificações entre as frações com cálculos diretos, sem fazer por etapas. Contudo, todos esses três casos recaem na 2ª etapa da última categoria F, em que se calcula a fração de uma fração, multiplicando-as.

Na Tabela 4, as soluções ao problema da prova de 1969 estão computadas junto as dos problemas da prova de 1940 e de 1950. Não houve solução em que primeiro se operou o cálculo entre as frações e depois se aplicou o resultado sobre a quantia total, como a seguir:

$$\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{e} \quad \frac{5}{7} \times 420 = 420 \times 5 \div 7 = 300$$

Tabela 4 – Distribuição por esquemas de soluções dos alunos, por categorias A a G, por quantidade de ocorrências

		Problema		
Esquemas de soluções	**Categorias**	**1940**	**1950**	**1969**
manipulação da multiplicação de fração sobre certa quantia	esquema A	29	0	2
	esquema B	1	0	0

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

	esquema C	2	0	0
desenhos ou gráficos	esquema D	1	0	0
algoritmos na vertical (algoritmo da divisão e multiplicação)	esquema E	6	0	13
fração de uma fração e/ou fração de uma certa quantia	esquema F	12	85	0
redução à unidade	esquema G	0	0	2
soluções erradas		23	11	7
Total		**74**	**96**	**24**

Fonte: elaborada pela autora

Como verificamos pela Tabela 4, não foi encontrada solução com apelo à estratégia *redução à unidade*, diferenciando-se daquilo que aconteceu ao caso anterior (significado (a)). Provavelmente, ao identificar que o problema exigia apenas uma multiplicação entre *fração e quantia*, os alunos não se preocuparam em realizar outro processo. Dessa forma, significados diferentes sobre fração nem sempre demandariam os mesmos saberes processuais como combinação solucionatória.

Outro detalhe importante a observar, pelos dados da Tabela 4, é o de não encontrar registro sobre o processo *inverte a operação, inverte a ordem da fração*. Isso sugere que essa estratégia estava relacionada ao significado (a), pois, ao se dividir uma quantia por certa fração, a fim de encontrar quanto valia uma parte do todo, aparecia a operação de divisão. Porém, para o significado (b), no qual a ideia era multiplicar uma quantia por dada fração, a estratégia *inverte a operação, inverte a ordem da fração* não se aplicaria. Sendo assim, para cada significado implícito sobre fração, presumimos que os alunos sabiam qual estratégia adotar a partir daquilo que teriam apreendido, ou seja, da sua apropriação. Isto significa que as representações expostas em inúmeras soluções dos alunos podem apontar para uma fração ensinada naquele momento histórico.

6 Considerações finais

Nesta pesquisa, partimos do pressuposto de que as soluções dos alunos apresentadas nos exames de admissão ao ginásio poderiam revelar indícios de uma fração ensinada e de uma parte da matemática apreendida entre os anos de 1931 a 1969. Essa argumentação se pautou em três condições: a primeira, de que as provas e exames podem dizer sobre uma matemática do ensino, e sendo assim, os registros dos alunos podem dizer sobre uma matemática apreendida, *do que ficou* do ensinado; a segunda e a terceira condição dizem respeito ao alto quantitativo de soluções apensadas à pesquisa (cerca de 14168 exemplares) e ao período considerável de quatro décadas. Essas duas últimas condições não podem ser lidas como um ensino pontual da matemática, mas, sim, como uma representação coletiva acerca daquilo que estava circulando nas salas de aula do primário.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

Então, seguindo o pressuposto que definimos e respeitando a delimitação da pesquisa, procuramos detectar e discutir sobre dois elementos inerentes às frações, os quais foram tomados como categorias metodológicas: os *significados* das frações mobilizados no período, bem como os *saberes processuais* que se relacionavam a esses significados. Conclusivamente, ao averiguarmos as soluções das questões dos exames, obtivemos como retorno alguns elementos que nos chamaram atenção, tais como:

- a combinação entre o significado *descobrir um inteiro (o todo) baseado no valor de uma parcela da fração* e a estratégia *redução à unidade*, ou a combinação do mesmo significado com a estratégia *inverte a operação, inverte a ordem da fração*;
- a combinação entre *transformar o todo* (reduzindo-o ou aumentando-o) e a estratégia *redução à unidade,* ou a combinação do mesmo construto com a estratégia *multiplicação entre fração e quantia*.

Juntos, esses significados e saberes apontaram para uma fração ensinada e apreendida que permaneceu pouco variável no que diz respeito ao saber científico. Ao que nos parece, para responder aos exames, importava saber os modos combinados de mobilizar os diferentes significados das frações e os saberes processuais relacionados a esses modos, independentemente da vaga pedagógica em voga. Isto é, entendendo uma "vaga pedagógica como sinônimo de movimento, de fluxo, de transformação de um dado tempo por meio da propagação e ampla aceitação de doutrinas, ideais, filosofias pedagógicas" (GHEMAT-SP, s/d), podemos dizer que o movimento de transformações pedagógicas, que ocorreu ao longo das quatro décadas dos exames, não interferiu nos registros finais – como as provas de exames de admissão ao ginásio – dos alunos, daquilo que apreenderam sobre as frações.

As combinações que expusemos, além de discutirem os significados das frações do que conhecemos como *parte-todo* e *operador multiplicativo*, provocam inquietações para se compreender as respostas dos alunos, não focalizando somente os significados inerentes aos saberes matemáticos, mas, também, olhando para os saberes processuais, que são tão importantes quanto os primeiros. Com isso, podemos avançar em outras frentes investigativas, combinando significados, saberes processuais, saberes sobre os alunos, sobre a pedagogia, sobre a cultura escolar, isto é, combinando *significados* com os *saberes processuais* e com os *métodos de ensino historicamente conhecidos* etc.

É preciso, portanto, dar continuidade à pesquisa, confrontando nossos resultados ao que estava posto para o ensino em diferentes vagas pedagógicas. Esperamos que essa ideia possa motivar outros pesquisadores e professores a conhecerem, ainda mais, a respeito dos saberes matemáticos, da história da nossa educação matemática e a colaborarem para a matemática

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

escolar de hoje.

Referências

AMARO, I. Avaliação externa da escola: repercussões, tensões e possibilidades. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 24, n. 54, p. 32-55, jan./abr. 2013.

ARCAS, P. H. Saresp e progressão continuada: implicações na avaliação escolar. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 21, n. 47, p. 473-488, set./dez. 2010.

AKSENEN, E. Z. **Os exames de admissão ao ginásio, seu significado e função na educação paranaense**: análise dos conteúdos matemáticos (1930 a 1971). 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2013.

BAUER, A. Uso dos resultados do Saresp e formação de professores: a visão dos níveis centrais. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 19, n. 41, p. 483-498, set./dez. 2008.

BECKER, F. da R. Avaliações externas e ensino fundamental: do currículo para a qualidade ou da "qualidade" para o currículo? **Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación**, Madri, v. 10, n. 4, p. 37-48, 2012.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B; KERET, Y. "Authentic Investigative Activities" for Teaching Ratio and Proportion in Pre-Service Mathematics Teacher Education. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 125-159, 2008.

BERTINI, L. F.; GOMES, L. P. S.; OLIVEIRA, M. A. Provas, exames e a matemática do ensino. *In*: BURIGO, E. Z. (Org.). **Provas, exames e história da educação matemática.** Boa Vista: Editora da UFRR, 2018. p. 11-76.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BRASIL. Lei nº 4024, de 20 de dezembro de 1961. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Diário Oficial da União: seção 1, v. 7, p. 11429, 27 dez. 1961.

CARVALHO, G. F. S.; MACEDO, M. S. A. N. Avaliação oficial: o que dizem os professores sobre o impacto na prática docente. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 37, n. 3, p. 549-564, set./dez. 2011.

CD-ROM. **Os exames de admissão ao ginásio:** 1931-1969. São Paulo: PUC/SP, 2001. v. 1-3. Arquivos da Escola Estadual de São Paulo.

CHARTIER, R. Por uma sociologia histórica das práticas culturais. *In*: CHARTIER, R. **A História Cultural:** entre práticas e representações. Tradução de Maria Manuela Galhardo. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1990. p. 13-28.

CHARTIER, R. Textos, impresos, lecturas. **Revista de História**, São Paulo, n. 132, p. 83-94, 1995.

CHARTIER, R. A "nova" História Cultural. *In*: GARNICA, A. V. M. (Org.). **Pesquisa em história da educação matemática no Brasil:** sob o signo da pluralidade. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. p. 19-35.

GHEMAT-SP. **Glossário**. Repositório de conteúdo digital da Universidade Federal de Santa Catarina, em particular, na pasta "História da Educação Matemática – base de dados do GHEMAT". s/d. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/30434028.pdf. Acesso em: 12/10/2019.

LIMA, J. L. S. **Contextualização e conteúdo das questões de matemática do ENEM e dos vestibulares da USP, UNICAMP e UFSCar**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 90, n. 225, p. 411-432, maio/ago. 2009.

MAMEDE, E. **Young children can learn to reason and to name fractions.** Minho: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2018.

MACHADO, R. C. G. **Uma análise dos Exames de Admissão ao Secundário (19301970):** subsídios para a História da Educação Matemática no Brasil. 2002. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

NEVES, K. C. R. **Implicações de avaliações oficiais em práticas docentes:** o que dizem professores de uma região de Mato Grosso do Sul. 2016. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

NEVES, K. C. R. Manuais preparatórios para os exames de admissão ao ginásio: uma análise sobre a fração. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 132-149, 2019.

NEVES, K. C. R.; MARTTI, F. C. M.; ALFONSO, D. E. Voltando aos exames de admissão ao ginásio (1930-1970): a relação entre a matemática dos exames com a matemática a ensinar e ensinada nas escolas. **Revista Educação, Psicologia e Interfaces**, Ponta Porã, v. 3, n. 3, p. 64-78, dez. 2019.

OLIVEIRA JÚNIOR, A. P.; GONÇALVES, E. B. Análise sobre o processo ensino e aprendizagem dos números fracionários nas séries finais do ensino fundamental em escolas estaduais de Uberaba – MG. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, p. 25-45, jul./dez. 2014.

PASSOS, M. M.; OLIVEIRA, B. K.; SALVI, R. F. As Questões de “Matemática e suas Tecnologias” do “Novo ENEM”: um olhar com base na Análise de Conteúdo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 313-335, 2011.

PEREIRA, C. S. *et al*. O enfoque CTs nas questões de matemática no ENEM de 2014: uma realidade? **Imagens da Educação**, Maringá, v. 6, n. 3, p. 62-73, 2016.

PESSANHA, E. C.; DANIEL, M. E. B. História da Cultura Escolar Através dos Exames: o Caso dos Exames de Admissão ao Ginásio (1939-1971). **Intermeio**, Campo Grande, v. 8, n. 16, p. 4-15, 2002.

PINTO, N. B. Cultura escolar e práticas avaliativas: uma análise das provas de matemática do exame de admissão ao ginásio. *In*: VALENTE, W. R. (Org.). **Avaliação em Matemática:** histórias e perspectivas atuais. Campinas: Editora Papirus, 2005. p. 39-74.

POWELL, A. B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência. **Rematec**, Belém, v. 13, n. 29, p. 78-93, set./dez. 2018.

REIS, A. Q. M. **Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM como indutor da prática curricular de professores de matemática a partir da perspectiva de contextualização**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2012.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a28

SANTOS, R. **Saberes matemáticos identificados em provas do exame de admissão ao ginásio do Colégio São Paulo (1931-1969)**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente:** análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, F. A. F.; SANTIAGO, M. L.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, Ed. Especial, p. 190-208, dez. 2013.

SOUSA, S. M. Z. L. Possíveis impactos das políticas de avaliação no currículo escolar. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 119, p. 175-190, jul. 2003.

VALENTE, W. R. (Coord.). **Os exames de admissão ao ginásio:** 1931-1969. São Paulo: PUC/SP, 2001. CD-ROM. v. 1-3. Arquivos da Escola Estadual de São Paulo.

VIRGENS, W. P.; SILVA, M. C. L. A resolução de problemas nos exames de admissão ao ginásio em tempos de escola nova. *In:* Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 7, 2013, Montevideo. **Anais[...]** Montevideo: editora, 2013. p. 7789-7796.

ZUIN, E. S. L. Exames de admissão do Gymnasio da Capital de São Paulo sob a égide da Reforma Francisco Campos: as questões relativas ao sistema métrico decimal. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 48-67, 2018.

Submetido em 04 de Julho de 2020.
Aprovado em 23 de Janeiro de 2021.