

## Una propuesta para aplicar *Probability Explorer* en el aula

*Edgar David Jaimes Carvajal\**

### RESUMEN

El taller propuesto tuvo como objetivo proponer y experimentar una metodología de trabajo en el aula para el aprendizaje significativo de la noción de probabilidad. El fundamento del taller estuvo sustentado en el uso del enfoque experimental y simulado con el software *Probability Explorer*. Los participantes se involucraron en la generación, tratamiento, sistematización y análisis de datos de un experimento aleatorio. Se justificó la importancia del uso de diferentes sis-

temas de representación, así como la influencia de la noción de distribución en la comprensión del significado del concepto de probabilidad. El taller se desarrolló en tres fases: diagnóstico, experimentación "real" y simulación. Se propuso una manera de evaluar las respuestas de los participantes a través del modelo SOLO.

**Palabras clave:** Probabilidad. Experimentos aleatorios. Distribución de variables

---

\* Instituto Técnico Industrial Francisco de Paula Santander – Puente Nacional. Dirección electrónica: [edjaimes@gmail.com](mailto:edjaimes@gmail.com)

## JUSTIFICACIÓN

En la enseñanza tradicional de la probabilidad de nivel elemental se pone demasiado énfasis en el cálculo y se descuida su comprensión (Yáñez, 2003 & Reátiga, 2004). Se suele comenzar por calcular la probabilidad de resultados aislados sin considerar y comparar las probabilidades de todos los posibles resultados, es decir, sin considerar la distribución de probabilidades. La consideración de distribuciones de variables aleatorias puede contribuir a la comprensión, en la medida en que ofrece la posibilidad de ver el conjunto total de resultados de una experiencia, empezando a percibir las propiedades del conjunto y no de elementos individuales. Pero este modelo de enseñanza puede evidenciar una concepción errónea común en los estudiantes: el sesgo de equiprobabilidad, el cual consiste en asignar igual probabilidad al conjunto de resultados de una experiencia. Es posible que un enfoque frecuencial y la ayuda de un software dinámico (Probability Explorer en [www.probexplorer.com](http://www.probexplorer.com), ver Fig. 1) puedan contribuir a superar este sesgo en una situación simple en la que en un primer acercamiento los estudiantes posiblemente asignen equiprobabilidad a los resultados o, bien, evidencien respuestas de tipo idiosincrático o de tipo determinista. De acuerdo con lo anterior se plantearon dos preguntas: ¿Cómo desarrollan los estudiantes la comprensión de la Ley de los Grandes Números (LGN) con ayuda de la noción de distribución en un ambiente de aprendizaje con tecnología? ¿Qué resultados se obtienen de las respuestas de los estudiantes a tareas de probabilidad relacionadas con la LGN antes y después de actividades de simulación física y computacional?

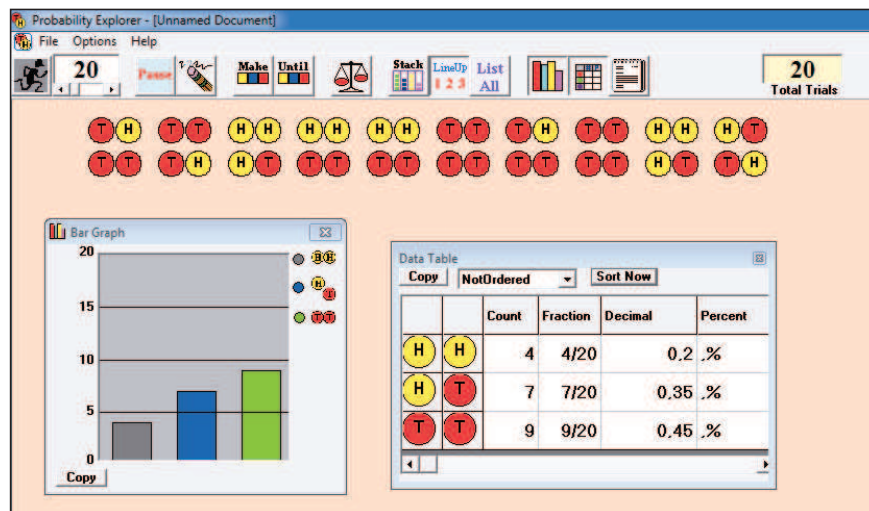


Figura 2. Simulación en Probability Explorer con dos monedas.

## MARCO CONCEPTUAL

Trabajos como el de Fischbein (1982) y Sánchez (2002) respaldan el uso de la experimentación de situaciones aleatorias como camino hacia aprendizajes significativos, a través del desarrollo de intuiciones apropiadas respecto a la frecuencia relativa, donde el contexto y las disposiciones de los estudiantes forman parte de un ambiente específico de aprendizaje para el desarrollo del razonamiento probabilístico (Garfield, et al., 2008). En este ambiente, los estudiantes deben realizar tareas de predicción a priori y posteriori de la experimentación física, y de confrontación de resultados de manera individual y grupal a través de la discusión entre pares. Pero dadas las pocas repeticiones que finalmente se realizan, es muy difícil que los estudiantes perciban alguna regularidad en el comportamiento de las secuencias aleatorias que permita dar algún significado a su experiencia y generar conceptos claros sobre la probabilidad de un suceso (Jaimes & Martínez, 2007). Ello nos plantea un nuevo reto: complementar el enfoque frecuencial con el desarrollo de la noción del concepto de distribución y hacer uso de una herramienta que permita generar resultados aleatorios en mayor cantidad, menos tiempo y con muchas repeticiones –un simulador de probabilidad–. Pfannkuch y Reading (2006) afirman que la distribución es el lente a través del cual es posible ver la variación, la cual es el corazón del pensamiento estadístico y probabilístico (ver Fig. 2), donde el estudiante debe razonar en una variable aleatoria para percibir patrones de variación en las frecuencias relativas a través de representaciones tabulares y gráficas. Esta es la razón por la cual se cree que la noción de distribución de frecuencias relativas y la variable aleatoria pueden ser herramientas a través de las cuales los estudiantes pueden desarrollar significados e intuiciones correctas de probabilidad tratando las gráficas como distribuciones, es decir, ver los datos aleatorios como un ente, y no que se centren en los resultados de un evento como tradicional-

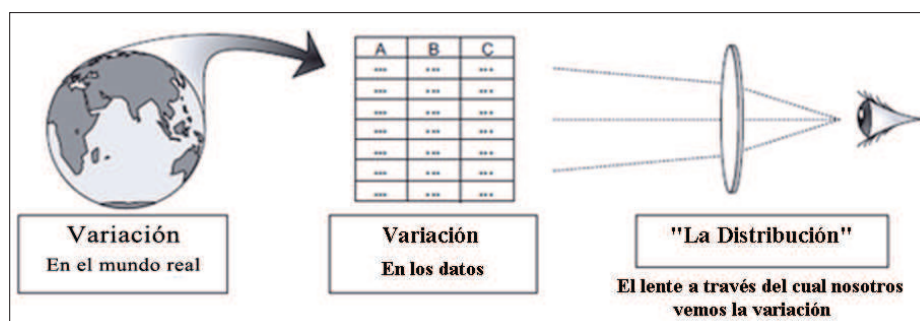


Figura 2. La Distribución como lente (Pfannkuch y Reading, 2006)

mente se hace. Uno de los principales obstáculos de este enfoque para percibir de manera adecuada cualquier distribución (uniforme o no uniforme) lo representa el sesgo de equiprobabilidad, ya que los sujetos con este sesgo consideran que el resultado de un experimento aleatorio "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

### METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller está basado en las actividades implementadas en la tesis de maestría de Jaimes (2011), la cual se desarrolló durante diez meses, dos de los cuales se trabajó directamente con 34 estudiantes entre 14 y 15 años de tercer grado de secundaria en la Escuela Técnica # 97 de Ecatepec (Estado de México). Se diseñó y aplicó una actividad que giró en torno a una situación aleatoria relacionada con un espacio muestral no equiprobable e implícito, relacionado con el número de caras que resultan del lanzamiento de dos monedas (ver Fig. 3). La actividad se desarrolló en tres fases: diagnóstico, experimentación y simulación computacional, donde los estudiantes debían hacer predicciones antes, durante y posterior a la experimentación y simulación. Los resultados eran presentados en tablas y gráficas de frecuencias absolutas y relativas. El seguimiento de los cambios en los razonamientos se realizó a través de un diagnóstico inicial, una evaluación posexperimentación física y una evaluación final postsimulación computacional, que consistieron en doce preguntas cada una, relacionadas con doce tareas diferentes de predicción, argumentación e interpretación de resultados.

**Actividad: ¡A LA SUERTE!**

La familia Pérez, está compuesta por el señor Carlos, su esposa Ana y su hijo Beto. Los domingos por lo general, después de comer les gusta ver televisión, pero nunca están de acuerdo para ver un mismo programa. Al señor Carlos le gusta ver su partido de fútbol, a la señora Ana las películas de drama y a Beto sus dibujos animados.

Como solo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control del televisor semanalmente, pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: **"A la suerte"**.

Propone rifar el control jugando a los volados con dos monedas de la siguiente manera: Si no sale ninguna águila en los dos volados gana la Sra. Ana; si sale exactamente un águila gana el niño Beto y si salen dos águilas gana el Sr. Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta.

A largo plazo, ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?




Figura 3. Situación aleatoria propuesta a los estudiantes (Jaimes, 2011)

El modelo SOLO (The Structure of Observed Learning Outcomes) de Biggs y Collis (1991) ayudó a describir el razonamiento de los estudiantes a partir de la observación de la conducta de resolución frente a diversos problemas, ya que permitió jerarquizar las respuestas de los estudiantes y ha sido empleado en la investigación estocástica (Watson, 2006). Este modelo no clasifica a los estudiantes como de rendimiento alto o bajo, pero sí clasifica las respuestas en una escala de cinco categorías en un tiempo determinado y respecto a una tarea específica. Además, reconoce que a diferentes tiempos se pueden observar diferentes respuestas de un mismo sujeto. Así, las respuestas se pueden considerar manifestaciones que dependen del tiempo, y pueden permitir decidir qué actividades son convenientes para ayudar a los estudiantes a avanzar en su desarrollo. Este modelo tiene cinco niveles de respuesta: preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracción extendida (ver fig. 4). El modelo SOLO sirvió como una herramienta para caracterizar la evolución del razonamiento de los estudiantes a partir de las respuestas que dieron a las preguntas del diagnóstico y las dos evaluaciones.

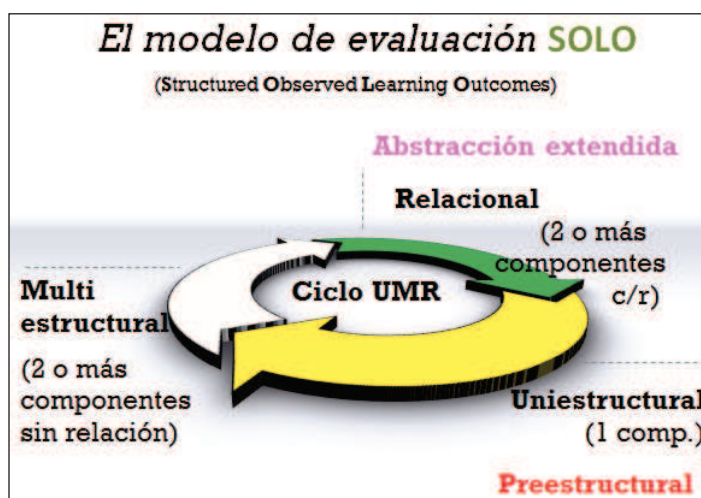


Figura 4. Modelo SOLO (Biggs y Collis, 1991)

La idea era implementar la misma situación, adecuándola para dos sesiones de hora y media con el objetivo general de vivenciar una actividad de experimentación y simulación computacional que permita a los docentes que enseñan matemática acercarse al concepto de probabilidad desde un enfoque frecuencial e involucrando la idea de variable aleatoria y de distribución, donde sea posible confrontar nuestras intuiciones con los datos reales y simulados. En la primera sesión se expusieron, de manera corta, las ideas

teóricas básicas y metodológicas que están detrás del taller a desarrollar, de tal manera que pueda ser implementado en instituciones de Básica Primaria o bachillerato. Se aplicó un diagnóstico para identificar algunas intuiciones y sesgos que pueden tener los participantes. Luego, los participantes tomaron datos reales de la situación aleatoria (haciendo lanzamientos simultáneos de dos monedas por parejas) y respondieron unas preguntas básicas acerca de las distribuciones de frecuencias absolutas y relativas de los datos obtenidos, para contrastar con las respuestas del diagnóstico y hacer inferencias.

En la segunda sesión, se propuso realizar simulaciones con el software Probability Explorer (Drier, 2000a, 2000b) para modelar la situación aleatoria de la variable aleatoria número de caras, se tomaron algunas distribuciones de frecuencias a corto, mediano y largo plazo, se respondieron algunas preguntas sobre las percepciones de los datos y se hicieron inferencias para contrastar con las respuestas anteriores. Finalmente se concluyó el taller con una fase de institucionalización de conocimientos, donde se ejemplifica el uso del modelo SOLO para categorizar las respuestas y caracterizar las componentes conceptuales asociadas a las tareas que enfrentan los participantes en cada pregunta.

Las actividades desarrolladas pueden ser usadas y modificadas de manera libre para uso educativo y están disponibles a través del grupo abierto de Facebook: *Probability Explorer* o a través del link: <https://www.facebook.com/groups/280979438671679/> el cuál es un espacio para socializar temas de enseñanza de la probabilidad.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Biggs, J. B., Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.) *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57 – 76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Drier, H. S. (2000a). The Probability Explorer: A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 22 (3-4), pp. 165-178.
- Drier, H. S. (2000b). Children's meaning-making activity with dynamic multiple representations in a probability microworld. In M. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the twenty-second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2), pp. 691-696. Tucson, AZ.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-19.

- Garfield, J.B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., & Zieffler, A. (2008). Creating a Statistical Reasoning Learning Environment. In Garfield, J.B., & Ben-Zvi, D. (Eds.) *Developing Students' Statistical Reasoning Connecting Research and Teaching Practice*, (3), pp. 45, 63. Springer Netherlands.
- Jaimés, E., & Martínez, J. (2007). *Probability Explorer: Un Socio Cognitivo en la Construcción del Significado de la Ley de los Grandes Números con Estudiantes de Octavo Grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional*. Tesis de especialización en Educación Matemática no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.
- Jaimés, E. (2011). *Niveles de Razonamiento Probabilístico con énfasis en la Noción de Distribución de Estudiantes de Secundaria en Tareas de Experimentación y Simulación Computacional*. Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa no publicada. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav - IPN. México, D. F.
- Pfannkuch, M. & Reading, Ch. (2006). Reasoning about distributions: a complex process. *Statistics Education Research Journal*, 5 (2), pp. 4-9.
- Reátiga, A., 2004. *Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en los niños de sexto grado*. Tesis de especialización en Educación Matemática no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.
- Sánchez, E. (2002), "Teachers Belief About usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts in statics classroom". En B. Philips (ed). Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statics [Conference paper ICOTS 6], International Association for Satatistical Education.
- Watson, J. (2006). Chance – Precursor to Probability. In J. Watson (2006), *Statistical Literacy at School* (pp. 127–185). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Yáñez, G. (2003). *Estudios sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.