

Uso de material manipulativo en clases de matemáticas: una aproximación al trabajo experimental con los hexaminós

*Octavio Augusto Pabón Ramírez**

*Lina María Avirama Gutiérrez***

*Carolina Rodríguez Raigoza****

RESUMEN

Las tendencias recientes en didáctica de las matemáticas otorgan especial atención a las matemáticas experimentales, vinculadas con el resurgimiento del interés por la integración de recursos manipulativos y fundamentalmente por una nueva conceptualización de recurso pedagógico. Nuestra propuesta de taller se estructura a partir de elementos teóricos y metodológicos desarrollados en el marco del proyecto "Caracterización de los vínculos entre los Recursos Pedagógicos y el Conoci-

miento Matemático en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica", que desarrolló el Grupo de Educación Matemática, GEM. (Universidad del Valle – COLCIENCIAS, Contrato 110648925213). Este taller busca que los profesores de matemáticas desarrollen un conocimiento fundamentado de la integración de recursos (en nuestro caso, los hexaminós) en las clases de matemáticas.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, matemáticas experimentales, geometría, hexaminós.

* Universidad del Valle. Dirección electrónica: augpabon@yahoo.com

** Universidad del Valle. Dirección electrónica: linaavirama@gmail.com

*** Universidad del Valle. Dirección electrónica: carolin0617@hotmail.com

PRESENTACIÓN

Los materiales manipulativos tienen una extensa tradición en el ámbito de la Educación Matemática. En efecto, el uso e integración de los mismos en el aula de matemáticas ha tenido momentos de auge y momentos críticos en los que tales materiales prácticamente desaparecieron de las aulas de matemáticas. No obstante, siempre ha sido posible reconocer un interés de investigadores y docentes sobre este asunto, asociado al reconocimiento del rol central de la dimensión experimental de las matemáticas que consideran al aprendizaje de las mismas como un proceso constructivo, lo cual significa aceptar que los alumnos tienen, descubren y adquieren habilidades y conocimientos matemáticos y, que por lo regular, lo hacen en el marco de actividades sociales en las que se proponen tales aprendizajes.

De igual manera, es evidente el interés por la creación de contextos matemáticos significativos y auténticos que se asocien a la posibilidad de que las invenciones y producciones de los alumnos puedan ser relacionadas con las habilidades y los conceptos matemáticos que se espera aprendan y, de esta manera, sean marcos útiles y apropiados para el aprendizaje. Es, por tanto, esencial que los contextos en que se anclan los problemas matemáticos en juego representen la diversidad, la complejidad, la sobre información y ambigüedad de las situaciones problema que los alumnos puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas.

En la perspectiva del trabajo experimental, uno de los contextos de mayor tradición es el asociado al trabajo con materiales y recursos manipulativos. Así, se considera que la manipulación, el trabajo con modelos visuales, esquemas y diagramas, entre otros, podrían ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los alumnos y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimientos de las matemáticas formales, del otro. A los alumnos mismos les conviene tanto como sea posible, jugar un papel central en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas.

MARCO TEÓRICO

La formación y actualización de docentes de matemáticas otorga especial relevancia al trabajo con artefactos en didáctica de las matemáticas, fundamentado a partir del denominado enfoque instrumental¹. De esta manera

¹ De acuerdo con Drijvers y Gravemeijer (2005), la aproximación instrumental para aprender a usar herramientas surge en el marco de los trabajos sobre la ergonomía cognitiva (Rabardel,

se abordan asuntos que incluyen, entre otros: el análisis de artefactos, experiencias de sesiones de trabajo experimental organizadas por los mismos profesores, reflexiones sobre el potencial y utilización didáctica y la gestión didáctica. Entre los asuntos conexos con este interés se destaca la evolución de los artefactos utilizados en las aulas de matemáticas y una transformación/concepción de recurso pedagógico para los profesores en formación, como fundamento del trabajo colaborativo y para la constitución de comunidades de práctica.

Este tipo de experiencias puede contextualizarse a partir de las consideraciones de Bruno D'Amore (2004) quien establece una tipología del campo de la didáctica de las matemáticas y señala que los esfuerzos de integrar materiales en el trabajo en el aula de matemáticas forman parte de la denominada didáctica de tipo A2, es decir, todos los estudios y las ideaciones de instrumentos (concretos o no) que pueden mejorar la enseñanza de las matemáticas. En esta categoría incluye los trabajos clásicos de Dienes, de Castelnuovo y los ambientes inspirados en las ideas de Montessori.

De otra parte, es posible reconocer que un número significativo de investigaciones realizadas en la última década se han centrado en cómo se lleva a cabo la integración de herramientas a la escuela y la influencia de los maestros en este proceso. También se han abordado las dificultades de los profesores para realizar una integración efectiva de las herramientas en la enseñanza de las matemáticas. En relación con este asunto, se destaca el marco teórico propuesto por Artigue (2002), denominado instrumentación.

También se reseña el debate sobre lo que específicamente constituye una herramienta. En relación con este asunto se destacan los aportes de investigadores franceses (por ejemplo, Artigue, 1998, 2002; Lagrange, 1999, Gün y Trouche, 1999, 2002, 2004, 2008; Trouche, 2003, Drijvers, P., Trouche, L. 2008,) quienes apoyados en el marco teórico de la instrumentación han propuesto diversas interpretaciones sobre la dinámica de la integración de las herramientas en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

1995). Las ideas de Vygotsky (1978) de cómo las herramientas median el aprendizaje pueden considerarse como las bases de esta aproximación. En Francia, los investigadores y educadores matemáticos (Artigue 1998, 2002, Gün & Trouche 1999, Lagrange 2000, Trouche 2003,) se han apoyado en la aproximación instrumental para el aprendizaje de las matemáticas usando herramientas informáticas y computacionales.

² D'Amore señala que se puede hipotizar un doble modo de ver a la didáctica de la matemática, a saber: La didáctica A es como la divulgación de las ideas fijando por lo tanto, la atención en la fase de la enseñanza (A mayúscula aquí está por Arte), la didáctica B, como investigación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje. (D'Amore, 2004).

Ahora bien, los investigadores señalan que la investigación histórica muestra claramente, en tiempos y en zonas geográficas dados, la existencia y la diversidad de herramientas utilizadas para el cálculo, como también para otros propósitos que reflejan las necesidades de cálculo de la sociedad en cuestión. Estas herramientas tienen una doble condición, a saber: surgen de la actividad humana y a su vez asisten a la actividad humana. En tal sentido reconocen la existencia de dos invariantes: diversidad y articulación de herramientas y de una evolución hacia prácticas más experimentales. A partir de este reconocimiento formulan algunas preguntas relacionadas con la integración de herramientas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que incluyen entre otras: ¿existen buenos contextos, buenas prácticas de enseñanza y cómo es posible promoverlas? dentro de la perspectiva del laboratorio de matemáticas (Maschietto & Trouche, 2010).

En el marco de referencia señalado anteriormente, estos investigadores proponen una estrategia que contempla la búsqueda de herramientas en la historia de la educación matemática y su estudio desde la perspectiva instrumental, el análisis de la noción de laboratorio de matemáticas, desde un punto de vista histórico, y la discusión de algunas experiencias de formación y cualificación de profesores de matemáticas. Gün y Trouche (2008) introducen igualmente una idea mucho más compleja en relación con los recursos: concebir los recursos pedagógicos como artefactos, que se constituyen en instrumentos dentro de comunidades de práctica emergentes. A partir de esta idea, se propone una reflexión interdisciplinaria sobre el desarrollo de recursos para el docente y se reconoce que una vez estos estén dentro de una comunidad de práctica, se debe dar tiempo a los profesores, para que logren un clima de confianza que permita la adhesión de otros actores.

En consonancia con lo expuesto, nuestra propuesta de taller busca plantear problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en algunos de los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con el estudio de ciertas propiedades geométricas, con el objetivo de crear perspectivas de generalización y modelación. De manera particular proponemos el trabajo con los denominados hexaminós, que en su condición de recursos manipulativos pueden asociarse tanto a la perspectiva experimental como a la perspectiva lúdica. En esta última se incorpora, desde diferentes perspectivas, un trabajo con recursos que se rigen con reglas acordadas previamente pero que tienen un trasfondo matemático claro y preciso.

Debe tenerse en cuenta que el juego en el aula de clase fue propuesto por primera vez por Solomon W. Golomb en 1954, al publicar "Checker Board

and Polyominoes” (tableros de ajedrez y poliminós); asimismo, el término “poliminó”, polígonos construidos al agrupar cuadrados unidos entre sí por uno de sus lados. Ahora bien aunque se suele señalar que pensar en jugar en las clases de matemáticas podría ser motivo de preocupación por la eventual pérdida de formalidad y estructura de la misma, el docente debe hacer un estudio detallado de su potencial, fortalezas y debilidades y así realizar una correcta selección del juego, reconociendo el propósito de integrarlo a las actividades de clase, y el contenido matemático que se mediará en su desarrollo, pues no todos los juegos responden al objetivo de enseñanza y aprendizaje matemático.

En particular, en lo que concierne a los hexaminós, estos involucran elementos geométricos que pueden vincularse a actividades en la clase de matemáticas, en diferentes niveles de escolaridad, constituyéndose en recursos pedagógicos que promueven el aprendizaje de la geometría. Nuestro interés es sobre uno de los tipos de poliminós, a saber, los hexaminós. Estos son la unión de seis (6) cuadrados; en total son treinta y cinco (35) posibles modelos de hexaminós, donde solo once (11) sirven para la construcción de un cubo (figura 1).

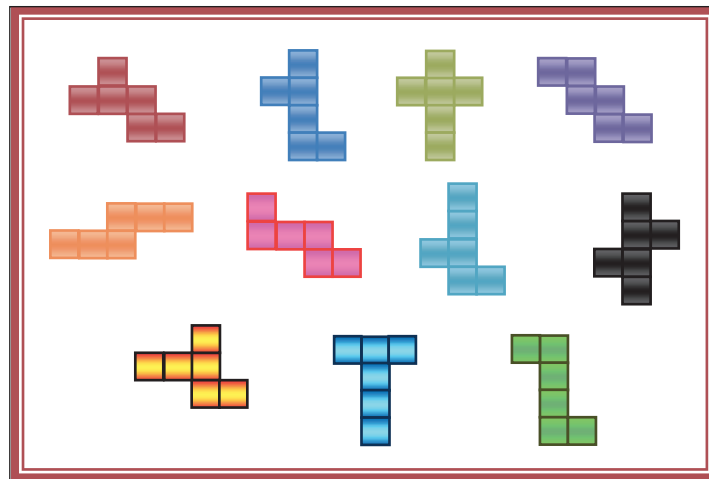


Figura 1. Hexaminós

Al trabajar con hexaminós en las clases de matemáticas en actividades de armado y representación de planos de cubos y su construcción (ensamble) buscamos potenciar y fortalecer el desarrollo de la imaginación espacial y aproximar el conocimiento no tangible de la geometría espacial, con el uso de material manipulativo.

METODOLOGÍA DEL TALLER

La propuesta de taller busca problematizar el rol que cumple una conceptualización de recurso pedagógico, a partir de estudios recientes sobre la naturaleza particular de los mismos y los hallazgos sobre este asunto en las aulas de clase. El taller estará planeado en dos (2) partes o sesiones. En la primera se plantean nuestras motivaciones, expectativas y creencias sobre los recursos pedagógicos y su integración a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el campo de la geometría escolar.

En la segunda sesión se plantean elementos teóricos y metodológicos para el uso e integración de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas, a partir del trabajo experimental y lúdico con los hexaminós y se presentarán usos clásicos de los hexaminós en las clases de geometría y variaciones recientes desde la perspectiva del trabajo en Laboratorios de matemáticas y en clubes de matemáticas. Así en desarrollo de este proceso, esperamos que se generen espacios de discusión y se elaboran las conclusiones finales del taller.

Nivel al que va dirigido: Nivel medio. Profesores de Educación Básica, estudiantes de la Licenciatura en Educación en Matemáticas.

Tiempo: La duración del taller será de noventa (90) minutos, dividida en dos sesiones de 45 minutos.

Materiales: Los siguientes materiales se necesitan, por cada participante:

- Un octavo de cartón paja
- Regla
- Un lápiz
- Tijeras y bisturí
- Cinta pegante
- Pegante sintético
- 5 bisagras pequeñas
- Palos de pinchos (chorizos)
- Aguja capotera
- Lana

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In D.Tinsley & D.C.Johnson (eds), *Information and Communication Technologies in School Mathematics* (pp. 121–130), Chapman & Hall, London.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, pp. 245–274.
- D'Amore, B. (2004) *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Drijvers, P.; Gravemeijer, K. (2005) Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In D. Guin., K. Ruthven and L. Trouche (Eds). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Chapter 7, pp. 163-196, Springer.
- Drijvers, P.; Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 363-392), Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives.
- Golomb S. (1954) "Checkerboards and polyominoes", *Amer. Math. Monthly*61 (Dec. 1954), pp. 672–682
- Guin, D.; Trouche L. (1999), The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3 (3), pp. 195-227
- Guin, D. ; Trouche, L. (eds.) (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Guin, D; Ruthven, K; Trouche, L. (eds.) (2004) *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (contributions of M. Artigue, P. Drijvers, P. Elbaz-Vincent, J.B. Lagrange, M. Kendal, R. Pierce & K. Stacey), Springer.
- Guin, D. ; Joab, M. & Trouche, L. (2008), *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*, INRP et IREM (Université Montpellier 2)
- Lagrange, J.B. (1999) Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4(1) pp. 51-81.
- Lagrange, J.B (2000) *L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques*. Ed. Stud. in Math. 6(2): 143-165.

- Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42 (1), 33–47.
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies -approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.
- Trouche, L. (2003). Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment: Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations. Communication presented at CAME 3: Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction. Reims, France, June 2003.
- Vygotsky, L.S. (1978) *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.