Relato de Experiência

Número de diagonais de um polígono: Relato de uma Experiência

Marcelo Dias Pereira[12]

Resumo: O número de diagonais de um polígono é um dos conteúdos relacionados do eixo Números e Operações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, anos finais. Este relato de experiência, apesar de abordar uma atividade realizada em um Curso de Pedagogia, apresenta uma possibilidade para a contagem das diagonais de um polígono, proposta por alunos daquele curso, que pode servir como estímulo para levar um aluno, inclusive da Educação Básica, a generalizar esse conteúdo por meio de uma expressão equivalente à expressão que, geralmente, é conhecida. Ao mesmo tempo, convida o leitor a refletir sobre a prática docente,frente a uma aula em que os alunos são solicitados a construir estratégias para a resolução de atividades cujo objetivo não é a simples aplicação ou fixação de fórmulas.

Introdução

Trabalhando desde 1998 com a formação inicial de professores de Matemática, no início de 2009, pela primeira vez e a convite da gestora do Curso de Pedagogia da Universidade em que leciono, assumi as aulas de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática daquela graduação. Até então, minha experiência como formador de professores no ensino superior estava restrita ao curso de Licenciatura em Matemática.

Ao trazer para as aulas do curso de Pedagogia as práticas que há alguns anos utilizo na formação de professores especialistas em Matemática, vivenciei algo que me chamou atenção e que compartilho neste relato, cujo objetivo é apresentar uma expressão equivalente à expressão $\frac{(n-3).n}{2}$ para calcular o número de diagonais em um polígono,

[12]Universidade Municipal de São Caetano do Sul
marcelo.pereira@uscs.edu.br
marcelodpereira@gmail.com

proposta no ano de 2010, por então futuros pedagogos terceiranistas de uma Universidade Municipal no Estado de São Paulo, e que pode contribuir para o ensino desse conteúdo na Educação Básica.

Além desse, é também objetivo do texto convidar o leitor a refletir sobre a prática docente em sala de aula quando se propõem atividades em que os alunos são solicitados a construir estratégias para obter algumas respostas, o que leva o professor a lidar com situações, muitas vezes, inesperadas, mas que podem contribuir para abordar conceitos e conteúdos indiretamente relacionados ao assunto em que se está trabalhando. Porém, antes de iniciar este relato, apresento o que, a grosso modo, entendo como aprendizagem em Matemática e como ela pode ocorrer.

D'Amore (2005) defende que a aprendizagem em Matemática não se constitui apenas na aquisição de conceitos, mas sim no saber fazer, que engloba, também, a aprendizagem de estratégias (como o saber resolver e o saber demonstrar) e a aprendizagem algorítmica (como o saber calcular e o saber operar). Dessa forma, entendo a aprendizagem em Matemática como a construção do conhecimento pelo aluno e mediado pelo professor, por meio de atividades que exploram a comparação, a dedução, a generalização (quando possível), entre outras.Tais atividades, que exigem, na maioria das vezes, a combinação de conhecimentos e a decisão pela melhor maneira de utilizá-los em busca de soluções de problemas, são denominadas por Diniz (2001) como situações-problema.

Não é objetivo, neste relato, abordar os conceitos e as classificações dos problemas em Matemática, mas cabe ressaltar que a resolução de problemas, não como simples aplicação da aprendizagem por meio da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas, mas como desenvolvimento de estratégias para resolver situações desafiadoras, é indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais como o "[...] ponto de partida da atividade matemática" (BRASIL, 1998, p.39). Por outro lado, Onuchic (2008) enfatiza que, além de ponto de partida, um problema é também "[...] orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução". Essa autora também destaca que a resolução de problemas é um trabalho que deve ser realizado por professor e alunos, de modo colaborativo.

Utilizando o entendimento sobre a aprendizagem em Matemática apresentado acima como pano de fundo em minhas práticas de aula, no segundo semestre de 2010, após abordar, em aulas anteriores, alguns conceitos da Geometria Plana, propus que os alunos do 3º ano do Curso de Pedagogia tentassem generalizar o número de diagonais em polígonos convexos, por meio de uma atividade de construção e contagem das diagonais de vários desses polígonos.

Nada havia sido comentado nas aulas anteriores sobre o assunto que seria abordado naquela aula, pois um dos meus objetivos era identificar os conhecimentos que os alunos traziam a respeito do número de diagonais, em polígonos.

Ao iniciar a aula, foram entregues aos estudantes folhas com representações de triângulos, de quadriláteros, de pentágonos, e assim por diante, até decágonos, todos convexos, os quais, em minha opinião, são mais acessíveis à construção, à visualização e à contagem das diagonais, quando possuem.

Ao todo, estavam representados 21 polígonos: 3 triângulos (um retângulo, outro acutângulo e outro obtusângulo), 6 quadriláteros (dentre eles, um retângulo, um quadrado, um losango, um paralelogramo[13] e um trapézio), 2 pentágonos, 2 hexágonos, 2 octógonos, 2 eneágonos, 2 decágonos (sempre um regular e um não regular) e 2 heptágonos.

Após solicitar aos alunos que formassem grupos de, no máximo, 5 integrantes, as únicas instruções colocadas na lousa foram:

> *Os polígonos representados nas folhas são convexos, conforme já estudamos.*
>
> *(1)Com o auxílio de uma régua, construir e contar todas as diagonais desses polígonos. Iniciar pelos triângulos, depois passar para os quadriláteros, para os pentágonos e assim por diante, em ordem crescente de número de lados. Registrar as conclusões sobre os números de diagonais de todos os triângulos, de todos os quadriláteros, de todos os pentágonos, até chegar aos decágonos.*
>
> *(2) Conferir as conclusões quanto aos números de diagonais com os demais grupos.*
>
> *(3) Responder as questões:*
>
> *I) Quantas diagonais existem em um dodecágono convexo?*
>
> *II) Quantas diagonais existem em um icoságono convexo?*
>
> *III) Quantas diagonais existem em um polígono convexo com n lados?*

Os objetivos das atividades relacionadas ao item (1) eram:

(a) identificar se os alunos haviam compreendido a definição de diagonais em polígonos (na aula anterior tínhamos visto

[13]Nomes relacionados às figuras e não à classificação dos quadriláteros.

que as diagonais dos polígonos eram os segmentos de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos do polígono);

(b) levar os alunos a concluírem que o número de diagonais, em polígonos com a mesma quantidade de lados, é sempre o mesmo.

(c) fazer com que os alunos obtivessem, por traçados, contagens e comparações, o número de diagonais de polígonos convexos, até 10 lados.

Já o objetivo da atividade relacionada ao item (2) era o de, apenas, levar os alunos a constatarem se as conclusões obtidas no item (1) estavam de acordo com as dos demais grupos.

Quanto às atividades relacionadas ao item (3), seus objetivos eram identificar:

(d) se os alunos, através das atividades relacionadas ao item (1), encontrariam uma regularidade para calcular o número de diagonais e, assim, responder as perguntas (I) e (II);

(e) se os alunos generalizariam o número de diagonais em um polígono.

Observando os nove grupos formados, pude perceber que a interação entre os estudantes propiciou a troca de informações e, dessa forma, alguns alunos que não haviam compreendido a definição de diagonais em polígonos, da aula anterior, passaram a compreendê-la.

Quanto aos objetivos (c) e (b), observei que todos os grupos chegaram aos números corretos de diagonais e todos concluíram que, em polígonos com a mesma quantidade de lados, esse número é sempre o mesmo. A maioria dos grupos construiu todas as diagonais de todos os exemplares de polígonos para chegar a essa conclusão e aos números corretos. Apenas três grupos não o fizeram.

Questionados sobre como responderam ao item (1), um desses três grupos, que chamarei de α, respondeu que utilizaram a expressão $\frac{(n-3).n}{2}$ obtida através de um notebook com conexão à internet que um dos seus componentes estava utilizando. Quanto aos outros dois, que estavam um ao lado do outro e os chamarei de β e γ, justificaram as respostas dizendo que se os polígonos têm o mesmo número de lados, então têm o mesmo número de diagonais.

Ao observar as estratégias utilizadas pelos grupos para responder à questão (I), identifiquei que três, dos nove grupos, construíram um dodecágono convexo e traçaram suas diagonais, para contá-las; quatro grupos utilizaram a expressão $\frac{(n-3).n}{2}$ obtida via internet pelo grupo α; e dois (o β e o γ), resolveram, não diretamente pela expressão $\frac{(n-3).n}{2}$

mas da seguinte forma: multiplicaram 12 por 9 e dividiram o resultado por 2, porém, não haviam desenhado o dodecágono para contar as 9 diagonais possíveis, por vértice. Questionados por que $12 \times 9 \div 2$, eles responderam que o 12 correspondia aos 12 vértices em um dodecágono, o 9 porque eram 9 diagonais por vértice e o 2 porque observaram que multiplicando 12 por 9, as diagonais eram contadas duas vezes.

Não satisfeito, perguntei: por que 9 diagonais cada vértice? A resposta foi porque com os 12 vértices, não há como contar 3 segmentos como diagonal: aquele com uma extremidade no vértice da frente, outro com uma extremidade no vértice de trás (referindo-se aos vértices consecutivos) e o outro com extremidade nele mesmo (referindo-se que não havia como construir um segmento de reta tendo um único ponto como extremidades).

Com relação à questão (II), percebendo o trabalho que daria para construir e contar todas as diagonais de um icoságono, sete grupos utilizaram a expressão $\frac{(n-3).n}{2}$ obtida na internet pelo grupo α. Dessa forma, o objetivo (d) não foi atingido pela maioria dos alunos e o objetivo (e) já não fazia mais sentido para esses sete grupos.

Dentre os encaminhamentos apresentados, chamou-me atenção a forma como os grupos β e γ (os únicos que não aproveitaram a expressão da internet) responderam à questão (II), pois utilizaram um procedimento diferente do que haviam utilizado na questão anterior. Eles responderam corretamente170 diagonais, mas chegaram a esse resultado da seguinte maneira:

17+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7 +6+5+4+3+2+1 = 170

Curioso para entender tal resolução, pois até então, aluno algum havia apresentado algo parecido, questionei aqueles grupos sobre o porquê daquela resolução.

Em resposta, eles afirmaram ter "descoberto", pelos casos anteriores, um procedimento que fornecia o mesmo resultado quando utilizada a fórmula que o grupo α havia conseguido na internet: para o quadrilátero, fizeram a operação 1+1 = 2, pois sendo 4 vértices (A, B, C e D), pelo vértice A pode-se construir apenas uma diagonal, pelo vértice B, pode-se construir apenas outra, pelos vértices C e D, podem-se construir apenas uma diagonal para cada vértice, porém elas já foram contadas. Sendo assim, tem-se 1+1 = 2 diagonais.

E continuaram: para o heptágono com vértices A, B, C, D, E, F e G, pelo vértice A pode-se construir 4 diagonais;

pelo vértice B, também 4 diagonais; pelo vértice C, pode-se construir 4 diagonais, mais uma delas já foi contada; pelo vértice D, também 4 diagonais, mas duas já foram contadas; pelo vértice E, das 4 diagonais possíveis, três já foram contadas; pelos vértices F e G, todas as diagonais já foram contadas. Dessa forma, tem-se $4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14$ diagonais.

Eles forneceram a mesma explicação para o decágono, ao contarem 35 diagonais como $7 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 35$.

O procedimento apresentado foi entendido pelos demais colegas que, rapidamente, foram conferi-lo com o número de diagonais dos pentágonos, dos hexágonos, dos octógonos e dos eneágonos, conforme eu solicitara. Dessa forma, apenas os grupos β e γ atingiram o objetivo (d), mas não conseguiram generalizar esse procedimento.

Sendo assim, assumi, então, essa tarefa e, juntamente com os alunos da sala, chegamos à expressão: $2.(n-3)+(n-4)+(n-5)+...+2+1$ Em que n representa o número de lados de um polígono.

Restava-me agora, a responsabilidade de mostrar para os alunos do 3º ano do Curso de Pedagogia, porque que a generalização encontrada a partir da ideia dos grupos β e γ e a expressão que fora obtida da internet, geravam o mesmo número; tarefa que foi cumprida em outra aula, pelo avançar das horas e, também, por eu não ter uma resposta previamente esboçada.

Passados alguns dias, mostrei que as duas expressões, na verdade, constituíam formas diferentes que eram utilizadas para expressar a mesma ideia. Antes, porém, abordei como obter uma generalização da soma N dos n primeiros números naturais positivos. Para isso, utilizei alguns exemplos até que os alunos chegassem, intuitivamente, à conclusão de que o valor de N não se modifica ao escrevermos as parcelas de maneira desordenada ou, ainda, nas ordens crescente ou decrescente. Tivemos, então, a oportunidade de abordar a justificativa para tal fato: as propriedades comutativa e associativa da adição. A partir dessa conclusão, generalizei N na ordem crescente e decrescente de parcelas e adicionei as duas formas:

$$N = 1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1) + n$$
$$N = n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1$$

Somando-se termo a termo essas duas formas e representando-se as somas das finitas parcelas iguais por produtos, tem-se que $2N = (n+1).n$ e, dessa forma, chega-se a $N = \frac{(n+1).n}{2}$.

A seguir, de maneira mais resumida da que fora utilizada em sala de aula, eu compartilho uma explicação para a validade da expressão proposta pelos grupos β e γ.

Tomemos a expressão:

$$2.(n-3)+(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1$$

Com n natural positivo.

Se adicionarmos a ela a expressão

$$-(n+(n-1)+(n-2))+(n+(n-1)+(n-2))$$

estaremos adicionando zero e, consequentemente, seu valor não se altera. Teremos, assim:

$$(n-3)-(n+(n-1)+(n-2))+n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1$$

Mas,

$$n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1$$

corresponde à soma dos n primeiros números naturais positivos e, portanto, pode ser representada por $\frac{(n+1).n}{2}$.

Sendo assim, teremos:

$$(n-3)-(n+(n-1)+(n-2))+\frac{(n+1).n}{2}$$

Reduzindo os termos semelhantes e escrevendo as parcelas com um mesmo denominador, podemos chegar em:

$$\frac{-4n}{2}+\frac{(n+1).n}{2}$$

Colocando n em evidência e reduzindo, novamente, os termos semelhantes, teremos:

$\frac{(n-3).n}{2}$ ou seja,

$$2.(n-3)+(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1=\frac{(n-3).n}{2}$$

para qualquer valor de n, natural positivo.

Considerações finais

Mais que uma metodologia para o ensino de Matemática, Onuchic (2008) defende que a resolução de problemas é uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação e Diniz (2001) destaca que ela corresponde a um modo de organização do ensino que inclui, além de aspectos metodológicos, uma postura do significado de ensino e de aprendizagem. Nessas perspectivas, entendo que as situações-problema têm papel relevante para a aprendizagem em Matemática.

Dessa forma, na construção dessas atividades, alguns fatores precisam ser considerados, como, por exemplo, a possibilidade de os alunos aplicarem conhecimentos provenientes de sua própria experiência, a interação entre os alunos para a discussão dos procedimentos utilizados ou dos possíveis erros cometidos e a possibilidade da utilização de tecnologias.

Cada um desses e de outros fatores requererá do professor uma reflexão durante a ação desenvolvida na sala de aula, e até mesmo após essa ação, o que contribuirá, também, para a aprendizagem do professor.

Particularmente nesse caso relatado, mesmo com a interferência da internet, o que confesso não ter sido considerado no planejamento, avalio que a atividade foi proveitosa. Essa interferência pôde, talvez, ter estimulado a maioria dos alunos a utilizar um caminho mais rápido para a solução das questões propostas, o que contribuiu para que eles não atingissem alguns objetivos traçados. Porém, mesmo com a expressão obtida através internet, novos conteúdos foram abordados (como as propriedades comutativa e associativa da adição e a soma dos *n* primeiros números naturais) dada a criação, pelos próprios colegas daqueles alunos, de situações que não estavam previstas no meu plano de aula.

Além disso, a proposta da atividade também contribuiu para a minha aprendizagem, pois fui "convidado" a encontrar uma explicação para justificar duas formas diferentes de generalizar o mesmo número de diagonais em um polígono.

Bibliografia

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DINIZ, Maria Ignez. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa.Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 1., 2008, Rio Claro. **Anais eletrônicos**... Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em: 15 de junho de 2012.

Professor(a),

Publique conosco suas experiências e socialize com colegas no Brasil e exterior suas conquistas em sala de aula!
Saiba mais em:
http://www.sbembrasil.org.br

XI ENEM
Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013
Sociedade Brasileira de Educação Matemática
25 anos

Regionais da Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Diretoria Regional do Acre
Diretor Regional: Regina Célia da Costa Amaral
E-mail: reginaccamaral@hotmail.com

Diretoria Regional do Alagoas
Diretor Regional: Lucia Cristina S. Monteiro
E-mail: lchristina.monteiro@gmail.com

Diretoria Regional do Amazonas
Diretor Regional: Maria Auxiliadora. B. Moreira
E-mail: auxiliadora@esbam.edu.br

Diretoria Regional da Bahia
Diretor Regional: Irene Maurício Cazorla
E-mail: icazorla@uol.com.br
Página: http://www.sbemba.com.br

Diretoria Regional do Ceará
Diretor Regional: Maria Gilvanise de Oliveira Pontes
E-mail: gilvanisepontes@hotmail.com

Diretoria Regional do Distrito Federal
Diretor Regional: Mauro Luiz Rabelo
Página: http://www.sbemdf.com/
E-mail: rabelo@unb.br

Diretoria Regional do Espírito Santo
Diretor Regional: Sandra Aparecida Fraga da Silva
E-mail: sandrafraga7@gmail.com
Página: http://www.ufes.br/~sbemes

Diretoria Regional de Goiás
Diretor Regional: Wellington Lima Cedro
E-mail: wcedro@yahoo.com.br
Página: http://www.sbem-go.com.br

Diretoria Regional de Minas Gerais
Diretor Regional: Amarildo Mechíades da Silva
E-mail: amarildo.melchiades@ufjf.edu.br

Diretoria Regional do Mato Grosso
Diretor Regional: Josimar de Souza
E-mail: contato@irio.pro.br

Diretoria Regional do Mato Grosso do Sul
Diretor Regional: Irio Valdir Kichow
E-mail: iriokichow@ibest.com.br
Página: http://www.sbem-ms.com.br

Diretoria Regional do Pará
Diretor Regional: Lúcia Rocha
E-mail: sbempa@unama.br
Página: http://www.sbempa.mat.br

Diretoria Regional da Paraíba
Diretor Regional: Abigail Fregni Lins
E-mail: bibilins2000@yahoo.co.uk
Página: http://www.sbempb.com.br

Diretoria Regional do Paraná
Diretor Regional: Dionísio Burak
E-mail: sbempr@yahoo.com.br

Diretoria Regional do Rio de Janeiro
Diretor Regional: Mônica C. F. Mandarino
E-mail: sbem@sbemrj.com.br
Página: http://www.sbemrj.com.br

Diretoria Regional do Rio Grande do Norte
Diretor Regional: Liliane dos Santos Gutierre
E-mail: sbemregionalrn@yahoo.com.br

Diretoria Regional do Rio Grande do Sul
Diretor Regional: Maurício Rosa
E-mail: sbem.rs@terra.com.br

Diretoria Regional de Rondônia
Diretor Regional: Marlos G. Albuquerque
E-mail: professormarlos@hotmail.com
Página: http://www.unir.br/~unirjiparana

Diretoria Regional de Santa Catarina
Diretor Regional: Vilmar José Zermiani
E-mail: sbemsc@gmail.com

Diretoria Regional de São Paulo
Diretor Regional: Nelson Antonio Pirola
E-mail: sbem@sbempaulista.org.br

Diretoria Regional de Sergipe
Diretor Regional: Ivanete Batista dos Santos
E-mail: sbemse@ufs.br

Diretoria Regional do Tocantins
Diretor Regional: Willian Vieira de Oliveira
E-mail: w.vieira.oliveira@bol.com.br