Problemas

CONSTRUINDO MATRIZES "MÁGICAS"

Rogério César dos Santos[1]

Resumo: O texto aborda alguns entretenimentos que podem ser realizados com matrizes, fazendo articulação com progressão aritmética. A proposta é fornecer ao professor do Ensino Médio um material de apoio que, além de mostrar ao aluno a interdisciplinaridade entre matrizes e progressões, incita-o a descobrir a matemática que está por trás das brincadeiras. Serão apresentadas duas formas de construção de matrizes mágicas. A primeira inclui as operações com progressão aritmética e generaliza o trabalho de Filho (2006). A segunda utiliza apenas o raciocínio lógico aritmético.

Palavras-chave: Matrizes; progressão aritmética; Ensino Médio.

Filho (2006) esclareceu a seguinte curiosidade matemática: escolhendo-se quaisquer 6 números da matriz abaixo, de linhas e colunas distintas, a soma deles será sempre 111:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Exemplo: 13 + 26 + 9 + 4 + 23 + 36 = 111. Por que funciona? É um interessante problema que pode despertar a curiosidade de nossos alunos, incitando-os a desvendar o segredo por meio da matemática. Apresento, neste artigo, duas formas de construir matrizes mágicas, de maneira rápida, sendo que a primeira delas é uma generalização da matriz dada acima. O porquê de elas funcionarem constitui uma interessante aplicação da matemática.

Primeira forma

Esta primeira forma é semelhante a que foi mencionada acima. Mas não é necessário que dê 111. A matriz é construída em uma espécie de jogo entre o desafiante e o desafiado. O jogador desafiante pede para que o jogador desafiado escolha o valor resultante da soma e também o tamanho, ou a ordem, da matriz. O jogador desafiante, em segundos, constrói a matriz!

Exemplo: suponha que o jogador desafiado escolha o valor 87 para a soma e determine também que a matriz seja 4 por 4. O jogador desafiante, em segundos, e **"de cabeça"**, constrói a matriz seguinte, dentre outras possíveis.

[1] *UnB – FUP / professorrogeriocesar@gmail.com*
rogerc@unb.br

22	24	23	25
14	16	15	17
18	20	19	21
27	29	28	30

Tabela 2: a matriz construída pelo jogador desafiante

O jogador desafiado poderá, então, escolher quaisquer quatro números de linhas e colunas distintas. O fato é que a soma será sempre 87, o valor que ele mesmo escolheu. Exemplo: 18 + 29 + 23 + 17 = 87.

Observe que, na matriz, o menor número que lá aparece é o 14. Depois, aparecem os seguintes: 15, 16, 17, até o 30, exceto o 26, e o porquê desta exceção será explicado mais adiante.

Vamos explicar agora como foi construída a matriz. Denotemos por n a ordem da matriz, por x o seu menor elemento, e por S a soma dos n elementos escolhidos de linhas e colunas distintas.

Uma matriz n por n possui n^2 elementos. Os elementos da matriz formarão uma Progressão Aritmética (P.A) de razão 1, cujo primeiro elemento é x. Poderá haver exceções, como foi o caso do número 26 deste exemplo, e isto será explicado posteriormente. O segundo elemento será $x + 1$, o terceiro $x + 2$, até o último $x + (n^2 - 1)$, totalizando n^2 elementos. Imagine que vamos pegar somente n elementos de linhas e colunas distintas, e somá-los. No exemplo acima, observe que existem quatro maneiras de escolhermos quatro elementos de linhas e colunas diferentes, sem que haja coincidências de elementos entre as escolhas. Em geral, existem n formas de fazermos essa escolha **sem repetir elementos**. Logo, a soma S dos n elementos escolhidos será a divisão entre a soma de todos os elementos da matriz e o valor n. A soma dos n^2 termos da P.A., cujo primeiro termo é igual a x e último termo é igual a $x + (n^2 - 1)$, é

$(x + [x + (n^2 - 1)]) \times n^2 / 2$, de modo que a soma S dos n elementos escolhidos pelo jogador desafiado será

$S = [(x + [x + (n^2 - 1)]) \times n^2 / 2] / n = (2xn + n^3 - n) / 2 = xn + (n^3 - n) / 2.$

Logo, $x = \{ S - [(n^3 - n) / 2]\} / n$. Esta não é uma fórmula extensa e pode ser facilmente lembrada na hora de se realizar o jogo.

No exemplo anterior, temos $n = 4$ e $S = 87$.

Então, $x = (S - 30) / 4 = (87 - 30) / 4 = 57 / 4 = 14 + (1/4)$. Porém, é conveniente que seja evitada a parte decimal ¼. Em vez de se começar preenchendo com 14 + (1/4), começa-se com 14 e, após preenchida toda a matriz com os demais termos da P.A. 15, 16, 17, 18, ..., 29, escolhe-se uma das linhas (no exemplo, a última) para somar 1 a seus elementos. Por ter sido ignorado ¼ de todos os números, cada coluna teria 4 × (1/4) = 1 de déficit, por isso é preciso somar este 1 a um único elemento de cada coluna para compensar. No caso, foi escolhida a última linha e, por isso, o 26 acabou sendo excluído e o 30 foi acrescentado à matriz.

O jogador desafiante começou com o 14 na segunda linha, primeira coluna; depois o 15 na terceira coluna, o 16 na segunda coluna e o 17 na quarta coluna, todos nesta mesma segunda linha. Daí, foi para a terceira linha, seguindo a mesma ordem das colunas: primeira, terceira, segunda e quarta colunas, respectivamente. Depois para a primeira linha e, por último, para a quarta linha. Ele poderia começar com o 14 em qualquer lugar da matriz e também seguir qualquer ordenação das colunas, ordenação esta que deve ser a mesma para todas as linhas. É importante que ele termine de preencher a linha atual antes de ir para outra linha.

Em geral, quando o valor de $x = \{ S - [(n^3 - n) / 2]\} / n$ não for inteiro, certamente será da forma

A + (B/n), em que *A* e *B* são inteiros e *B/n* é a parte decimal de *x*. Nesses casos, começa-se a preencher a matriz com o valor *A* e, ao final, sabendo-se que cada coluna possui ainda $n \times B/n = B$ de déficit, escolhe-se alguma linha para somar *B* em seus elementos, eliminando essa falta nas colunas. Por exemplo, na situação anterior, se a parte decimal de x fosse ¾, cada coluna ficaria com um déficit de $4 \times (3/4) = 3$. Logo, seria preciso somar 3 unidades a cada elemento de alguma linha para compensar.

Outro exemplo: $S = 15$ e $n = 3$. Então, $x = (S - 12) / 3 = (15 - 12) / 3 = 1$. Comecemos então com $x = 1$ na terceira linha, segunda coluna, depois, $x = 2$ na terceira coluna e $x = 3$ na primeira coluna. Depois continuamos na primeira linha, seguindo a mesma ordem das colunas. Em seguida para a segunda linha. Como *x* é inteiro, não precisaremos somar nenhum valor em nenhuma linha. A matriz fica assim:

6	4	5
9	7	8
3	1	2

Tabela 3: a matriz mágica cujo número mágico é 15. Exemplo: 9 + 1 + 5 = 15; ou 6 + 7 + 2 = 15.

Cabe aqui a seguinte observação: para cada escolha de *n*, deve-se ter o cuidado de *x* não ser negativo, ou seja, $\{S - [(n^3 - n) / 2]\}/ n$ deve ser maior do que zero, ou ainda, o valor escolhido para a soma *S* deve ser maior do que $(n^3 - n) / 2$. Assim, o valor de *S* deve ser maior do que 12 no caso de $n = 3$, maior do que 30 no caso de $n = 4$, maior do que 60 no caso de $n = 5$, e assim por diante.

Segunda forma

Esta segunda forma é completamente diferente da anterior, porém mais fácil e rápida de ser construída. Segundo Gardner (1967), o jogador desafiante deve pedir para que o jogador desafiado escolha a soma pretendida *S* e a ordem da matriz *n*. Por exemplo, se ele escolher $n = 5$ e $S = 117$, então o desafiante, rapidamente, poderá produzirá a seguinte matriz, dentre outras escolhas possíveis:

12	0	27	10	10
42	30	57	40	40
26	14	41	24	24
22	10	37	20	20
16	4	31	14	14

Tabela 4: a matriz cujo número mágico é 117

Escolhendo-se quaisquer 5 números de linhas e colunas distintas, a soma dará 117. Exemplo: 42 + 4 + 27 + 20 + 24 = 117. Perceba que esta matriz não tem a mesma lógica interna das anteriores. Então, como ela foi formada de maneira tão rápida?

Primeiro, o jogador desafiante escolheu uma linha e uma coluna para distribuir as 117 unidades, de tal forma que o elemento intersecção seja o zero. Nesse exemplo, foram escolhidas a primeira linha e a segunda coluna, de forma que o elemento da primeira linha e da segunda coluna seja 0.

Então, o jogador desafiante distribuiu 117 unidades nos demais elementos desta primeira linha e desta segunda coluna: 12 + 27 + 10 + 10 = 59 na primeira linha, e 30 + 14 + 10 + 4 = 58 na segunda coluna, totalizando 117. Esta distribuição não é única.

Cada elemento que restou preencher nas demais linhas e colunas é a soma dos dois respectivos elementos daquela primeira linha e daquela segunda coluna, conforme ilustrado a seguir:

Tabela 5: explicação da matriz em sua segunda forma

12	0	27	10	10
12+30	30	27+30	10+30	10+30
12+14	14	27+14	10+14	10+14
12+10	10	27+10	10+10	10+10
12+4	4	27+4	10+4	10+4

Então, o jogador desafiado pode escolher cinco números de linhas e colunas distintas e somá-los, que está garantido que todos os números da primeira linha e todos os da segunda coluna serão somados. Assim, a soma tem de dar 117. Na escolha feita acima:

(12+30) + (0+4) + (27+0) + (10+10) + (10+14) = 42 + 4 + 27 + 20 + 24 = 117. Como o elemento da primeira linha e segunda coluna será somado duas vezes, ele deve ser o zero, a fim de não aumentar o resultado final 117.

Este segundo modo pode incitar no jogador desafiado a vontade de descobrir como e por quais cálculos matemáticos a matriz é construída pelo jogador desafiante. A curiosidade e o entretenimento que a matemática proporciona podem ser fatores que a aproximam do estudante.

Considerações Finais

Aplicando essas atividades em minhas turmas, observei que a maioria dos ouvintes acaba descobrindo alguma lógica na primeira forma, mas jamais vi alguém descobrir a lógica da segunda forma. Os alunos em geral se mostraram animados em aplicar as atividades aqui apresentadas aos seus colegas e familiares, o que mostra que a atividade realmente pode despertar o interesse do educando pela aprendizagem e a investigação matemática. A primeira atividade principalmente, por trabalhar o assunto das P. As em jogos de entretenimento, pode levar o estudante a se aproximar da Matemática, fazendo-o se interessar cada vez mais pelo seu estudo.

Referências Bibliográficas

FILHO, A. A. D. *Revista do professor de matemática*. São Paulo: SBM, n. 59: 2006. p. 60

GARDNER, M. *Divertimentos matemáticos*. 2ª Ed. São Paulo: IBRASA, 1967.