

Límite de funciones y sistemas de representación. Estudio comparativo de textos escolares

*Yuly Maribel Pantoja Portillo**
*Luis Felipe Martínez Patiño***

RESUMEN

Este trabajo es de carácter semiótico estructural, es decir, se analiza cómo conviven los sistemas de representación en la manera como los textos escolares presentan el concepto de límite; se toman para este análisis dos aspectos principales que son: el aspecto semiótico y el curricular. Se pretende que los participantes en el taller discriminen las representacio-

nes que usan los libros al introducir el concepto de límite. Adicionalmente los participantes deberán identificar los estándares que se movilizan en este contenido. Los ejemplos a analizar serán tomados de manuales de matemáticas de grado once. Por último se realizará la codificación y validación la información obtenida.

^{Universidad} de Nariño. Dirección electrónica: yuly-david@hotmail.com
^{Leidy} Marcela Gómez Melo, Universidad de Nariño, lmargegom@gmail.com
^{**} Universidad de Nariño. Dirección electrónica: lufemapa@hotmail.com

PRESENTACIÓN

El concepto de límite ocupa una posición central en el cálculo, pues, por un lado, es un concepto básico sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral. Por otro lado, debido a su carácter instrumental, es usado como herramienta tanto en la solución de problemas matemáticos como de otras ciencias. En un sentido distinto, los primeros acercamientos a la noción de límite en el aula se realizan por medio de representaciones, es a partir de estas que se introducen y construyen los conceptos matemáticos. Generalmente, la noción de límite es abordada en principio desde la representación numérica, para luego pasar a la representación gráfica. Pero, una y otra tienden a ser utilizadas de manera limitada (Medina, 2001); en consecuencia, este tipo de representaciones no se considera como apoyo en los procesos algebraicos. Es aquí donde aparecen las dificultades en el aprendizaje del límite, pues los estudiantes usualmente aplican algoritmos sin comprender verdaderamente su significado; esto se ve reflejado en las concepciones erróneas que se adquieren (Medina, 2001), las cuales se manifiestan cuando se enfrentan a la resolución de problemas en los que se hace necesaria la aplicación del límite.

Muy a menudo, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas se definen en términos de los tipos de problemas que los estudiantes sean capaces de resolver, o de las habilidades y conceptos que tengan. Sin embargo, estas formulaciones de los objetivos de aprendizaje tienden a limitar la visión de la educación matemática. La razón de esto es que tales objetivos no incorporan capacidades para nuevas construcciones espontáneas, para la síntesis de nuevas estrategias cuando sea necesario al enfrentarse a situaciones desconocidas, o para actos matemáticos creativos. Una de las principales razones de nuestro énfasis en los sistemas externos de representación es que proporcionan un medio para caracterizar los resultados del aprendizaje de una manera más valiosa.

Por otra parte, en relación con los textos escolares, estos son, de un lado, los materiales didácticos de mayor uso por parte de educadores, al preparar e implementar sus clases de matemáticas, y por los estudiantes en sus intentos por comprender las matemáticas enseñadas (Pepin et al. (2001), citados por Marmolejo, González, 2011) y, de otro lado, al considerarse de parte de la comunidad educativa que "... la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto (Shubring, 1987); en este taller se considera que estos materiales didácticos son una potente herramienta para reflexionar sobre los elementos que caracterizan la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas.

Por todo lo anterior, pretendemos que los docentes que participen en el taller discriminen las representaciones que usan los libros al introducir el concepto de límite. La atención recaerá en los ejemplos que se plantean en estos materiales, pues es aquí en donde se evidencia la intencionalidad que tiene el autor al introducir las temáticas correspondientes a este tema y donde aparece un contraste significativo de las representaciones utilizadas. Adicionalmente, los docentes deberán identificar los estándares que se movilizan en este contenido. Los ejemplos a analizar serán tomados de manuales de matemáticas de grado once.

MARCO TEÓRICO

En lo que sigue describimos cinco categorías a considerar en el análisis que proponemos realizar en el taller. Igualmente, tres de ellas de naturaleza semiótica y dos de naturaleza curricular.

Sistema de representación analítico de funciones: muestra una concepción formal del límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, pero difícilmente ligado con fenómenos reales (tomado de Medina, 2001). Son cinco los tipos de representación que caracterizan esta categoría, a saber:

Representación numérico-tabular: muestra la evaluación de la función en valores cercanos a la variable independiente. Representación gráfico-cartesiana de función: se intenta describir gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor, cuando la variable independiente se acerca a otro. Representación simbólico-específica de función: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una función de la forma $f(x)$, y se procede a evaluarlo, obteniendo así el límite L . Definición verbal de función: en este tipo se presenta una descripción de la definición formal sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como ϵ , δ y los cuantificadores \forall , \exists) pero que están implícitos. Definición formal de función: en esta dimensión aparece explícita la siguiente definición: Definición formal de límite de una función: Sea f una función cuyo dominio es el intervalo I . Sea " a " un valor cualquiera que puede o no pertenecer a I . Decimos que: Si y solo si: $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Sistema de representación algebraico: considera el uso de notaciones y simbolismo algebraico asociados a funciones y sucesiones, el cálculo de límites se reduce a la aplicación de teoremas de límites y uso de algoritmos algebraicos como sustitución, factorización y racionalización (tomado de

Medina 2001). En esta categoría se presenta un tipo de representación, a saber:

Representación algebraica de función y sucesión: se llama representación algebraica cuando en el proceso del cálculo de un límite, se requiere el uso de procedimientos algebraicos como: factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para obviar indeterminaciones.

Sistema de representación aritmético: alude a las representaciones de límites de sucesiones que están asociados a representaciones de números y sus operaciones (tomado de Medina 2001). Son seis los tipos de representación que caracterizan esta categoría, a saber:

Representación numérico-tabular de una sucesión: en esta dimensión la representación del límite se hace por medio de una tabla de valores en la que se expresan valores de la variable independiente y valores de la sucesión, con la intención de mostrar la tendencia del límite. Representación simbólico-específica de una sucesión: se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una sucesión de la forma y se procede a evaluarlo, obteniendo así el límite L . Definición verbal de una sucesión: en este tipo se presenta una descripción de la definición formal de sucesión sin el uso de símbolos que caracterizan la definición formal (como ϵ y N y los cuantificadores \forall y \exists) pero que están implícitos. Definición formal de una sucesión: en este tipo aparece explícita la siguiente definición: una sucesión (S_n) tiene límite L si, para cada número positivo ϵ , existe un número positivo N (que en general depende de ϵ) tal que $|S_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Representación de la recta real: en este tipo se usa la recta real para expresar el concepto de límite, ubicando puntos en la recta cada vez más próximos al punto límite siempre que n sea más grande. Representación cartesiana de sucesión: los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función.

Estándares de calidad: en esta categoría se consideran los estándares que se movilizan en el pensamiento numérico y en el pensamiento variacional y que son los que se relacionan con el límite (tomado del MEN, 2003).

Los tipos han sido designados como indicadores de logro donde aparecen los contenidos relacionados con el límite. Aquí se debe identificar qué contenidos de los mostrados en cada subcategoría se movilizan en cada ejemplo.

Pensamiento variacional, estándar: utilizar técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Son tres los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Interpreta y/o define gráficamente el límite de una función: se considera cuando en el ejemplo aparecen gráficas relacionadas con el límite de una función y sucesión donde se evidencian aproximaciones. Determina el límite de una función por aproximación: se considera cuando en el ejemplo aparecen tablas con aproximaciones. Determina si existen la ecuación de las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de una función: se considera cuando en el ejemplo se localizan las asíntotas de la curva.

Pensamiento numérico, estándar: usar las propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite. Son tres los tipos de contenidos que caracterizan esta categoría, a saber:

Evalúa límites de funciones reales utilizando sus propiedades: se considera cuando se aplican las propiedades de los límites. Aplica propiedades algebraicas: se considera cuando se aplican propiedades algebraicas como: asociativa, distributiva, de potenciación de radicación, etc. en el cálculo de límites. Calcula límites de funciones indeterminadas límites infinitos, límites trigonométricos: se considera cuando aparecen en los ejemplos el cálculo de límites de este tipo.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller se realizará en cinco fases, a saber:

Fase 1: los talleristas describirán los aspectos que hacen de los sistemas de representación importantes referentes a considerar en la transformación de la calidad de la enseñanza del límite en el aula de clases. Se asignará 5 minutos para esta primera fase.

Fase 2: se presentará al público participante en el taller una propuesta metodológica para el análisis de los ejemplos que evalúan conocimiento analítico y algebraico relacionado con el concepto de límite. Serán 20 los minutos asignados para el desarrollo de este segundo momento.

Fase 3: los profesores participantes en el taller aplicarán las categorías de análisis a cuatro ejemplos que evalúan elementos analíticos y algebraicos de los ejemplos. Se hará entrega de un documento de trabajo compuesto por 1) las definiciones de las categorías y subcategorías, 2) los ejemplos a

caracterizar y 3) una tabla de doble entrada para tipificar la presencia de los elementos de la metodología de análisis propuestas. Se tendrán en cuenta 30 minutos para el desarrollo de esta fase.

Fase 4: Los talleristas junto a la población participante en el taller contrastarán el análisis realizado a los ejemplos en estudio. Se designarán 20 minutos en el desarrollo de esta fase.

Fase 5: a manera de conclusión se presentarán los resultados del análisis realizado a todos los ejemplos que conforman la prueba en estudio y se establecerán elementos a considerar en el análisis de otras pruebas, así como el rol que desempeña este tipo de estudios en la transformación de la enseñanza de las matemáticas. Se asignarán 15 minutos para esta última fase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. COMPLETE
- Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Cornu, B. (1991) Limits. En: *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 153-165
- García, G., Serrano, C., Espitia, L., (1997) El concepto de función en textos escolares, Colciencias – UPN
- Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA.
- Medina, Anna. (2001) *Concepciones del Concepto de Límite en Estudiantes Universitarios*. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.