

## Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano

### Developing algebraic thinking in a 10th grade student

Floriano Augusto Veiga Viseu  
fviseu@ie.uminho.pt

Daniela Nogueira  
danielanogue@gmail.com

#### Resumo

No início do ensino secundário, muitos alunos manifestam preferência por trabalhar com situações numéricas do que algébricas devido à prevalência das suas atividades com números até ao final do 3.º ciclo<sup>1</sup>. Com a importância que o pensamento algébrico adquiriu no currículo atual da disciplina de Matemática, procuramos averiguar como se desenvolve o pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano no estudo das funções, seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa. Recolhemos os dados através da atividade da aluna na resolução de tarefas propostas na sala de aula e de uma entrevista. A informação proveniente dos dados recolhidos é interpretada segundo as três fases que decorreram *antes*, *durante* e *após* o estudo das funções. Os resultados revelam que a aluna desenvolveu a capacidade de manipular expressões com letras, embora em algumas situações não perceba totalmente o seu significado. Antes do estudo das funções a aluna tendia a concretizar alguns valores particulares das expressões algébricas. Com o estudo deste tema estabeleceu relações através da manipulação de expressões algébricas, o que fez com que reconhecesse a importância da generalização de relações que estabeleceu.

**Palavras-Chave:** Ensino de Matemática; Pensamento algébrico; Sentido do símbolo; Funções.

#### Abstract

At the start of secondary school a lot of students prefer working with numerical situations than algebraic ones because of the prevalence of their activities with numbers up to the end of the 3rd cycle. Given that algebraic thinking has become an important part of the current maths curriculum we set out to find out how algebraic thinking is developed in a 10th grade student in the study of functions, taking a qualitative and interpretive approach. We gathered data via a female student engaged in solving problems in the classroom and from an interview. The information from the data collected is interpreted according to the three phases of *before*, *during* and *after* the study of functions. We found that the student developed the ability to manipulate expressions with letters, though she did not always fully understand their meaning. Before the study of functions the student tended to achieve some specific values of algebraic expressions. With the study of this topic she established relations by manipulating algebraic expressions, which meant she recognised the importance of the generalisation of the relations she established.

**Keywords:** Mathematics teaching; algebraic thinking; symbol sense; functions.

---

<sup>1</sup> O 3.º ciclo contempla os anos de escolaridade de alunos com idade compreendida entre os 10 e os 14 anos, enquanto o ensino secundário diz respeito aos anos de escolaridade de alunos com idade entre os 15 e os 17 anos.

## **Introdução**

A álgebra é um tema matemático que obtém uma especial atenção das sucessivas reformulações do currículo escolar. Em Portugal, os diferentes programas da disciplina de Matemática articulam entre si, nas mais variadas formas, a transição do estudo de temas a um nível concreto, próprio do currículo do ensino básico, para um estudo mais formal, próprio do currículo do ensino secundário. Procura-se assim, gradualmente, efetuar uma transição entre a aritmética e a álgebra (NCTM, 1991, 2007). Nesta transição, a álgebra fornece uma linguagem de comunicação entre os diferentes temas matemáticos, desenvolve a capacidade de abstração dos alunos para operar com conceitos matemáticos e para estabelecer generalizações e intuições que, muitas vezes, ultrapassam o contexto original (NCTM, 1991). Porém, esta transição não se torna fácil para muitos alunos, como comprovam, por exemplo, os resultados de estudos internacionais, como os de PISA. Segundo relatórios destes estudos, nos últimos anos, os alunos portugueses não adquirem capacidades matemáticas previstas ao longo dos nove anos de escolaridade do ensino básico, o que significa que há uma discrepância entre o que o currículo prevê e o que efetivamente é implementado. Ponte (2003) considera que é nas tarefas de ordem mais complexa, que exigem algum raciocínio, flexibilidade e espírito crítico que os alunos portugueses continuam a apresentar resultados menos satisfatórios. De facto, muitos dos alunos que entram no ensino secundário manifestam dificuldades na transição do pensamento concreto para o abstrato, o que tende a criar obstáculos ao desenvolvimento da capacidade de generalização, de resolução problemas e do uso de simbologia (Kieran, 1992). A dificuldade desta transição pode dever-se à introdução do conceito de variável, na maioria das vezes, de forma descontextualizada. Arcavi (1994) defende que o desenvolvimento do sentido do símbolo associa a capacidade do aluno de reconhecer o seu poder e de saber quando o seu uso é adequado, a capacidade de manipular e lhe dar sentido em diferentes contextos de modo a que este se torne “pronto para ser posto em ação a um nível quase de um reflexo” (p. 32).

Ao apercebermo-nos, de acordo com a nossa prática docente, que os alunos quando chegam ao 10.º ano tendem a procurar mais os processos numéricos do que algébricos para exprimir o seu raciocínio, procuramos averiguar como se desenvolve o pensamento algébrico de uma aluna deste ano de escolaridade no tema de funções, mais concretamente no que diz respeito a estabelecer, analisar e generalizar relações. Debruçamo-nos sobre este tema por ser um dos ‘elementos’ integrantes da álgebra e por fazer parte dos programas de todos os níveis escolares.

## Pensamento algébrico

A álgebra tem despertado a atenção da investigação na área da educação matemática, uma vez que é uma das suas linguagens de expressão. Ao mediar a transição do pensamento concreto para o abstrato, dá-se significado à álgebra como linguagem formal que ajude o aluno a compreender melhor a matemática escolar (Arcavi, 1994, 2005). Para este autor, o desenvolvimento do pensamento algébrico não deve restringir-se à escrita da linguagem formal. Desenvolver este tipo de pensamento implica, segundo Ponte (2005), por um lado, desenvolver a capacidade de trabalhar com o cálculo algébrico e as funções, e, por outro, a capacidade de lidar com estruturas matemáticas, relações de ordem e de equivalência. Para Bednarz, Kieran e Lee (1996), o desenvolvimento do pensamento algébrico resulta da abordagem segundo diferentes perspetivas, em que o trabalho com os conceitos algébricos é determinante para a sua compreensão por parte dos alunos. As quatro perspetivas que consideram centram-se na generalização, na resolução de problemas, na modelação e no estudo das funções. Se a álgebra é entendida como um produto da generalização das atividades, o seu objetivo principal é compreender a generalidade, expressando, por exemplo, as propriedades dos números ou transpondo e generalizando relações entre os números. Esta abordagem da álgebra parte da intuição do aluno, alimentada por atividades aritméticas que conduzam a estruturas algébricas.

São vários os autores que se têm debruçado ao estudo da álgebra, com a preocupação de caracterizar o pensamento a ela inerente – o pensamento algébrico. No presente estudo, consideramos as conceções de Kieran (1989, 1992, 1996) e de Kaput (1999) sobre este tipo de pensamento. No desenvolvimento do pensamento algébrico, Kieran (1992) distingue duas perspetivas da álgebra: a *processual* e a *estrutural*. Na álgebra *processual* a ênfase é dada à substituição de variáveis por números e só posteriormente se realizam as operações aritméticas correspondentes, o que pressupõe um trabalho sobre números para produzir números. Na álgebra *estrutural*, a ênfase é dada a um conjunto de operações realizadas com expressões algébricas e não com números. Esta autora defende o estabelecimento de conexões entre a álgebra e a aritmética ou, mais concretamente, entre as propriedades aritméticas e a linguagem algébrica. Estas conexões têm como objetivo o desenvolvimento no aluno da capacidade de seguir qualquer uma das perspetivas anteriormente referidas, de acordo com a tarefa que tem de realizar. Quando o aluno procura, em primeiro lugar, substituir as variáveis por números para depois realizar as operações aritméticas indicadas, enquadra-se numa perspetiva processual. Quando opera com as expressões sem particularizar valores, enquadra-

se numa perspectiva estrutural. Os alunos tendem, em muitas situações, a memorizar regras e procedimentos, cientes de que adquirem assim conhecimento matemático. Uma forma de contornar esta tendência, para Kieran (1989), é valorizar as atividades algébricas como ferramentas que permitem construir progressivamente os conceitos em detrimento de atividades meramente de carácter algébrico, centrada na manipulação de letras e privilegiando o uso mecânico de regras e procedimentos. Para esta autora, a álgebra não é simplesmente um conjunto de procedimentos mas combina um conjunto de atividades de generalização e facultava uma multiplicidade de ferramentas que permite representar relações matemáticas, padrões e regras. A álgebra não é apenas uma técnica, mas acima de tudo uma forma de pensar e raciocinar acerca de situações matemáticas.

Kaput (1999) realça a necessidade de não limitar a álgebra a um simbolismo formal sobrevalorizado nas escolas ao longo dos tempos. Para este autor, a construção de relações e aplicações para a aquisição do conhecimento nem sempre é a essência do estudo da álgebra. O autor advoga o recurso a diferentes tipos de representações algébricas, nomeadamente gráficos e tabelas, que podem ser encaradas como ferramentas mais eficazes na construção e evolução do pensamento algébrico. O centro do pensamento algébrico está na generalização, o que envolve a extensão do raciocínio para além de um caso ou casos particulares e leva à identificação do que é comum entre eles, elevando o raciocínio a um nível onde o foco são os padrões, procedimentos, estruturas e as relações que se estabelecem entre elas e através delas. O pensamento algébrico surge assim das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas, e através de uma linguagem cada vez mais formal, usada na argumentação. A manipulação de formalismos, símbolos algébricos, sem preocupação daquilo que eles possam representar não implica, necessariamente, a perda da compreensão. É possível trabalhar com símbolos aplicando regras e procedimentos podendo fazê-lo de modo a não perder o sentido daquilo que a letra representa. Relativamente ao aspeto estrutural do pensamento algébrico, Kaput considera que a compreensão das estruturas resulta da experiência matemática dos alunos, com base em processos de abstração, pelo que rejeita a perspectiva de uma generalização da aritmética. O pensamento algébrico, para este autor, resume-se à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação; à capacidade de raciocinar dedutiva e indutivamente, relacionando e generalizando; e à capacidade de resolver problemas nos quais inclui a modelação de situações reais.

No que diz respeito ao estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis, Kaput (1999) refere que durante grande parte do século passado a ideia de função foi usada

como um princípio organizador para o currículo da matemática. A definição de função tem origem na causalidade, crescimento e na variação conjunta – quando uma quantidade muda em conjunto com a mudança de outra quantidade – encarando-se as funções como resultado da generalização. Este autor considera que o estudo das funções se encontra tradicionalmente associado à álgebra, sendo estas usualmente traduzidas de forma simbólica, através de expressões algébricas. Quanto à utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos, Kaput (1999) refere que o uso de funções possibilita ao aluno visualizar e descrever fenómenos pensando sobre eles.

Vários estudos têm-se debruçado sobre as dificuldades sentidas por alunos do ensino secundário quando realizam atividades algébricas, como, por exemplo, os realizados por Fonseca (2000), Cañadas e Castro (2007) e Azevedo (2009). Fonseca (2000) realizou um estudo com dois alunos do 10.º ano de escolaridade, com o objetivo de analisar os processos matemáticos utilizados na realização de tarefas de investigação. Este estudo centrou-se no processo de especialização, procura de regularidades, formulação de conjeturas, generalização, verificação, justificação e prova. A autora conclui que os alunos recorrem com frequência, de uma forma natural, à formulação de conjeturas. Já os processos de demonstração não são muito utilizados pelos alunos e, quando o são, são usados de formas distintas.

Cañadas e Castro (2007), ao investigarem o raciocínio indutivo de doze alunos do ensino secundário, em contexto de resolução de problemas, com base em sete fases (observação de casos particulares, organização de casos particulares, procura de padrões, conjetura e formulação, conjetura e validação, conjetura e generalização, justificação de conjeturas gerais), referem que os alunos tenderam a recorrer a casos particulares para procurarem o padrão geral. Referem ainda que os alunos não seguiram necessariamente as mesmas fases para a resolução da tarefa mas convergiram na espontaneidade e na utilização de diferentes representações.

Azevedo (2009) analisou o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos do ensino secundário na aprendizagem das funções. O recurso a tarefas investigativas e à resolução de problemas levaram os alunos a refletir, o que promoveu o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. A autora concluiu que a diversidade de tarefas proporcionou aos alunos oportunidades de utilizar diferentes estratégias na resolução de problemas, o que se repercutiu numa melhor compreensão dos tópicos de funções.

De um modo geral, as atividades algébricas procuram desenvolver no aluno um tipo de pensamento que lhe permita perceber como se constroem os seus saberes através das relações que estabelece, da criação de estruturas que suportem extensões a situações similares e da generalização de processos usando uma linguagem cada vez mais formal.

### **O uso de símbolos no desenvolvimento do pensamento algébrico**

Associado ao pensamento algébrico surge o uso de simbologia e o conceito de variável. O uso de símbolos ao permitir aglutinar as ideias tornando a informação mais fácil de compreender e manipular (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Sfard & Linchevski, 1994) torna-se importante nas atividades algébricas. Para Castro e Castro (1997), o símbolo é um ente que se toma como substituto de algo, ao qual se chama referente. Estes entes podem tomar uma variedade de formas, desde objetos concretos a marcas escritas no papel e podem representar desde conceitos simples a outros mais complexos. A capacidade de usar os símbolos permite manipulá-los no lugar de objetos que representam. Porém, Davis e Hersh (1995) consideram que quando se perde de vista o significado daquilo que os símbolos representam, cai-se no formalismo e no uso perigoso do simbolismo. Castro e Castro (1997) advogam que muitas das dificuldades em matemática procedem de uma ênfase prematura no simbolismo e nas regras sem ter em conta a compreensão do significado matemático do referente. Estes autores defendem que o desenvolvimento da capacidade de usar os símbolos é fundamental, quando se introduzem aos alunos novos símbolos matemáticos, para estabelecer conexões entre o símbolo e o significado a ele associado.

A importância que a atividade de representar e analisar situações usando símbolos algébricos tem na promoção do pensamento algébrico, faz com que Arcavi (1994) defenda que se deve procurar o desenvolvimento do ‘sentido de símbolo’ (*symbol sense*). Ter ‘sentido de símbolo’ inclui a capacidade de selecionar uma representação simbólica, o que faculta ao aluno o poder de decidir quando os símbolos são úteis e como devem ser utilizados para estabelecer relações e generalizar. Na procura de fazer com que os alunos entendam os símbolos, o autor apresenta seis componentes fundamentais: (1) simpatia com os símbolos, que inclui a sua compreensão, o sentido estético do seu poder, permitindo compreender quando e como devem ser utilizados para mostrar relações; (2) capacidade de ‘manipular’ e ‘ler’ através das expressões simbólicas, que inclui a capacidade de se afastar dos significados e ao mesmo tempo conseguir ter uma visão global das expressões simbólicas de modo a que as manipulações sejam rápidas e eficientes, em que o aluno faz uma leitura dos símbolos em vez de tentar um algoritmo em

busca de uma solução; (3) consciência de que se pode estabelecer com sucesso relações simbólicas; (4) capacidade de efetuar uma escolha apropriada do símbolo; (5) consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema e comparar os resultados obtidos com os esperados e ver a sua adequação ao contexto do problema; (6) consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos de acordo com os contextos em que são usados e desenvolver o sentido intuitivo dessas diferenças e a capacidade de trabalhar com eles.

Relacionado com o conceito de símbolo surge o de variável, que Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram tratar-se de um conceito central no ensino e na aprendizagem da matemática. Para estes autores, compreender este conceito fornece a base para a transição da aritmética para a álgebra e para o uso com significado de muitos conceitos matemáticos. Há múltiplos usos do termo variável de acordo com os diferentes contextos, o que faz com que os autores ponderem ser impossível definir variável usando apenas uma única palavra. Os aspetos dinâmicos do conceito de variável devem ser apresentados aos alunos sempre que for oportuno, podendo-se numa primeira fase fazer observações simples de problemas de variação e numa fase mais avançada analisar relações de dependência.

Na procura de dar sentido ao conceito de variável, Küchemann (1978) ilustra diferentes formas de usar letras em álgebra, usando uma categorização que redefine o significado de variável ao apresentar seis níveis para o uso das letras: *letra avaliada*, a letra pode ser avaliada de imediato sem passos intermédios (se  $a + 5 = 8$  então  $a = 3$ ); *letra não considerada*, a existência da letra é reconhecida sem que lhe seja dado um significado (se  $a + b = 43$  então  $a + b + 2 = 45$ ); *letra como objeto*, é entendida como o nome de um objeto concreto (se um retângulo tem  $c$  de comprimento e  $l$  de largura então o seu perímetro é  $P = 2l + 2c$ ); *letra como incógnita*, é entendida como um número específico mas desconhecido; *letra como número generalizado*, representa um conjunto de valores (se  $c + d = 10$  e  $c < d$  então  $c$  assume vários valores); *letra como variável*, é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos (na presença de duas expressões do tipo  $2n$  e  $n + 2$  podemos analisar qual delas é a maior). Embora esta categorização ajude a entender o uso das letras por parte dos alunos em várias situações, o autor salienta que o importante em álgebra não é medir a capacidade do uso de técnicas e algoritmos, mas sim compreender como os alunos lidam com certos problemas matemáticos.

Também Usiskin (1988), considerando a utilização de variáveis intrinsecamente ligadas à álgebra e ao pensamento algébrico, apresenta uma caracterização tendo por base diferentes

concepções e finalidades da álgebra. Para este autor, as variáveis são usadas de formas diferentes de acordo com a concepção da álgebra que se considere: (1) estudo de estruturas: as variáveis são usadas como símbolos arbitrários nas atividades de cálculo algébrico, tornando-se sinais que se manipulam; (2) aritmética generalizada: as variáveis são usadas como forma de traduzir e generalizar modelos; (3) estudo de procedimentos para resolver problemas: as variáveis são usadas como incógnitas ou constantes que podem ser simplificadas e onde se pode determinar o seu valor; (4) estudo de relações entre grandezas: as variáveis são usadas como argumentos ou parâmetros que permitem relacionar objetos e fazer gráficos. Perante esta pluralidade, o autor reforça a ideia de que o conceito de variável é multifacetado e embora a álgebra se relacione com a compreensão do significado das “letras” e das operações entre elas, porém, limitá-la a este aspeto é muito redutor.

As perspetivas dos vários autores confluem num ponto central – a necessidade de se considerar o contexto em que se usam as variáveis. A raiz etimológica da palavra variável, enquanto algo que está em contínuo movimento, pode estar na origem das dificuldades dos alunos quando estes lidam com símbolos. Vários estudos têm-se debruçado sobre as dificuldades sentidas por alunos quando realizam atividades algébricas, que exijam a tradução de informações da linguagem escrita para a linguagem matemática formal. Para Freudenthal (1983), algumas dessas dificuldades devem-se por os alunos verem as letras como nomes de objetos concretos, aplicando-lhes as regras da aritmética como no caso  $39x - 4 = 35x$  ou  $2xyz - 2y = z$ , em que somam termos não semelhantes. Outra dificuldade frequente está associada à compreensão de convenções da sintaxe da álgebra, onde se sabe que  $2a + a + 15 = 3a + 15$  mas onde  $a + a + a \times 2$  não é  $3a \times 2$ . Por outro lado, se em  $ab$  substituirmos  $a$  por  $-a$ , o resultado será  $-ab$ ; mas se for o  $ba$  ser substituído por  $-b$ , o resultado não é  $a - b$ , como muitos alunos indicam, mas sim  $a(-b)$ . Segundo este autor, este tipo de resposta tende a dever-se a uma atividade mecanizada com os símbolos e as regras de manipulação de formalismos, o que não favorece o desenvolvimento da sua compreensão por parte dos alunos.

Num estudo realizado por Lochhead e Mestre (1995), com alunos do ensino secundário sobre as suas interpretações na resolução de problemas algébricos, algumas das dificuldades que os alunos manifestam advêm da interpretação que fazem dos problemas que lhes são propostos. Os autores apresentam dois erros de interpretação que identificaram nas várias respostas analisadas. Um deles está relacionado com a propensão dos alunos para retirar os dados do enunciado de acordo com a ordem em que eles aparecem, da esquerda para a direita. O outro

erro de interpretação está relacionado com a atribuição de rótulos às variáveis, onde os alunos não interpretam as variáveis como quantidade (por exemplo, P significa o “número de professores” e A o “número de alunos”). Estes dois factos levam os alunos a escrever os dados pela ordem que surgem no enunciado sem atenderem à informação que efetivamente transmitem.

As dificuldades que os alunos evidenciam ao longo do seu percurso escolar no estudo das funções prendem-se, segundo Kieran (1992), com a pouca ênfase que se dá à conexão entre as diferentes representações de funções, tais como a algébrica e a gráfica. As primeiras aprendizagens sobre gráficos e funções são fundamentais para que os gráficos sejam um meio de compreender as transformações algébricas. A autora considera que as abordagens de ensino que valorizam mais atividades de passagem da forma algébrica para a gráfica dificultam a interpretação da informação contida num gráfico. Por isso, conceber uma função como um objeto é o primeiro passo para perceber se este conceito possui diferentes propriedades funcionais e analisar a covariância das variáveis é uma forma de compreender a relação entre elas, minimizando as dificuldades no trabalho com as diferentes representações.

### **Metodologia de investigação**

Este estudo procura averiguar como se desenvolve o pensamento algébrico de alunos do 10.º ano na aprendizagem de tópicos de funções. Com este objetivo é feito o estudo de caso da aluna Sílvia. O estudo segue uma metodologia de cunho qualitativo interpretativo, pela importância que a atividade da aluna adquire nas experiências em que elabora os seus significados no contexto em que se insere (Erickson, 1986). O registo do estudo de caso segue um estilo descritivo para, a partir das atividades realizadas pela aluna, facultar o conhecimento das suas formas de pensar. As razões que levaram à escolha desta aluna, entre 24 alunos de uma turma, foram por: (i) se situar, antes do estudo de funções, no grupo de alunos de desempenho médio de aprendizagem a Matemática, que se traduziu numa classificação de treze valores (numa escala de 0 a 20); (ii) manifestar abertura em integrar o estudo; e (iii) pela pertinência da informação que recolhemos da sua atividade, que revela, comparativamente aos alunos de desempenho médio, uma maior evolução de aspetos do pensamento algébrico. A aluna, com 15 anos, frequentou o 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias, numa escola secundária de um concelho do distrito de Braga. Ao longo do seu percurso escolar, nunca foi alvo de nenhuma retenção e obteve sempre um

desempenho médio a todas as disciplinas. No ano letivo em que se desenvolveu este estudo, revelou ser uma aluna empenhada e interessada em participar nas atividades das aulas.

Os dados foram recolhidos através dos seguintes métodos: (i) registos escritos da aluna que traduzem a resolução das tarefas propostas antes, durante e depois do estudo de funções. As tarefas propostas antes do estudo deste tema também foram resolvidas após esse estudo para averiguarmos em que aspetos do pensamento algébrico a aluna evoluiu; (ii) transcrição de gravações em áudio das atividades da aluna realizadas na sala de aula (RA); e (iii) entrevista (E). Com a entrevista (Anexo 4), efetuada após o ensino do tema das funções, procurámos aceder ao modo de pensar da aluna na resolução das tarefas propostas.

Após uma primeira leitura da documentação reunida, procuramos “examinar, categorizar (...) recombinar as evidências” do estudo (Yin, 2005, p. 137). Com esta leitura, fragmentamos a informação recolhida na procura de regularidades com a preocupação de não retirar o sentido conferido pelos participantes, o que nos permitiu reduzir os dados em torno de dimensões que, como defendem Miles e Huberman (1994), organizam e sistematizam a informação. No que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico de Sílvia, organizamos a informação que recolhemos segundo as conceções de Kaput (1999) e Kieran (1989, 1992, 1996):

- (1) *Estabelecer relações*: interpretar informação de enunciados escritos ou de gráficos; escrever expressões com recurso a letras; inferir relações por concretização numérica de letras.
- (2) *Analisar relações*: identificar o papel das letras numa expressão; estabelecer novas relações a partir da análise de relações já estabelecidas; transformar expressões; elaborar e aceitar/refutar conjecturas.
- (3) *Fazer extensões*: generalizar relações; aplicar as relações encontradas a novas situações; modelar situações matemáticas e da vida real; reconhecer a utilidade de modelos.

Em cada um destes aspetos do pensamento algébrico, a informação é apresentada segundo o momento em que foi recolhida: (i) antes do estudo das funções; (ii) durante o estudo das funções; e (iii) após o estudo das funções. No processo da análise dos dados, preocupamo-nos em não acrescentar significados ou comentários aos textos originais, nem alterar o seu sentido.

O estudo das funções do 10.º ano resultou de estratégias de ensino orientadas pelos seguintes princípios: (1) valorizar a atividade do aluno; (2) resolver problemas; e (3) usar, quanto possível, as TIC. As aulas decorreram em três momentos: (i) apresentação da tarefa à turma sob a forma de problema; (ii) trabalho em grupo; (iii) discussão final no grupo turma. Com a resolução de problemas pretendemos proporcionar aos alunos a possibilidade de desenvolver atividades que promovessem a capacidade de generalização e a procura de regularidades, a modelação e a utilização de múltiplas linguagens. Embora ao longo deste estudo a essência das tarefas fossem os problemas, foram ainda propostos outro tipo de tarefas, como por exemplo, os exercícios presentes no manual escolar adotado pela escola. As tarefas propostas aos alunos foram exploradas com recurso a materiais tecnológicos, tais como o Geometer's Sketchpad (GSP), a calculadora gráfica e o sensor de movimento. A calculadora gráfica assumiu um papel privilegiado, pois o seu uso é, no ensino secundário, de carácter obrigatório.

Antes e após o estudo das funções (Anexo 1) os alunos resolveram tarefas propostas por Arcavi (1994), Kieran (1992) e Küchemann (1978). Durante o estudo das funções, os alunos resolveram tarefas do manual escolar. A ênfase que o tema das funções teve neste estudo deveu-se a duas razões. Por um lado, por nos permitir conciliar a gestão curricular com o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 10.º ano de escolaridade. Por outro lado, por ser um tema que trata de relações, da representação-análise de situações através do uso de símbolos algébricos, e da análise da variação em diversos contextos. Nos anos escolares que antecederam o 10.º ano, Sílvia estudou os seguintes tópicos algébricos relativos às funções e às equações: (i) 7.º ano: equações do 1.º grau com uma incógnita; proporcionalidade direta e as suas representações (tabela e gráficos); (ii) 8.º ano: equações do 1.º grau com denominadores; equações literais e equações de grau superior ao 1.º; diferentes representações de uma função (tabela, gráficos, expressões analíticas); proporcionalidade como função e gráficos de funções afins; (iii) 9.º ano: sistemas de equações; equações do 2.º grau; proporcionalidade inversa como função e as suas representações. No 10.º ano, Sílvia aprofundou os seus conhecimentos matemáticos através do estudo dos temas que estruturam o programa da disciplina de matemática deste ano de escolaridade: (i) Geometria no plano e no espaço I; (ii) Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo; e (iii) Estatística. Relativamente ao tema das funções, os tópicos do programa escolar estudados foram: função, gráfico e representação gráfica; estudo intuitivo de propriedades da função quadrática e da função módulo; funções polinomiais (graus 3 e 4); e decomposição de polinómios em fatores.

## Resultados

### Estabelecer relações

*Antes do estudo das funções.* Na transição do estudo da Geometria para o estudo das Funções, Sílvia revela ser capaz de interpretar enunciados de problemas próximos dos que são trabalhados no 3.º ciclo, como se verifica, por exemplo, na determinação do perímetro de triângulos escalenos formados em função da variação conjunta dos seus lados:

Os três lados de um triângulo têm diferentes comprimentos. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Como podes representar o perímetro deste triângulo?



$$P = x + (x+3) + 2x = 4x + 3$$

Na interpretação que faz, a aluna traduz essa variação através de uma representação pictórica de um triângulo, mais próxima da forma de um triângulo isósceles do que escaleno, e da correspondente representação simbólica. Em ambas as representações distingue a variação das dimensões dos lados do triângulo recorrendo às respetivas expressões literais, designando a quantidade desconhecida pela letra  $x$ . Embora traduza a soma de dois termos idênticos,  $x + x$ , por  $2x$ , representa o dobro desse termo pelo seu quadrado. Sílvia transforma a adição numa multiplicação, o que parece resultar da conexão irrefletida que estabelece entre conceitos matemáticos.

Na tradução de enunciados de problemas, Sílvia atribui sentido às letras, como exemplifica a relação que estabelece entre as variáveis que representam o número de alunos e de professores de uma dada escola:

Numa escola há seis vezes mais alunos do que professores. Referindo por A os alunos e por P os professores, escreve uma equação que traduza o problema (não resolver o problema)

$$6 \times \text{alunos} = \text{professores}$$

$$\text{logo a eq. é } 6A = P.$$

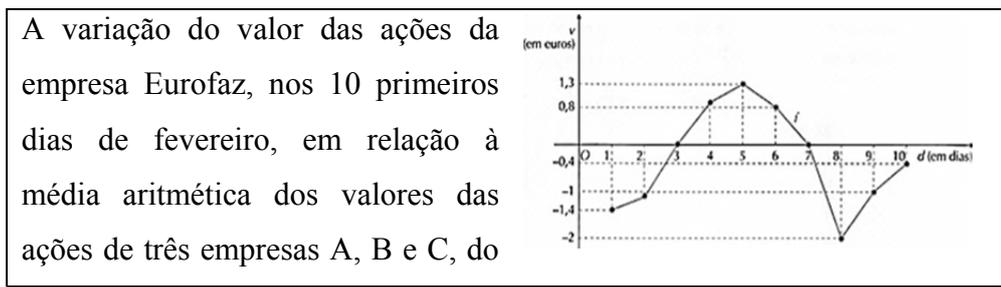
Porém, na representação simbólica que traduz a sua interpretação a aluna inverte a posição das variáveis porque as escreve segundo a ordem como aparecem no texto. Sílvia parece

entender as letras como objetos ou como nome de objetos, o que a impede de manipular mentalmente a informação dos dados que retira do enunciado. A aluna revela não ter hábitos de confrontar as relações que expressa com o significado que elas adquirem na interpretação do enunciado de um dado problema. A forma acrítica como determina relações através de expressões algébricas, também se verifica nas ligações que estabelece entre as diferentes representações de conceitos matemáticos, como se observa na interpretação que Sílvia faz da informação que retira de gráficos de Funções que estudou no 3.º ciclo:



Reconhece a representação que traduz uma função constante e uma função de proporcionalidade inversa, mas não reconhece a representação de uma função de proporcionalidade direta. Na situação que traduz uma função constante identifica a relação entre os valores de  $y$  e de  $x$ , mas não tem presente que um gráfico que representa grandezas diretamente proporcionais é uma reta que passa na origem e não uma reta horizontal. A designação que dá a esta situação indicia dever-se à ideia que tem sobre a razão constante entre os valores de  $y$  e de  $x$ . Essa confusão também se verifica na interpretação que faz do gráfico de uma situação de proporcionalidade direta, o que a leva a ligar o requisito constante aos valores que as variáveis  $x$  e  $y$  podem assumir, em vez de estabelecer a relação entre os valores destas variáveis.

*Durante o estudo das funções.* No início do estudo do tema das funções, Sílvia mostra ter presente a noção do conceito de função, enquanto “algo que relaciona duas variáveis como o  $x$  e o  $y$ , sendo  $x$  o objeto e  $y$  a imagem” (RA). A aluna evidencia a sua aptidão para interpretar a informação de um gráfico ao identificar e relacionar os seus pontos relevantes.



mesmo ramo, está representada graficamente na figura. Imaginem que são representantes da administração da Eurofaz e vão analisar a situação da empresa. Com base no contexto do problema, elaborem um relatório que apresente a vossa interpretação tendo em conta os valores que consideraram relevantes.

No primeiro e segundo dia (-1,4 €, -1 €) as ações da EUROFAZ são mais baixas do que média das outras empresas. Tal volta a acontecer no oitavo, nono e décimo dia (-2 €, -1 €, -0,4 €). Em ambas as situações a empresa EUROFAZ, conforme os dias vão passando, diminui a distância dos valores.

Os dias 3 e 7 são os zeros, ou seja, as ações da empresa, EUROFAZ e a média das ações das outras empresas estavam iguais.

Entre o dia 4 a 6 os valores são superiores à média, sendo no dia 5 a maior distância entre os valores da ação.

Da relação que estabelece entre as variáveis dia e euro, a aluna reconhece que essa relação não diz respeito somente à empresa mas sim à variação desta em função da média de outras três empresas, o que lhe permite “ver se estava abaixo da média ou não (...) das outras empresas” (RA). Partindo desta análise, institui outras relações da mesma função que apresenta num quadro de sinal e num quadro de variação:

$f$	1		3		7		10
$f(x)$	-1,4	-	0	+	0	-	-0,4

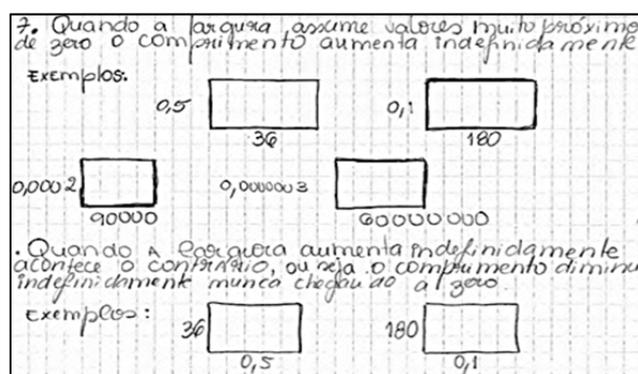
  

dias	1		3		5		8	10	
valor (€)	-1,4	↑	0	↑	+1,3	↓	-2	↑	-0,4

Sílvia recorre à linguagem simbólica para representar, no quadro de sinal, as imagens por  $f(x)$  sem se aperceber que designa os objetos pela letra  $f$  em vez da letra  $x$ . A aluna indicia assim não distinguir a letra que representa o processo de transformação, da letra que representa o transformado por esse processo. Por outro lado, no quadro de variação altera essa simbologia por expressões da linguagem corrente por contextualizarem o problema: “em cima era sinal negativo ou positivo e eu fiz com coisas da matemática; em baixo como era se as ações crescem ou descem eu pus com os nomes da vida real” (RA).

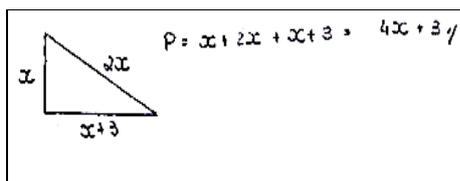
Com o decorrer do estudo, a aluna estabelece outras relações, como por exemplo, a que relaciona as medidas da largura e do comprimento de todos os retângulos com área  $18\text{cm}^2$ . Apresenta, numa tabela, para as medidas dos lados dos retângulos os submúltiplos de 18 por serem “valores inteiros (...) normalmente quando são medidas de comprimento são valores

certos” (RA). Na discussão com os seus colegas e com a professora reconhece que as dimensões do retângulo também podem “ser números inteiros e decimais” (RA), embora só apresente valores inteiros para a variável independente porque “dos valores que obtive na tabela da calculadora tirei os valores esquisitos” (RA). Ao estabelecer a relação pretendida, Sílvia recorre às letras  $x$  e  $y$  por serem “as letras da calculadora” (RA). Embora obtenha alguns valores para estas variáveis que satisfazem a área dos retângulos, o significado que atribui a estas letras é de representação dos lados desses retângulos, em vez das medidas que esses lados podem assumir. A relação que estabelece permite-lhe determinar a variação dos comprimentos desses retângulos quando a largura assume valores muito próximos de zero, ou quando a largura aumenta indefinidamente:



Ao relacionar as variáveis comprimento e largura, a aluna reconhece a sua variação conjunta. Num dos casos, ao atribuir valores a uma das variáveis, Sílvia apercebe-se da infinidade de retângulos equivalentes que pode obter: “1 está para 18 como o dobro de 18 está para metade de 1; 18 a dividir por 0,1 é 180; 18 a dividir por 0,0005; (...) vamos pôr outro, 10 a dividir por 0,0002 (...) chega de exemplos” (RA). Das relações que estabelece entre as variáveis que formam uma expressão algébrica, a aluna sente, por vezes, a necessidade de as concretizar para perceber o efeito da variação de uma delas em função da variação dos valores da outra.

*Após o estudo das funções.* Em comparação com as respostas que deu no início do estudo das funções, Sílvia altera a forma como respondeu às questões relativas à atividade de estabelecer relações. Uma das questões onde se verifica essa mudança é a que diz respeito à relação que estabelece entre os lados de um triângulo escaleno e a expressão do respetivo perímetro. A aluna distingue, quer na representação pictórica, quer na representação simbólica da situação dada, a representação do dobro de uma dada quantidade da representação do seu quadrado, o que não se verificou no início do estudo.

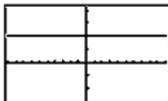
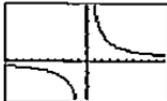
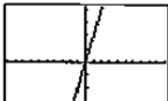


A evolução que manifesta em representar algebricamente a informação que retira dos enunciados de problemas reflete-se também na forma como estabelece a relação entre as variáveis, sem atender à ordem como interpreta na leitura que faz de enunciados de problemas.

$$P = \frac{A}{6} \text{ ou } 6P = A$$

Ao apresentar duas expressões equivalentes revela compreender a relação que estabelece e a dependência entre as variáveis. A compreensão da dependência da variação dos valores de uma variável em função da variação dos valores de uma outra também se verifica na interpretação que Sílvia faz da informação que retira da leitura de gráficos:

Observa os gráficos e para cada um deles explica a relação que existe entre os valores de  $x$  e de  $y$ .

		
<p><math>y = 2</math>, logo a função é sempre constante.</p>	<p>Como o gráfico originou uma hipérbole significa que os valores de <math>x</math> e <math>y</math> são inversamente proporcionais.</p>	<p><math>y = x</math>, ou seja se <math>x = 1</math>, <math>y = 1</math>. Quando o valor de <math>x</math> aumenta, o valor de <math>y</math> aumenta de igual forma, fazendo assim uma função afim.</p>

Na primeira situação identifica a relação constante que há entre os valores das variáveis. Na situação que representa uma função de proporcionalidade inversa, que identifica, não escreve a relação entre as variáveis  $x$  e  $y$  por não conhecer a constante de proporcionalidade. A atenção que manifesta ter nesta situação não se verifica na forma como traduz a relação entre grandezas diretamente proporcionais. Ao associar o gráfico que representa estas grandezas à função identidade, considera que “preocupei-me mais em apresentar uma expressão do que atender à inclinação da reta” (E).

## Analisar relações

Antes do estudo das funções. Na tradução do significado que as letras assumem nas expressões algébricas, Sílvia identifica os diferentes papéis que estas assumem mas não os distingue:

Observa as expressões seguintes e explica em cada caso o papel que desempenha cada uma das letras utilizadas.

a)  $n + 3$ ;                      b)  $2x + 3 = 4x - 1$ ;                      c)  $a(b + c) = ab + ac$

$n + 3$   $n$  é incógnita  
 $2x + 3 = 4x - 1$   $x$  é a incógnita  
 $a(b + c) = ab + ac$   $a, b, c$  representam números.

Ao considerar que as letras representam um número ou um valor desconhecido, que designa de incógnita, não distingue o papel que as letras podem assumir (parâmetro, incógnita ou variável) conforme surjam numa fórmula, expressão ou equação. Tal conceção faz com que Sílvia, perante uma expressão fracionária, atribua valores a letras em vez de procurar relações entre os termos que lhe permitisse simplificá-los:

Encontra o valor da seguinte expressão:

$$\frac{z^2}{c^2(b-a)} + \frac{z^2}{c^2(a-b)} = \frac{1^4}{2^2(4-3)} + \frac{1^4}{2^2(4-3)} = \frac{1}{4 \times 1} + \frac{1}{4 \times 1} = \frac{1}{2} \neq 1$$

$z = 1$   
 $c = 2$   
 $b = 4$   
 $a = 3$

A aluna tem a noção de que para trabalhar com frações precisa de ter o mesmo denominador, o que obtém sem considerar a ordem das letras, mas não se apercebe que poderia manipular as expressões do denominador para que isso acontecesse. A confusão generaliza-se ao manter o numerador e somar os denominadores. A atribuição de valores diferentes às letras indicia que, para a aluna, estas não assumem o mesmo valor no domínio que valida a expressão.

Da atividade que desenvolveu nos diferentes anos escolares, Sílvia revela capacidade para justificar as suas conjeturas:

Se  $n - 246 = 762$ ,  $n - 247 = ?$  Se ~~me~~ se vai subtrair mais um valor, o resultado terá menos um valor que o anterior.  
 $(n - 246 = 762 \Rightarrow n = 1008 \text{ logo } 1008 - 247 = 761)$

Perante o conhecimento do valor de uma expressão, apercebe-se da transformação que tem de fazer para determinar o valor de outra expressão. Exprime essa transformação em linguagem corrente, mas recorre à linguagem simbólica para dar significado à interpretação que efetuou.

*Durante o estudo das funções.* Com o decorrer da experiência de ensino a aluna mostra uma maior preocupação para justificar os processos que realiza nas suas atividades. Essa preocupação verifica-se, por exemplo, na resolução do problema que solicita a determinação do valor que traduz a mesma temperatura em graus Celsius e em graus Fahrenheit (Anexo 2):

2.  $32^{\circ}\text{F} - 0^{\circ}\text{C}$   
 A um  $1^{\circ}\text{C}$  corresponderá quantos  $^{\circ}\text{F}$ ?  
 $F = 1,8 \times 1 + 32$  (s)  
 (s)  $F = 33,8^{\circ}$  logo tira-se a conclusão que a cada grau  $^{\circ}\text{C}$  que aumenta, aumenta  $1,8^{\circ}\text{F}$ .

A partir de tais valores consegue-se perceber que a temperatura coincidente nunca poderá ser positiva pois com tais valores a distância entre cada uma iria aumentar:  
 Agora, por tentativas, tentarei obter o valor:

<p><u><math>-30^{\circ}\text{C}</math></u>  <math>F = 1,8 \times (-30) + 32</math> (s)          (s) <math>F = -22</math> //</p> <p>Ainda não encontramos e os valores estão longe</p> <p><u><math>-38^{\circ}\text{C}</math></u>  <math>F = 1,8 \times (-38) + 32</math> (s)          (s) <math>F = -36,4</math> //</p> <p>Cada vez os valores estão mais próximos</p>	<p><u><math>-35^{\circ}\text{C}</math></u>  <math>F = 1,8 \times (-35) + 32</math> (s)          (s) <math>F = -31</math> //</p> <p>Os valores estão a aproximar-se</p> <p><u><math>-40^{\circ}\text{C}</math></u>  <math>F = 1,8 \times (-40) + 32</math> (s)          (s) <math>F = -40</math> //</p> <p>Este é o valor coincidente</p>
--	--

Os valores que atribui a uma das variáveis resultam da análise que faz dos resultados que obtém, o que lhe permite aperceber-se do sentido da variação dos valores dessa variável, de modo a obter a mesma temperatura nas duas escalas.

A capacidade de analisar relações também se verifica quando Sílvia estabelece novas relações a partir de uma dada relação. É o que se verifica, por exemplo, no problema “Vinho do Porto” (Anexo 3):

600L - 35 anos  
 12L - 12 anos  
 Vinho cf idade de 20 anos

$$600 \times 35 + 12 \times 12 = 20(600 + 12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21000 + 144 = 12000 + 2012 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1212 - 2012 = 12000 - 21000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -812 = -9000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 = -\frac{9000}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 = 1125 \text{ litros} //$$

Se o vinho jovem tiver 100 litros o vinho velho terá 12

$$100 \times 10 + 40 \times 12 = 30(100 + 12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1000 + 480 = 3000 + 360 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4012 - 3012 = 3000 - 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1012 = 2000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 = 200 //$$

Logo se o vinho jovem for 100L o vinho velho será 200L, ou seja, será o dobro

Então se o vinho jovem for 12L o vinho velho será 24L, ou seja, o vinho velho será sempre o dobro do vinho novo.

A partir da análise de uma relação numérica que determina a idade do vinho do Porto (a partir da mistura de vinhos de idades diferentes) identifica o termo que corresponde à variável, estabelece novas relações e resolve equações que estabelece.

*Após o estudo das funções.* A aluna tende a julgar que as letras possuem uma identidade própria que as distingue, cuja característica transfere para os valores que podem assumir. Revela uma preocupação em apresentar as suas justificações numa linguagem mais formal. Por exemplo, na determinação do valor de uma dada expressão a partir da relação que analisa entre esta e o valor de outra expressão, resolve a equação para determinar o valor da incógnita e, de seguida, determina, por substituição, o resultado pretendido:

Se  $n - 246 = 762$ ,  $n - 247 = ?$   
 $n - 246 = 762 \Leftrightarrow n = 762 + 246 \Leftrightarrow n = 1008$   
 $n - 247 \Leftrightarrow 1008 - 247 = 761 //$

Esta estratégia de resolução parece dever-se ao hábito de resolver equações através da aplicação das regras sem considerar outras possibilidades de resolução. Na resolução da equação, o cuidado que a aluna tem de usar o símbolo de equivalente entre as equações parece induzi-la a usar o mesmo símbolo para unir a expressão algébrica à expressão numérica que

resulta da substituição da incógnita pelo valor encontrado. Após o estudo das funções, nem sempre revela a mesma capacidade para transformar expressões:

$$\frac{z^4}{c^2(b-a)} + \frac{z^4}{c^2(a-b)} = \frac{2z^4}{2c^2(ab-ba)}$$

$$5(3z-1) = 10 \quad (*)$$

$$(*) \quad 15z - 5 = 10 \quad (**)$$

$$(**) \quad 15z = 15 \quad (***)$$

$$(***) \quad z = 1$$

Então:  $\frac{3z-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,0$

Da análise da primeira expressão, a aluna apercebe-se que a pode simplificar, independentemente dos valores que as diferentes letras possam assumir no domínio de validade da expressão. Sílvia não identifica que os denominadores são simétricos e simplifica a expressão sem considerar as regras da adição entre frações e sem reparar que anula o denominador: “somar frações é preciso o mesmo denominador, a expressão tinha muitas letras e baralhou-me. Tentei simplificar, pareceu-me um caso notável e como  $ab - ba$  é zero desaparece e fica só  $2c^2$  o que simplificava tudo” (E).

Na transformação da segunda expressão a aluna já não revela a mesma capacidade de simplificar expressões, ao concretizar valores para testar relações. Na resolução da questão “supõe que  $5(3z-1)=10$ , então  $\frac{3z-1}{2}=?$ ”, em vez de usar uma estratégia que resulte da análise das relações que possam existir entre as expressões que lhe são dadas, opta por determinar o valor da incógnita que surge nas expressões. A aluna afirma que “resolvi a equação, descobri quanto valia o  $z$  e depois substituí o  $z$  na expressão” (E). Ao optar por trabalhar em termos processuais parece ter o intuito de fundamentar as suas respostas com recurso a procedimentos matemáticos que lhe são familiares.

### Fazer extensões

*Antes do estudo das funções.* Das relações que estabelece, Sílvia evidencia que prefere recorrer a estratégias que envolvam esquemas em vez de procurar, embora identifique regularidades, inferir uma lei geral:

Observa a seguinte sequência.

Quantos pontos terá a 30.<sup>a</sup> figura?

1.<sup>a</sup> Figura - 5 ) +20  
 6.<sup>a</sup> Figura - 25 ) +20  
 12.<sup>a</sup> Figura - 45 ) +20  
 18.<sup>a</sup> Figura - 65 ) +20  
 24.<sup>a</sup> Figura - 85 ) +20  
 30.<sup>a</sup> Figura - 105 ) +20

Terá 105 pontos.

Apresenta o teu raciocínio.

Na sequência, apesar de não obter uma lei geral, a aluna estabelece uma relação numérica que lhe permite responder à questão. A noção que Sílvia mostra ter sobre o uso de letras nas relações entre expressões surge associada à ideia de que letras diferentes representam valores diferentes:

Esta igualdade  $x + y + z = x + p + z$  é verdadeira?

(A) sempre.

(B) nunca

(C) às vezes. Quando?

Justifica a tua opção.

*Nunca*

Nunca porque duas letras não podem ter o mesmo valor.

A aluna indicia saber simplificar expressões, reduzindo a equação dada à forma  $y = p$ . Ao traduzir uma igualdade entre letras e não uma igualdade entre uma letra e um número não considera que essa igualdade tem uma infinidade de soluções. A capacidade que aparenta ter para manipular expressões ajuda a aluna a resolver uma equação fracionária sem recorrer às regras de resolução de equações com denominadores:

Sem resolveres a equação, diz quantos valores fazem com que  $\frac{2x+3}{4x+6} = \frac{1}{2}$ ? Porquê?

Todos os valores dão aquele resultado porque independentemente do q tomar qual algum valor, o denominador será sempre o dobro do numerador, logo dá sempre  $\frac{1}{2}$ .

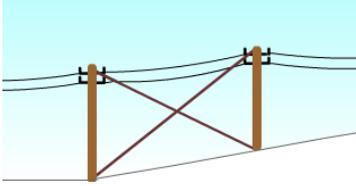
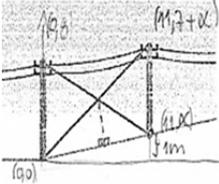
Na equação fracionária, Sílvia apercebe-se do significado que a incógnita assume na expressão do numerador e na expressão do denominador. Considera que todos os valores verificam a condição pela relação que identifica entre estas expressões, sem especificar o tipo de valores a que se refere e o domínio de validade. A capacidade que revela em manipular mentalmente os termos de uma equação também se verifica na análise que faz dos termos de uma inequação. Sílvia reconhece a relação de ordem que pode estabelecer entre as duas expressões, independentemente do valor que a variável possa assumir:

Para que valores de  $x$  a expressão  $x^2 + x < x^2 + x + 1$  é verdadeira?  
 Para todos os valores pois no outro a sempre mais 1.

A análise da condição como um todo não condiciona o significado que atribui ao papel que a variável desempenha em cada termo dos membros da inequação. Ao compará-los, constata que o termo constante da expressão do 2.º membro é quem determina o número de soluções da inequação.

*Durante o estudo das funções.* Sílvia evidencia reconhecer que os seus conhecimentos matemáticos lhe podem ser úteis quando resolve problemas de contexto da vida real. Apesar de inicialmente não procurar modelar matematicamente as situações com que se deparava, com as atividades que desenvolve vai-se apercebendo da sua importância e aplicabilidade. Na resolução de problemas que implicam a descoberta de modelos matemáticos, Sílvia vê-se confrontada com a necessidade de trabalhar com letras e com o seu uso enquanto variáveis, incógnitas ou parâmetros. Escolhe as letras a usar sem se aperceber de imediato que está a usar a mesma letra em situações diferentes. Na discussão com os seus colegas opta por usar  $\alpha$  pois assim “não se confunde com o  $y$  da função” (RA):

Em dois postes, distanciados 11m um do outro, medindo um 8 m e o outro 7m, foram colocadas duas cordas esticadas ligando o topo de uma à base de outra e vice-versa, tal como é sugerido na figura ao lado. Numa pequena composição matemática que inclua esboços de pontos relevantes, e os procedimentos que usaste apresenta uma possível solução se o terreno for inclinado ou irregular? Será possível estabelecer uma relação para descobrir esta relação para qualquer tipo de terreno?

$$\frac{\alpha}{11}x = -\frac{8}{11}x + 8$$

$$\alpha = \frac{-8}{121} + \left(\frac{8}{11}\right) \frac{1}{x}$$

$$a = \left(\frac{\alpha}{11} - \frac{8}{11}\right)$$

A modelação leva a aluna a refutar conjecturas, a generalizar a aplicação do modelo que definiu e a relacionar assuntos que estudou na disciplina de Matemática e de Físico-Química. Ao escrever uma das variáveis em função da outra, ao instalar um referencial na figura que ilustra o enunciado do problema e ao usar a equação reduzida da reta para definir as equações que representam as cordas, Sílvia manifesta compreender o papel da variável que escolheu e

evidencia a sua capacidade de trabalhar com diferentes representações das funções, mobilizar conhecimentos e modelar situações reais.

Noutra situação de contexto real, Sílvia elabora o enunciado de um problema, modela-o para dar resposta, com recurso a materiais tecnológicos, à questão que ela própria formulou e explicita o seu raciocínio:

**Problema**

No restaurante McDonald's está a ocorrer uma remodelação. Pretende-se, para a parte infantil, colocar uma porta com a forma do símbolo do restaurante. Quais são as dimensões necessárias?

1. Abrir a imagem no GSP e seleccionar alguns pontos pertencentes a uma das parábolas representadas na imagem.
2. Calcular as coordenadas dos pontos marcados.
3. Inserir as coordenadas dos pontos na calculadora gráfica e nesta calcular a expressão que representa a parábola.
4. Inserir a expressão no GSP e desenhar a função. Repetir o mesmo para a outra parábola.

$f(x) = -1,6x^2 + 10,17x - 11,39$        $g(x) = -1,57591x^2 + 21,9783x - 71,7221$

É necessário calcular o vértice de uma das parábolas:  $V(3,19; 4,77)$ . Na imagem, a altura é 7,45 cm, mas aplicada na construção da porta teria que ser 1,35 m de acordo com a escala. A largura (L) é medida no ponto de intersecção (I) das duas parábolas:  $I(5,08; -1,02)$ ,  $I_i = 3,80$  cm. Mas é preciso também medir a distância entre os vértices (dV) das duas parábolas, para que a porta fique com a forma do símbolo:  $d_v = 3,78$ cm. A largura “total” é duas vezes de uma das parábolas, ou seja, é 7,6 cm e a distância entre os vértices (dV) é 3,78 cm. Na porta a largura teria que ser 1,37m e a distância entre os vértices teria que ser 0,68m, de acordo com a escala. As dimensões da porta teriam que ser: Altura=1,35m; Largura=1,37m; dV=0,68m. (RA)

A aluna insere a imagem da forma que pretende modelar no Sketchpad (GSP), recolhe as coordenadas de um conjunto de pontos com o auxílio deste *software*, insere estas coordenadas nas listas da calculadora, determina os modelos que melhor se ajustam aos dados recolhidos através da técnica da regressão quadrática e valida esses modelos que obtém através da sua representação gráfica no GSP sobre a imagem inicial, o que lhe permite “reproduzir” a forma pretendida. Apesar de efetuar um conjunto de procedimentos matemáticos para obter as dimensões que procurava, preocupa-se em estabelecer uma relação que converta as unidades

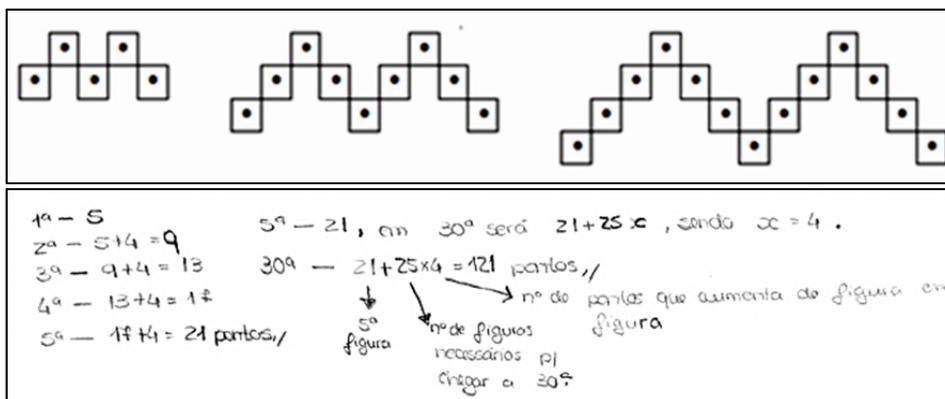
com que trabalhou no GSP em medidas reais, o que revela sentido crítico na análise das respostas que obtém:

Para resolvermos o problema foi necessário fazer uma escala adequada às dimensões da porta.

$$\frac{7,45cm}{135cm} = \frac{1cm}{x} \Leftrightarrow x \cong 18cm = 0,18m$$

Na resolução de problemas que implicam a descoberta de modelos matemáticos, Sílvia vê-se confrontada com a necessidade de trabalhar com letras.

*Após o estudo das funções.* Na resolução de um problema sobre padrões, Sílvia revela tentar afastar-se do uso de estratégias numéricas e procura escrever uma expressão geral que lhe permita determinar o termo de uma dada ordem:



Partindo do número de pontos que determina para a 5.<sup>a</sup> figura e da regularidade que identifica nas cinco primeiras figuras da sequência, a aluna estabelece uma expressão algébrica para determinar o número de pontos da figura de ordem 30. Em comparação com a resposta que deu no início do estudo, traduz o seu raciocínio numa expressão geral em detrimento de efetuar somente cálculos numéricos. Mas, noutras questões, Sílvia mantém algumas das suas respostas. A aluna continua a considerar que as letras, independentemente do papel que desempenham numa expressão, representam incógnitas. Ao determinar o número de soluções de uma equação com várias letras, embora reduza os termos dessa equação, continua a considerar que letras diferentes não podem assumir o mesmo valor:

Esta igualdade  $x+y+z=x+p+z$  é verdadeira?  
 (A) sempre.  
 (B) nunca  
 (C) às vezes. Quando?  
 Justifica a tua opção. Cada incógnita tem um valor diferente, portanto  $y$  e  $p$  obrigatoriamente tem valores diferentes.  
 Logo esta igualdade nunca poderá ser verdadeira.

Na generalização de algumas situações, Sílvia manifesta a preocupação de sustentar numericamente as suas respostas, como, por exemplo, se observa na determinação dos valores que satisfazem uma desigualdade entre duas expressões:

Para que valores de  $x$  a expressão  $x^2+x < x^2+x+1$  é verdadeira?  
 Esta expressão é sempre verdadeira quer  $x$  seja 0, um nº positivo ou um nº negativo.  
 Ex:  $2^2+2 < 2^2+2+1$  ( $\Rightarrow$ )  $6 < 7$ , verdadeiro  
 $0^2+0 < 0^2+0+1$  ( $\Rightarrow$ )  $0 < 1$ , verdadeiro  
 $-2^2+(-2) < -2^2+(-2)+1$  ( $\Rightarrow$ )  $-4-2 < -4-2+1$  ( $\Rightarrow$ )  $-6 < -5$ , verdadeiro

A aluna concretiza três valores para confirmar a relação que mentalmente estabeleceu entre as duas expressões, procurando assim validar casos gerais a partir de um número limitado de casos.

Após o estudo das funções, Sílvia revela capacidade de aplicar diferentes conceitos matemáticos na resolução de problemas. Exemplo dessa aplicação é o uso que faz de diferentes representações na resolução do problema “Triângulo de maior área”:

Diagrama de um triângulo com base  $x$  e altura  $y$ . A área é dada por  $A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$ .

Diagrama de um retângulo com base  $x$  e altura  $5-x$ . A área é dada por  $A = 5x = 50 \text{ cm}^2$ .

Equações derivadas:  
 $x^2 + y^2 = (5-y)^2$   
 $x^2 + y^2 = 25 - 10y + y^2$   
 $10y = 25 - x^2$   
 $y = \frac{25 - x^2}{10}$

Área  $A_1 = \frac{x \cdot (25 - x^2)}{10} = \frac{x(25 - x^2)}{10}$

Com a calculadora vou ver a área máxima.

Gráfico da função  $A(x) = \frac{x(25 - x^2)}{10}$ .  
 requei porque a área só pode ser positiva.  
 na calculadora vi o máximo e deu área = 214 (aproximadamente) sendo  $x = 2,81 \text{ cm}$  (aprox.)

Fui pela expressão porque assim dava para calcular o máximo sem fazer brétecos.

Na resolução deste problema, aluna afirma que:

“Considerarei as dimensões de uma folha de papel, a base e a altura dos triângulos que obtenho das dobragens da folha. A relação entre os três lados desses triângulos permite-me escrever uma das variáveis em função da outra. Com a expressão das áreas dos triângulos efetuei o gráfico da área. Com a calculadora, determinei a área máxima desses triângulos” (E).

A aluna usa várias letras para distinguir os entes a que se refere (base, altura e área), opera com expressões com essas letras, critica o esboço gráfico que efetua em função do contexto do problema e reconhece a utilidade da expressão geral na determinação da área máxima.

### **Conclusões**

A discussão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de Sílvia no estudo das funções do 10.º ano remete para a análise das suas atividades no que respeita a aspetos deste tipo de pensamento, tais como estabelecer relações, analisar relações e fazer extensões (Kaput, 1999; Kieran, 1992). Relativamente a *estabelecer relações*, a aluna começa o estudo das funções por revelar capacidade de traduzir enunciados de problemas através da representação simbólica, reconhecendo, assim, a utilidade do símbolo (Arcavi, 1994). Nas situações que traduz em linguagem matemática tende a usar a letra  $x$ , o que indicia dever-se à prevalência deste símbolo na maior parte dos manuais escolares e das atividades realizadas na aula de matemática. Nem todas as relações que estabelece revelam um bom domínio da sintaxe da álgebra, como por exemplo a distinção entre a linguagem aditiva da multiplicativa, o que se deve a um pensamento estrutural ainda em desenvolvimento (Kieran, 1992). Na tradução de enunciados escritos para expressões algébricas, Sílvia apresenta as letras como objetos pela ordem de leitura do texto, como se verificou com os alunos do estudo realizado por Lochhead e Mestre (1995). A ordem de leitura do enunciado dos problemas remete para a conexão entre os dados que se extraem e não para a sua compartimentação local. Durante o estudo das funções, Sílvia apercebeu-se da importância dessa conexão através da resolução de problemas que tiveram por finalidade introduzir termos específicos das funções e promover o seu pensamento algébrico. A utilização em simultâneo da notação simbólica e da designação em linguagem corrente do que a variável representa eleva o sentido que a simbologia representa nos contextos em que se insere (Arcavi, 1994). Com o estudo das funções a aluna mostra evolução no uso das estruturas que aplica na escrita de relações, aplicando

propriedades inerentes às operações entre as expressões com que trabalha, e revela capacidade para escrever expressões sem atender à ordem da escrita das letras no texto.

Quanto a *analisar* relações, antes do estudo das funções, a aluna reconhece que as letras podem assumir diferentes papéis mas não os identifica claramente, o que resulta, como defende Arcavi (1994), dos múltiplos usos que lhes podem ser dadas. Sílvia revela ser capaz de manipular expressões, quer através da aplicação de um conjunto de regras e procedimentos, numa perspetiva estrutural (Kieran, 1992), quer, em situações simples, através da análise global da expressão. Esta capacidade de ler através das expressões, trata-se, segundo Arcavi (1994, 2005), da capacidade de se afastar do significado do que representa a letra isoladamente e ao mesmo tempo conseguir ter uma perspetiva global das expressões simbólicas. Na manipulação de símbolos algébricos, nem sempre se preocupa com aquilo que eles representam, o que, em algumas situações, a impede de compreender os resultados que obtém. Este tipo de atividades acríicas deve-se, segundo Freudenthal (1983) e Kieran (1992) a processos de mecanização com os símbolos e procedimentos. Durante o estudo das funções, a aluna conjugou estratégias que a conduziram à inferência de relações e mostrou ter ultrapassado algumas dificuldades de manipular e transformar expressões com termos literais, o que deriva do recurso à simbologia nas suas estratégias (Freire, Cabral & Filho, 2004). Após o estudo das funções, apesar de manipular símbolos algébricos, Sílvia nem sempre distingue o papel que as letras desempenham nas expressões algébricas, o que, segundo Kaput (1999), faz com que perca a compreensão das operações que efetua. Na elaboração de conjeturas, em comparação com o início do estudo das funções, revela uma maior atenção na sua validação, procurando refutá-las através de contraexemplos, tal como é sugerido pelo NCTM (2007) e por Ponte e Canavarro (1997). Atividades que envolvam os alunos a estabelecer relações por análise de outras fazem da álgebra uma ferramenta para a generalização (Bednarz, Kieran & Lee, 1996).

Em relação à capacidade de *fazer extensões*, antes do estudo das funções, na procura de regularidades com padrões, Sílvia determina termos de uma dada ordem de forma recursiva (Stacey, 1989), manifestando ser mais capaz de estabelecer uma generalização próxima do que uma generalização distante. Já perante equações e inequações, a aluna generaliza relações através da comparação que faz entre as expressões que estruturam essas condições. Ao longo do estudo das funções, embora estabeleça relações algébricas, a aluna denota dificuldades em ajustar e generalizar modelos que obtém. Progressivamente, ao usar símbolos algébricos em diferentes contextos, reconhece a utilidade de usar uma letra para representar uma quantidade

que varia (Arcavi, 1994). Após o estudo das funções, Sílvia manifesta capacidade de generalizar processos e relações e evidencia compreender a sua importância na validação das relações que escreve. Embora tenha desenvolvido a capacidade de trabalhar com letras, não deixou de inferir algumas relações a partir de casos particulares, principalmente nas expressões com várias letras, o que, segundo Kieran (1992), revela mais a capacidade estrutural do que a processual. A atribuição de valores às letras deriva da prevalência do pensamento aritmético em detrimento do algébrico em muitas estratégias de ensino (Usiskin, 1988).

Dos aspetos do pensamento algébrico analisados, Sílvia desenvolveu no estudo de funções a capacidade de trabalhar com letras, de estabelecer relações em novas situações e analisar a variação em diversos contextos, o que muito contribuiu a atividade de resolução de problemas, nomeadamente os de semi-realidade (Ponte, 2005). Esta atividade envolve os alunos a escolher letras de acordo com o contexto, estabelecer modelos que se ajustem ao problema em estudo e a recorrer a diferentes estratégias, através das múltiplas representações, para generalizar a partir dos dados fornecidos (Kaput, 1999). O estudo de funções potencia o desenvolvimento da capacidade quer para traduzir enunciados escritos quer para traduzir informações contidas em gráficos. Segundo Bednarz et al. (1996), a tradução de enunciados de problemas em linguagem matemática significa uma transição da aritmética para a álgebra, em termos de simbolismo e em termos de raciocínio. A procura de dar sentido à relação entre variáveis promove o sentido dos símbolos que se usam num dado contexto e a flexibilidade mental de ler entre as expressões algébricas que são representadas por essas variáveis. Para este desenvolvimento muito contribui a estrutura aberta das tarefas, a utilização de recursos tecnológicos e a comunicação, escrita e oral, na tradução de tópicos das funções e dos seus significados.

## Referências

ARCAVI, A.. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35, 1994.

ARCAVI, A.. Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47, 2005.

AZEVEDO, A. *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de Funções. Uma experiência com alunos do ensino secundário*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 2009.

BEDNARZ, N., KIERAN, C., & LEE, L. Introduction. In *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. (pp. 3-12). Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.

CAÑADAS, M., & CASTRO, E. A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78, 2007.

CASTRO, E., & CASTRO, E. Representaciones y modelización. In L. Rico (Coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: Editorial Horsori, 1997.

DAVIS, P., & HERSH, R. *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan, 1986.

FONSECA, H. *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 2000.

FREIRE, S., CABRAL, C., & FILHO, C. Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In *Anais do VIII ENEM - Comunicação Científica GT 2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental*. Acedido em 3 de Agosto, 2010, de <http://www.proativa.virtual.ufc.br/publicacoes/artigos/fe344475950fa0e968e183661eff2bcb.pdf>, 2004.

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer, 1983.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

KIERAN, C. The early learning of algebra: A structural perspective. In C. Kieran & S. Wagner, *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-42). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1989.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan, 1992.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *ICME 8: Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville: S. A. E. M. Thales, 1996.

KÜCHEMANN, D. Childrens' understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7 (4) pp. 24-28, 1978.

LOCHHEAD, J., & MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In A. F. Coxford, & A. P. Shult (Orgs.), *As idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

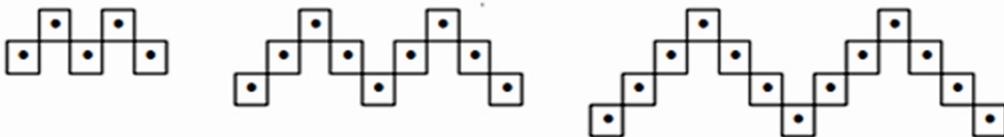
MARKOVITS, Z., EYLON, B., & BRUCKEIMER, M. Difficulties students have with the function concept. In A. T. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra: K-12* (pp. 43-60). Reston, VA: NCTM, 1998.

- MILES, M. B., & HUBERMAN, A. M. *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks: Sage, 1994.
- NCTM. *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE, 1991.
- NCTM. *Princípios e Normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM, 2007.
- PONTE, J. O Ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*. Lisboa: Conselho Nacional de Educação, 2003, pp. 21-56, 2003.
- PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42, 2005.
- PONTE, J. P., & CANAVARRO, P. *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.
- SCHOENFELD, A., & ARCAVI, A. On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher*, 81 (6), 420-427, 1988.
- SFARD, A., & LINCHEVSKI, L. *Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link the case of equations and inequality*. Acedido em 8 de Agosto, 2010, de <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/279.pdf>, 1994.
- STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164, 1989.
- USISKIN, Z. Conceptions of school algebra and uses of variables. In F. Coxford (Ed), *The Ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- Yin, R. K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman, 2005.

## Anexo 1

### Tarefas propostas antes e depois do estudo de funções

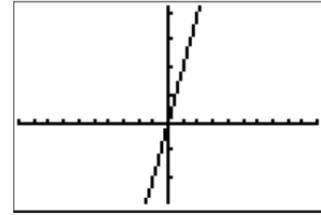
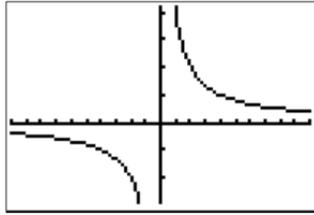
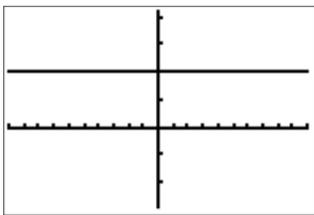
- Os três lados de um triângulo têm diferentes comprimentos. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado.
  - Como podes representar o perímetro deste triângulo?
  - Qual é o perímetro do triângulo se o primeiro lado medir 10 cm?
  - Se o perímetro for de 31 cm, qual é a medida de cada um dos lados do triângulo?
- Numa escola há seis vezes mais alunos do que professores. Referindo por A os alunos e por P os professores, escreve uma equação que traduza o problema (não resolver o problema)
- Observa a seguinte sequência:



Quantos

pontos terá a 30.<sup>a</sup> figura? Apresenta o teu raciocínio.

- Observa os gráficos e para cada um deles explica a relação que existe entre os valores de  $x$  e de  $y$ .



- Observa as expressões seguintes e explica em cada caso o papel que desempenha cada uma das letras utilizadas.
  - $n + 3$
  - $2x + 3 = 4x - 1$
  - $a(b + c) = ab + ac$
- Sem resolveres a equação, diz quantos valores fazem com que  $\frac{2x+3}{4x+6} = \frac{1}{2}$ ? Porquê?
- Se  $n - 246 = 762$ ,  $n - 247 = ?$
- Esta igualdade  $x + y + z = x + p + z$  é verdadeira?
  - sempre;
  - nunca;
  - às vezes. Justifica a tua opção.
- Encontra o valor da seguinte expressão:

$$\frac{z^4}{c^2(b-a)} + \frac{z^4}{c^2(a-b)} =$$

- Para que valores de  $x$  a expressão  $x^2 + x < x^2 + x + 1$  é verdadeira?

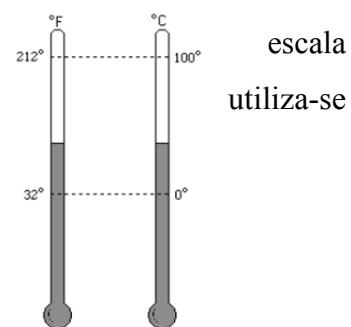
## Anexo 2: Valores Coincidentes

Na maioria dos países da Europa, a temperatura é indicada na Célsius (° centígrados). No norte da Europa e nos Estados Unidos, a escala Fahrenheit (° fahrenheit).

A conversão de graus Celsius (C) para graus Fahrenheit (F) é feita utilizando, por exemplo, a seguinte fórmula:

$$F=1,8C+32$$

1. Qual é o valor da temperatura, em graus Célsius, correspondente a 0°F?
2. Existe uma temperatura que é expressa pelo mesmo valor nas duas escalas. Qual é esse valor? Apresenta o teu raciocínio ou os cálculos que efetuares.



### Anexo 3: Vinho do Porto

O Sr. Silva, produtor de Vinho do Porto, todos os anos produz vinho de excelente qualidade misturando vinhos velhos (com cerca de duas ou mais décadas) com vinhos jovens (com menos de uma década). Por exemplo, o Sr. Silva, ao juntar 200 litros de vinho com 18 anos a 300 litros de vinho jovem, com apenas 8 anos, obtém 500 litros de vinho que classifica como Vinho do Porto com 12 anos.

O Sr. Silva efetua os cálculos seguintes:

$$\frac{200 \times 18 + 8 \times 300}{200 + 300} = 12 \text{ ou } 200 \times 18 + 8 \times 300 = 12(200 + 300)$$

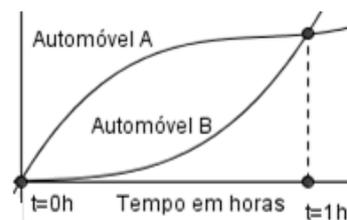
1. Seguindo a regra anterior, juntou-se o vinho de uma pipa de 600 litros, que estava em envelhecimento há 35 anos, a um vinho jovem com 12 anos. Qual deve ser a quantidade de vinho jovem a misturar, para obter um Vinho do Porto com 20 anos?
- 2 O Sr. Silva vai misturar um vinho jovem, de 10 anos, com um vinho velho de 40 anos, para obter um Vinho do Porto com cerca de 30 anos. Qual é a relação entre a quantidade de vinho envelhecido e a de vinho jovem que o Sr. Silva deve misturar? Explica a tua resposta.

#### Anexo 4: Guião da Entrevista

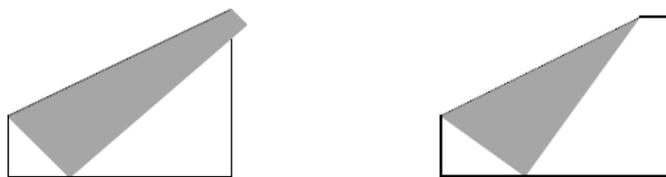
1. Das tarefas que resolveste no estudo de funções qual ou quais destacas mais positivamente? E menos positivamente? Porquê?
2. Da estratégia delineada para o ensino e aprendizagem do tema das funções indica três aspetos que mais gostaste. E que menos gostaste? Porquê?
3. De quantas maneiras podes reescrever  $2x+3$  como soma de duas ou mais quantidades, usando o símbolo  $x$  e apenas números inteiros? De quantas maneiras podes reescrever  $30x^3$ , como produto de quantidades, usando o símbolo  $x$  e apenas números inteiros positivos?
4. Como já sabes, em Álgebra as letras têm diferentes significados. Por exemplo, na equação  $y = ax + b$  o que representam as quatro letras?

5. Supõe que  $5(3z-1) = 10$  então  $\frac{3z-1}{2} = ?$

6. O gráfico dado representa a relação entre a velocidade e o tempo para dois automóveis. Considera que os automóveis iniciam o seu percurso na mesma posição e que viajam na mesma direção.



- a) Estabelece a relação entre a posição do automóvel A e a posição do automóvel B para  $t = 1$  hora. Explica.
  - b) Estabelece a relação entre a velocidade do automóvel A e a velocidade do automóvel B para  $t = 1$  hora. Explica o teu raciocínio.
  - c) Estabelece a relação entre a aceleração do automóvel A e a aceleração do automóvel B para  $t = 1$  hora. Explica o teu raciocínio.
  - d) Qual a relação entre as posições dos dois automóveis durante o intervalo de tempo entre  $t = 0,75$  horas e  $t = 1$  hora? (Isto é, um dos automóveis está a afastar-se do outro?)
7. Com uma folha A4, consegue-se construir dois cilindros diferentes. Qual pensas ser a relação entre os seus volumes? Explica apresentando o teu raciocínio.
  8. Dobra uma folha de papel de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha, tal como mostra a figura:



Qual é o triângulo de maior área que se forma no canto inferior esquerdo da folha? Justifica a tua resposta.