http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n2p69

Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio

A study on algebraic and graphical resolution of 3x3 Linear Systems in the 2nd year of High School

Ana Lucia Infantozzi Jordão
analuciajordao@hotmail.com

Barbara Lutaif Bianchini
barbara@pucsp.br

Resumo

Investiga-se se os alunos do Ensino Médio compreendem a resolução dos sistemas lineares 3x3, por meio de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação, aliados a um ambiente computacional. Foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares 3x3 com o auxílio do *software* educacional Winplot. Como referencial teórico, o estudo baseia-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) e como metodologia, adota os pressupostos da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996). Os resultados dessa pesquisa mostram a relevância do uso do *software* educacional Winplot na contribuição para visualizar e compreender a resolução de sistemas lineares em 3D.

Palavras Chave: Sistemas Lineares, Registro de Representação Semiótica, *Software* Winplot.

Abstract

We investigate if the high school students understand the resolution of linear systems 3x3 through an approach that favors the conversion and the treatment representation register, with a computing environment associate. Was designed, implemented and analyzed a didactic sequence that addresses the graphical and algebraic solution of linear systems 3x3 using the educational software Winplot. We use like a theoretical reference based on the Theory of Representation Registers Semiotics of Raymond Duval (2003) and as a methodology we adopt the assumptions of Engineering Teaching, according Artigue (1996). These survey results show the relevance of the use of educational software Winplot contribution to visualize and understand solving linear systems in 3D.

Keywords: linear systems, Representation Registers Semiotics, Winplot

Introdução

Este artigo contém um recorte da pesquisa intitulada "Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no segundo ano do Ensino Médio" desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda. O estudo levou em conta os conhecimentos prévios que os alunos já possuíam sobre os sistemas lineares 2x2 e, a partir daí, estendeu-se aos sistemas lineares 3x3, conteúdo programático do 2º ano do Ensino Médio.

Na abordagem dos sistemas lineares, já surgiram algumas dificuldades quanto à resolução e compreensão de sistemas de maiores dimensões. Como, então, trabalhar tais conceitos com os alunos, de modo a reduzir suas dificuldades?

Uma investigação feita por Battaglioli (2008) sobre esse tema ressalta a importância de se explorar o registro gráfico na resolução dos sistemas lineares, uma vez que tal procedimento poderá contribuir para que os alunos tenham maior facilidade, não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Explorar o registro gráfico com todas as suas implicações, foi um dos motivos pelos quais se iniciou a pesquisa que, pouco a pouco, foi dando forma e corpo a este trabalho.

Uma vasta bibliografia foi consultada nos estudos preliminares, por meio de leitura de artigos, pesquisas, teses, livros didáticos e documentos oficiais. Citaremos algumas delas.

Machado (1996) no artigo O Universitário principiante x Significado de sistema de equações ressalta a urgência de trabalhar com a mudança de registro tanto do algébrico para o gráfico quanto vice-versa.

Freitas (1999), em seu trabalho intitulado Resolução de Sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno objetivou diagnosticar o sentido que os alunos do final do 2° grau, hoje denominado Ensino Médio, dão às soluções dos sistemas lineares parametrizados mediante questões em que estabelecem a relação entre a solução de um dado sistema, de no máximo três incógnitas e sua representação gráfica. Conclui que utilizar a conversão de registros, passando da escrita simbólica (equações) para o gráfico e do registro gráfico para o algébrico favorece a interpretação e, consequentemente, a compreensão dos resultados obtidos. Porém, uma dificuldade se impõe neste estudo: a limitação da construção de gráficos para dimensões maiores que dois, já que, no momento em que o aluno estuda a discussão de sistemas (segundo ano do Ensino Médio), o aluno ainda não tem acesso a um sistema de coordenadas em três dimensões.

Recorremos às Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) que ressaltam a importância do uso de *software* como ferramenta para o aluno confrontar e conjeturar as diferentes soluções apresentadas contribuindo assim para a construção de seu aprendizado.

Entretanto, são os livros didáticos as ferramentas mais acessíveis aos professores no seu trabalho em sala de aula e a análise de dois deles deu suporte à primeira autora desse artigo para compor a sequência didática. A fim de verificar como os autores abordavam o assunto sobre os sistemas lineares 3x3, recorreu-se, portanto, à leitura de dois livros didáticos: Matemática, Contexto e Aplicações, volume 2, de Luiz Roberto Dante (2008); e Matemática – Ensino Médio, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, volume 2 (2005).

No primeiro livro, o tratamento dado à resolução dos sistemas lineares foi o do escalonamento, enquanto o outro fez uso do método da adição. Quanto à representação gráfica, ambos os livros, apresentam os gráficos, porém, não citam como realizaram sua construção e sugestões de como utilizá-los. Foi a partir dessa análise que surgiu o desafio de realizar uma pesquisa qualitativa que contribuísse para o estudo dos sistemas lineares e que respondesse à questão: "Os alunos do Ensino Médio conseguem compreender a resolução dos sistemas lineares 3x3, quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação aliados a um ambiente computacional?"

Em relação à construção de aprendizagem com ajuda de ambientes informatizados, Allevato (2007) ressalta que em ambientes informatizados de ensino, verifica-se com frequência uma forma de aprendizagem segundo a perspectiva do construtivismo, qual seja, aquela que se constrói sobre a própria experiência. Assim, os estudantes vivenciam experiências de aprendizagem mais significativas e intensas do que é possível apenas com lápis e papel.

Quanto à possibilidade em que o aluno possa estabelecer conjecturas de situações diversas sem manter a forma sequencial que parte de conceitos mais simples em direção a ideias mais complexas.

A proposta da investigação consistiu na análise da resolução algébrica do sistema linear 3x3 pelo método de adição e sua resolução gráfica efetuada com o auxílio do *software* Winplot.

Quanto a opção pelo uso do *software* Winplot, nos apoiamos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008) que sugerem características dos *softwares*. Estes devem conter um certo domínio de saber matemático, oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático, possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções e permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

A discussão de um sistema linear refere-se à determinação de sua resolubilidade, indicando os tipos de soluções possíveis e, a partir daí, a apresentação de um conjunto solução. A determinação do conjunto solução de um sistema linear nem sempre é facilmente elaborada e compreendida pelo aluno. Neste estudo, foi proposta a utilização de uma ferramenta computacional que permitisse ao estudante compreender com mais clareza a solução encontrada. O uso dessa ferramenta pode levar o aluno à aquisição e domínio do saber, dando significado ao objeto matemático, oferecer-lhe diferentes representações inerentes a esse objeto, expandir o conhecimento dos diferentes saberes, relacionando-os entre si e visualizar os planos em 3D em diferentes posições.

Referencial teórico

O referencial teórico que norteou o desenvolvimento da pesquisa baseou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval (2003), que enfatiza a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas. As representações semióticas passam por dois tipos de transformações que são diferentes: os Tratamentos e as Conversões. Os objetos matemáticos só são acessíveis pela sua representação semiótica e cabe ao professor propor as conversões.

Duval (2003) define tratamento como a transformação de representação em outra representação, permanecendo no mesmo sistema, ou seja, uma transformação estritamente interna de um registro. O autor define conversões como transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos.

Segundo Duval (2003), para se analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada.

Para o autor, a compreensão e a originalidade da atividade matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

Em relação ao tema do trabalho, sistemas lineares, usa-se o *tratamento* ao se propor a resolução de um problema por meio de um sistema linear, sistema esse que pode ser resolvido, qualquer que seja o método empregado (adição, substituição, comparação), obtendo-se sempre o mesmo resultado. Usam-se as *conversões* conforme descrevemos a seguir:

- do registro da língua natural para o registro algébrico;
- do registro algébrico para registro de tabelas e registro gráfico;

- do registro algébrico para o registro gráfico;
- do registro gráfico para o registro algébrico.

Metodologia

A pesquisa tem por objetivo analisar as situações didáticas da matemática relacionadas à parte experimental em sala de aula, visando entender as relações entre a investigação e a ação do sistema de ensino e baseia-se, como referencial teórico, nos pressupostos da Engenharia Didática segundo Artigue (1996). Essa metodologia compreende as seguintes fases: análises prévias ou preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori e validação*.

As análises preliminares têm embasamento no quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos já abordados, quando da escolha e levantamento de dados sobre o assunto a ser estudado. Nessa fase, foram consultados documentos oficiais, a fim de se obterem orientações quanto à abordagem do estudo dos sistemas lineares. Em relação às pesquisas, baseamo-nos no estudo desenvolvido por Battaglioli (2008), que realizou uma pesquisa investigativa em torno dos livros didáticos do Ensino Médio, analisando a forma de abordagem do registro algébrico e gráfico por eles utilizada na resolução dos sistemas lineares. Os resultados obtidos mostram que o registro gráfico e o registro de representação semiótica da língua natural estão presentes em dois dos três livros analisados, porém, o registro gráfico aparece apenas em textos explicativos, sendo muito pouco explorado nos exercícios resolvidos ou propostos. Battaglioli (2008) ressalta que o professor deve buscar atividades que contemplem essa carência dos livros didáticos, a fim de que os alunos tenham maior facilidade, não só para entender o seu conjunto solução, mas também para classificá-lo e discuti-lo, quando necessário.

Recorreu-se a Freitas (1999) que, em sua pesquisa intitulada "Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno", objetivou diagnosticar o sentido atribuído pelos alunos às soluções dos sistemas parametrizados, mediante questões que estabelecessem a relação entre a solução de um dado sistema de no máximo três incógnitas e sua representação gráfica. Concordamos com Borba (2001) quando afirma que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento.

A leitura de artigos e a análise de dois livros didáticos do Ensino Médio deram embasamento à pesquisa aqui relatada, justificando a escolha do método de adição para a resolução dos sistemas lineares 3x3, aliados ao uso de uma ferramenta computacional denominada *software* Winplot.

Na fase de concepção e análise *a priori,* que consiste na elaboração experimental da ação em sala de aula, coube ao aluno o papel de ser o sujeito da pesquisa, e ficou a cargo do professor a retomada das questões discutidas, restabelecendo os principais resultados da teoria. Dentre o universo das teorias existentes, foram feitas escolhas que permitem a análise de como se deu a participação dos alunos em relação ao estudo dos sistemas lineares 3x3.

Iniciou-se a primeira parte da sequência didática, objetivando fazer a retomada do conteúdo abordado no Ensino Fundamental, sobre sistemas lineares 2x2. Recorreu-se ao *software* Winplot, a fim de fazer com que o aluno se familiarizasse com essa nova ferramenta computacional, instrumento importante do trabalho a ser realizado dali em diante. Na segunda parte, desenvolveu-se a resolução algébrica dos sistemas lineares 3x3 pelo método de adição.

A *experimentação* é a fase da realização da engenharia com uma determinada população de alunos. Ela se inicia no momento em que se estabelece o contato pesquisador/professor/observador(es) com o grupo de alunos, objeto da investigação. A fim de evitar fracassos da Engenharia Didática nesta fase, é relevante respeitar ao máximo as escolhas feitas nas análises a *priori*.

Na aplicação e análise das sequências, devem-se prever os instrumentos de coleta de dados, organizar e analisar as produções dos alunos, estudar modificações possíveis no estudo proposto, quanto a fundamentos teóricos e metodológicos, analisar os principais resultados em relação à questão de pesquisa e retomar o problema, com síntese das conclusões e avaliação das limitações de pesquisa.

No ano em que a pesquisa foi realizada, a abordagem do estudo dos sistemas lineares no 2º ano do Ensino Médio, foi feita por meio da aplicação da sequência didática. Apresentou-se um cronograma das aulas, a fim de garantir o planejamento escolar. Foram utilizadas 8 aulas de 50 minutos cada uma, para o desenvolvimento das etapas do trabalho, da seguinte forma: duas aulas em classe para a resolução algébrica e uma no laboratório de informática, para a realização da resolução dos sistemas lineares 2x2. Quanto aos sistemas lineares 3x3, foram utilizadas três aulas para a resolução algébrica e duas para a resolução gráfica.

Participaram da realização da sequência didática 45 alunos, divididos em duas turmas: turma A, com 20 e turma B, com 25 alunos. Foram escolhidos 7 alunos como os sujeitos da pesquisa, uma vez que participaram de todo o experimento, de acordo com os critérios combinados: não faltar às aulas e apresentar seus trabalhos registrados individualmente. Desta forma, garantiram-se as análises de todo o experimento em sua íntegra, tanto das atividades realizadas em sala de aula como das realizadas no laboratório de informática.

A parte da atividade em sala de aula, para a realização algébrica dos sistemas lineares 2x2 e 3x3, foi feita individualmente e entregue para a professora/pesquisadora (primeira autora desse artigo) para futuras análises e comentários.

Por ser a primeira vez que os alunos entraram em contato com a resolução do sistema linear 3x3, a professora/pesquisadora explicou-lhes que o tratamento algébrico seria feito de forma semelhante ao do sistema linear 2x2, além de ressaltar a existência de outros métodos usados para a resolução do sistema linear 3x3.

Para apresentarmos nossa análise, apresentaremos a parte da atividade que trabalhamos com o sistema linear 3 x 3, a qual, constava de duas questões.

Iniciamos a atividade com uma situação-problema proposta no registro da língua natural. Esperávamos que os alunos, ao equacionarem, realizassem a transformação das representações por meio da conversão do registro da língua natural para o registro algébrico a fim de descobrirem o número de torcedores pagantes de cada setor do estádio. Desta forma, contemplamos o registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada. No que diz respeito ao tratamento algébrico, objetivávamos que os alunos optassem por um dos métodos de seu conhecimento e usassem o registro da língua natural para escreverem a resposta.

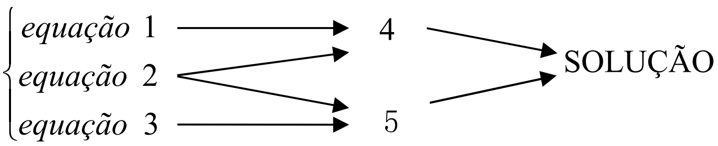
Primeira questão:

Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:

- *para o setor verde, ao preço de R$ 12,00*
- *para o setor azul, ao preço de R$ 18,00*
- *para o setor branco, ao preço de R$ 25,00.*

Sabendo que 38.000 torcedores pagaram R$ 620.000,00 para assistir a essa partida, sendo que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, quantos torcedores pagaram ingresso para o setor verde?

Constatou-se que os alunos não tiveram dificuldade na conversão do registro da língua natural para o algébrico. Entretanto, não realizaram a contento o tratamento algébrico. A pesquisadora sentiu, então, a necessidade de intervir, apresentando resumidamente um esquema de como trabalhar com as três equações, utilizando o método de adição.



Em seguida foi proposta a segunda questão:

Usar o método da Adição para a resolução dos seguintes Sistemas Lineares 3 x 3.

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 20 \\ 6x + 9y - 3z = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 4 \\ 6x + 9y + z = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 32 \\ 9x + 3y + 6z = 16 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ -6x - 6y + 6z = -6 \\ -8x - 8y + 8z = -8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + y + 4z = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + y - z = 20 \\ x + 3y + z = 10 \\ -x + 5y + 3z = 30 \end{cases}$

Pretendíamos, com esta atividade, que os alunos fizessem o tratamento algébrico dos sistemas lineares no método de adição e analisassem a possibilidade da existência ou não de uma solução.

Ao término da realização desta atividade, a pesquisadora, recolheu as resoluções, a fim de registrar os resultados obtidos pelos alunos ao realizarem o tratamento algébrico e fazer uma comparação com os resultados obtidos após os alunos realizarem conjunturas à respeito das posições dos planos com auxílio do Winplot.

Para o trabalho no laboratório de informática, foi elaborado um roteiro com instruções para o uso do *software* Winplot, com as ferramentas necessárias para a representação, no registro gráfico, do sistema linear formado por três equações e três incógnitas em 3D.

A análise *a posteriori e a validação* foram feitas sobre o conjunto de resultados obtidos a partir da exploração dos dados recolhidos durante a experimentação e que contribuíram para o aprendizado. A análise, apoiada no conjunto de dados assim obtidos, foi o momento de colocar em funcionamento todo o saber construído, corrigindo-o quando as análises do desenvolvimento experimental identificaram tal necessidade.

O *Software* Educacional Winplot

O *software* educacional Winplot é um programa gráfico que permite a construção e animação de gráficos em duas dimensões 2D e em três dimensões 3D, por meio de tipos distintos de equações (explícitas, implícitas, paramétricas e outras). Foi desenvolvido pelo professor *Richard Parris "Rick",* por volta de 1985.

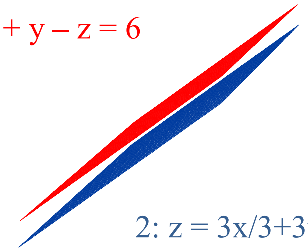
A fim de contribuir para as práticas docentes inovadoras e incentivar posturas conscientes e críticas em relação à seleção de *softwares* educacionais, Batista (2004) desenvolveu um repositório *SoftMat*, contendo um conjunto desses *softwares* desenvolvidos para Matemática do Ensino Médio, acompanhados de suas respectivas avaliações de qualidade. Dentre estes, consta o Winplot. Essas avaliações sobre os *softwares* foram realizadas por professores e licenciados em Matemática, utilizando uma metodologia de avaliação de qualidade de *softwares* educacionais. A avaliação do *software* Winplot foi realizada na Universidade Estadual do Norte Fluminense, durante um curso de extensão. Segundo Batista (2004), o Winplot foi considerado como sendo bastante coerente com as propostas dos PNLEM (2005), contribuindo para a construção do conhecimento e permitindo estabelecer conjecturas a partir da visualização da movimentação dos gráficos, aspecto fundamental para o desenvolvimento da resolução da sequência didática proposta nesta pesquisa.

Outro fator preponderante na escolha do *software* Winplot, apontado por Batista (2004), é a possibilidade de se construir o gráfico em três dimensões 3D, condição fundamental, já que o conteúdo matemático trabalhado reporta a três planos no espaço. Há outros fatores significativos que levaram à escolha do *software* Winplot, a saber: ser de fácil manuseio, ocupar pouca memória no computador, possibilitar movimento dos planos e ser um programa de domínio público.

Para exemplificarmos a realização do tratamento algébrico no método de adição e a resolução gráfica com auxílio do *software* Winplot, foi escolhido um sistema possível indeterminado:

$$\begin{cases} 1: \quad x+y-z=6 \\ 2: 3x+3y-z=10 \\ 3: \ 2x+2y-z=1 \end{cases}$$

1: x + y – z = 6



2: z = 3x/3+3y/3-10

Equações: 1 e 2 $\begin{cases} -3x-3y+3z=-18 \\ \ 3x+3y-3z=10 \end{cases}$ +

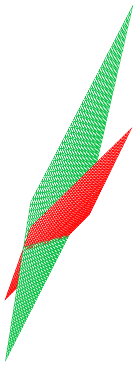
Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico, deveriam encontrar a equação 4: 0x + 0y + 0z = -8 e, nesse momento, concluiriam que o sistema seria impossível. Porém, acredita-se ser relevante que os alunos conheçam qual é a posição relativa dos três planos.

Os alunos deveriam prosseguir o tratamento algébrico do sistema linear, a fim de verificarem o que ocorre ao resolverem o sistema linear formado pelas equações 1 e 3 e, consequentemente, conhecerem a posição relativa desses dois planos.

Equações: 1 e 3 $\begin{cases} -2x-2y+2z=-12 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$ +

$$0x + 0y + z = -11$$

$$5: \quad z + 11 = 0$$



3: z = 2x+2y-1

1: z = x+y-6

Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico do sistema linear formado pelas equações 1 e 3, encontrariam uma equação. Isso poderia levá-los a perceber que esses planos se interceptariam segundo uma reta. Os alunos deveriam resolver o sistema constituído pelas equações 2 e 3.

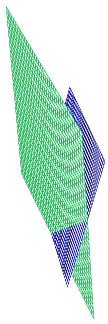
Equações: 2 e 3 $\begin{cases} -6x-6y+2z=-20 \\ \ 6x+6y-3z=3 \end{cases}$ +

$$0x + 0y - z = -17$$

$$6: \quad z - 17 = 0$$

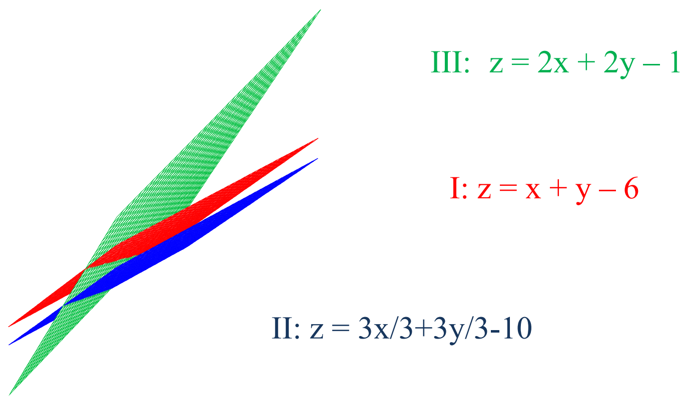
2: z = 3x/3+3y/3-10

3: z = 2x+2y-1



Assim, ao encontrarem as equações: z + 11 = 0 e z - 17 = 0, os alunos deveriam interpretar que, se as retas são paralelas, os planos I e II são paralelos, enquanto o plano III os intercepta segundo retas paralelas.

Com ajuda do *software* Winplot, os alunos visualizariam que os planos se encontram dois a dois, não havendo ponto comum que pertença aos três. Dessa forma, o sistema linear é impossível.



S = Ø

Ao longo de nossa pesquisa, verificamos que os alunos tranferem o conhecimento adquiridos no estudo do sistema linear 2 x 2 para o sistema linear 3 x 3.

Selecionamos o protocolo (Fig.1) para mostrar que o aluno N registrou suas conclusões sobre a abordagem do sistema linear 2x2 e as associou à resolução do sistema linear 3x3.

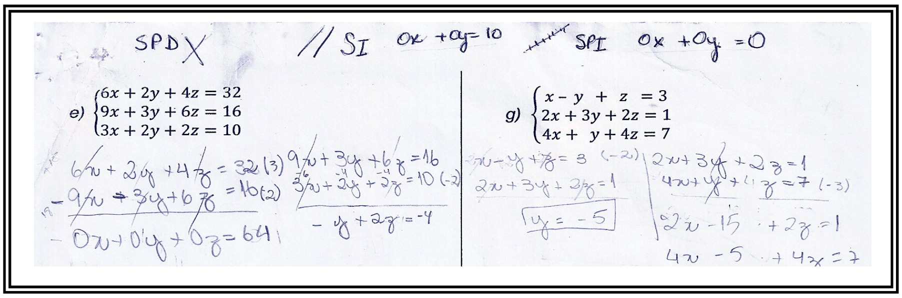


Figura 1: Protocolo do aluno N: registro das conclusões sobre sistema linear 2x2.

Desta forma, acreditamos na importância do uso da ferramenta computacional para propiciar o aluno o acesso ao registro gráfico do sistema linear 3 x 3.

O protocolo (Fig. 2) nos leva a concluir, que o aluno ao ter percebido que os coeficientes das equações eram os mesmos, sem ter realizado o método passo a passo, concluiu que o sistema é impossível e estabeleceu seu conjunto solução como S = Ø, não percebendo que a solução do sistema está aliada intersecção dos três planos no espaço.

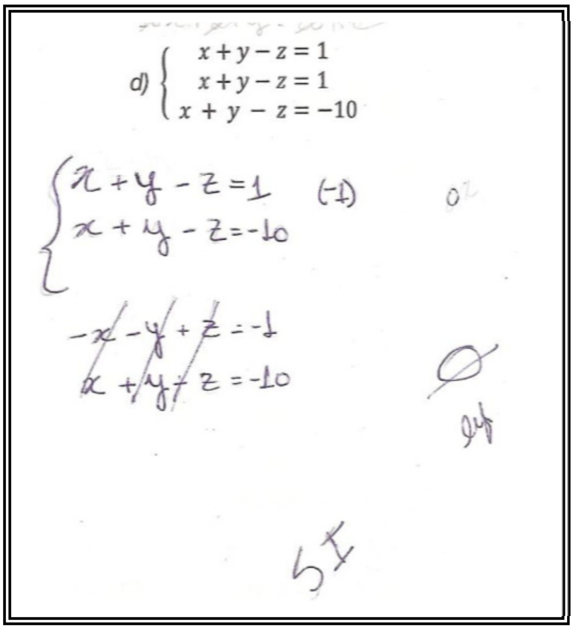


Figura 2: Protocolo do aluno L e A: classificação do sistema linear sem a interpretação das posições dos planos.

Entretanto, para constatarmos este fato, ouvimos a áudio gravação para nos certificarmos das observações dos alunos L e A durante a realização da questão. Mostramos os depoimentos a seguir:

A: “Multiplica por -1, vão sumir todos menos o número”.

L: “Nem precisa fazer, são todos iguais, dá tudo zero”.

A: “Não dá tudo zero, dá igual a -11”.

L: “É, tô falando de *x*, *y* e *z*”.

A: “Tá, o sistema é SI”.

O protocolo (Fig.3), nos leva a entender que o aluno realizou o tratamento algébrico sem dificuldades. Entretanto, não classificou o sistema linear e somente o fez corretamente no laboratório de informática.

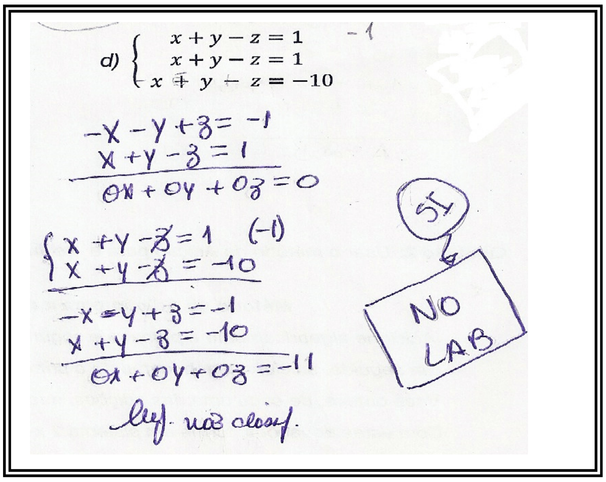


Figura 3: Protocolo aluno R: recorreu ao registro gráfico para classificar o sistema linear.

Assim, entendemos quando Duval (2003) ressalta:

> A compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor pelo menos dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. (DUVAL, 2003, p. 22)

O protocolo (Fig. 4) destacou-se entre os demais, uma vez que o aluno preocupou-se com a interpretação do sistema linear pelo método de adição aplicado a cada duas equações, indicando o tratamento gráfico que se pode dar a cada duas equações trabalhadas.

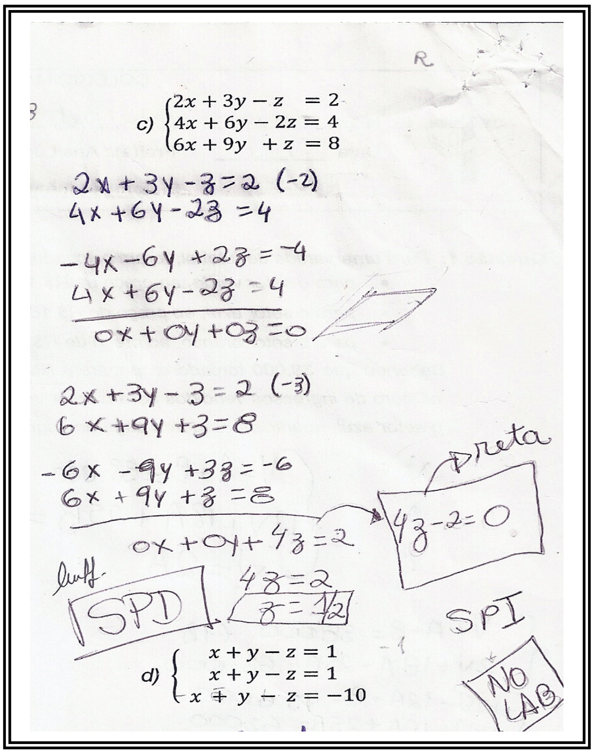


Figura 4: Protocolo aluno R: conclusões na realização do tratamento algébrico.

O protocolo deste aluno nos leva a concluir que ao realizar o registro gráfico corretamente passou a compreender o significado das equações obtidas. Ao lado de z = $\frac{1}{2}$, sinalizou ser uma reta de equação: 4z – 2 = 0 e, ao lado da equação 0x + 0y + 0z = 0, esboçou dois planos coincidentes e, baseado no registro gráfico, classificou como um sistema possível indeterminado.

Além do protocolo analisado recorremos a gravação para constatarmos a conversa entre os alunos R e I. Vale lembrar que o tratamento algébrico foi realizado individualmente em classe e o diálogo a seguir foi registrado no laboratório em que a atividade foi resolvida em duplas.

R: *"Olha quando deu tudo zero os planos dão juntos"*.

I, *"É, é a mesma coisa com o outro sistema, as retas eram coincidentes"*.
R: *"Vê o outro como dá"*.
I: "*O meu deu uma reta"*.
R: "*O meu deu* $z = \frac{1}{2}$ *eu coloquei SPD.*
I: "*Não, é uma reta"*.
R: "*É, 4z - 2 = 0 é reta"*.
I: "*Então é SPI"*.

Verificamos que a dupla R e I compreendeu o significado de $z = \frac{1}{2}$ e concluiu corretamente o sistema como possível indeterminado.

Assim, constatamos a relevância de não se confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Segundo Duval (2003):

> É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso compreensão em matemática, e no o inverso, qual seja o "*enclausuramento*" de cada registro. (DUVAL, 2003, p.23)

Verificamos no protocolo (Fig. 5) realizou o tratamento algébrico, o registro gráfico e a classificação corretamente. Entretanto, pelos registros de áudio gravação, constatamos que a dupla, apesar de ter classificado corretamente, não entendeu que se tratava de três planos que se interceptam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

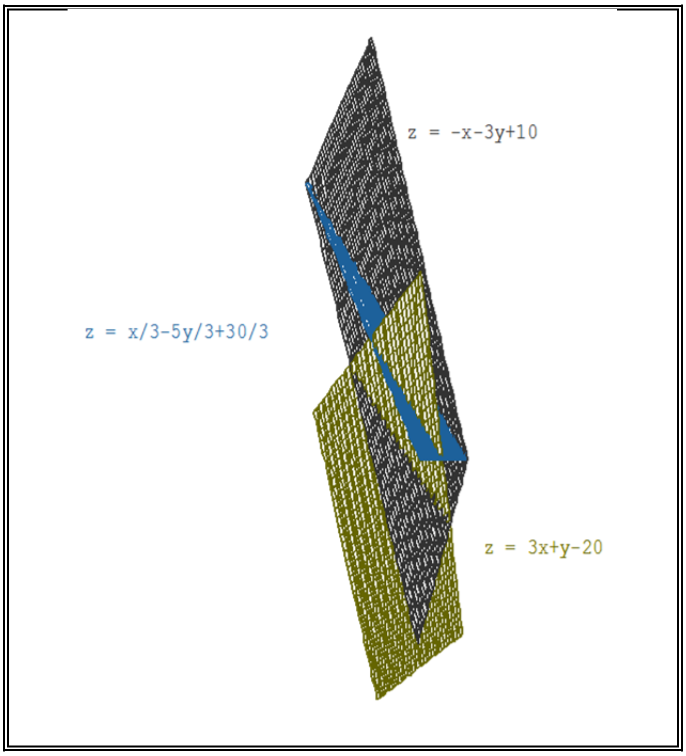


Figura 5: Protocolo da dupla J e N: dificuldade na visualização das posições dos planos

J: “Nossa, olha o que deu”.

N: “Vira pra ver melhor”.

J: “Parece que o azul e o cinza são paralelos”.

N: “É, vamos por SI”.

Acreditamos que a dupla J e N apresentou dificuldade em visualizar que os três planos se interceptavam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras. Isso nos leva a entender que o registro gráfico privilegia a abordagem visual ao facilitar a interpretação das posições relativas dos planos, o que não implica na eliminação do tratamento algébrico.

Considerações Finais

A proposta deste artigo é apresentar a análise feita durante a realização da sequência didática em que foram explorados os registros de representação semiótica, quanto ao tratamento e conversão de registros, na abordagem do estudo dos sistemas lineares 3x3.

Os alunos resolvem os sistemas lineares de forma mecânica, sem dar sentido a eles. Propusemos uma sequência, por meio de atividades e situações-problema, propiciando o uso de pelo menos dois registros de representação semiótica, a fim de contribuir para a construção do aprendizado. Convém ressaltar aqui a relevância de interpretar e compreender a solução dos sistemas lineares. Para tanto, foi utilizado o *software* Winplot, que possibilitou ao aluno visualizar, compreender e interpretar a solução do sistema linear 3x3 e estabelecer relações entre os coeficientes das equações no sistema linear 2x2. O tratamento algébrico do sistema linear 3x3 foi desenvolvido pelo método de adição. Constatamos que os alunos realizaram a conversão do registro da língua natural para o algébrico. Mostraram dificuldade na realização do tratamento pelo método de adição, no que se refere às operações elementares. Entretanto, observou-se que este método foi o facilitador na interpretação das posições relativas dos planos no espaço.Tendo em vista todo o processo utilizado no desenvolvimento desta pesquisa, verificou-se que os alunos transferem os conhecimentos adquiridos no estudo dos sistemas lineares 2x2 para a resolução dos sistemas lineares 3x3 (Fig. 1). Constatou-se este fato, quando o aluno obtém, duas a duas, equações do tipo $0x + 0y + 0z = a$, em que $a \in R$. Embora as classifique corretamente como sistema impossível, somente com o uso do *software* Winplot, conclui que são três planos paralelos (Fig. 2). Verificamos que o aluno ao obter duas equações do tipo $0x + 0y + 0z = 0$ e $0x + 0y + 0z = a$, em que $a \in R$ apresenta dúvida quanto à classificação do sistema linear, se é impossível ou possível indeterminado, não percebendo que a solução do sistema está aliada à intersecção dos três planos no espaço. Essa dúvida só foi esclarecida ao utilizar o *software* Winplot, classificando o sistema linear como impossível. (Fig. 3).

O aluno, ao combinar duas equações do sistema linear 3x3 e ao encontrar o valor de uma das incógnitas, $x = a$ ou $y = b$ ou $z = c$, onde $a, b, c \in R$, classifica-o como sistema possível determinado, pois traz o conhecimento adquirido no estudo do sistema linear 2x2 e faz, antecipadamente e erroneamente, essa classificação. O *software* Winplot contribui para que o aluno compreenda que essas equações representam uma reta e, portanto, dois planos são paralelos e o terceiro os intercepta, segundo duas retas paralelas. (Fig. 4).

Mesmo que o *software* Winplot apresente a ferramenta que possibilita a movimentação dos planos, os alunos mostraram dificuldade na visualização dos três planos que se interceptam dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

Eles obtêm a visualização parcial de dois planos, não integrando sua intersecção com o terceiro, desta forma classificam corretamente como sistema impossível, mesmo não visualizando a situação correta. (Fig. 5).

Feitas estas considerações, espera-se contribuir para que os alunos do Ensino Médio possam compreender a resolução dos sistemas lineares, quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registros de representação aliados a um ambiente computacional. Observou-se no decorrer da aplicação da sequência didática que, na resolução dos sistemas lineares 3x3, é relevante o uso do tratamento algébrico e gráfico concomitantemente, para melhor compreensão e aprendizagem, por parte dos alunos, deste tipo de sistemas lineares.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Aspectos Emergentes da Utilização do Computador na Educação Matemática** in ALLEVATO N. S. G. e FRANZONI M. (org) Reflexões sobre a Formação de Professores e o ensino de Ciências e Matemática. Campinas: Alínea, 2007.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

BATISTA, S.C.F. Softmat: **Um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio – Um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais.** Tese de Mestrado.Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. UENF. 2004.

BATTAGLIOLI, C.S.M. **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos.** Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo. 2008.

BISOGNIN, E.; CURY, H. N.(2009). **Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações**. BOLEMA, Rio Claro.

BRASIL. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA.(2005). **Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Médio: Matemática (PNLEM)**. Brasília. MEC.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2008) **Orientações curriculares para o ensino médio: Matemática e suas tecnologias**, Secretaria de Educação Básica, Brasília.

BORBA, M. C. **Informática e Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática, 2. Belo Horizonte: Autêntica, 2001

DANTE, L. R. **Matemática, Contexto & Aplicações.** Volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In: MACHADO, S.D.A.(Orgs.). Aprendizagem em

Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação),11 – 33. 2003.

FREITAS, I.M. **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno.** Tese de Mestrado. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo. 1999.

JORDÃO, A.L.I. **Um Estudo sobre resolução algébrica e gráfica de Sistema Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo. 2011.

MACHADO, S. D. A. **O Universitário principiante x Significado dos Sistemas de Equações** in Anais do IV EPEM – pp. 241-248. São Paulo: SBEM, 1996. SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação.

SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio.** vol. 2. 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 2005.