

# CONHECIMENTOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA SOBRE A SIMETRIA DE REFLEXÃO

CONHECIMENTOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Iranete Lima<sup>1</sup>

**Resumo:** Este artigo tem origem em uma pesquisa<sup>2</sup> desenvolvida no âmbito da Didática da Matemática. Nele abordamos a problemática da criação de um modelo que represente a forma como o aluno entende uma determinada noção estudada, o que a literatura vem denominando de *modelização de conhecimentos* de alunos (BALACHEFF 1995, GAUDIN 2005, MIYAKAWA 2005).

A *modelização* de conhecimentos é reconhecidamente objeto de estudo tanto das Ciências Cognitivas quanto da Informática. No entanto, a pertinência dessa modelização no campo da Didática da Matemática ainda é uma interrogação; interrogação que foi uma das temáticas da *XII<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques en France* em 2003 (MERCIER & MARGOLINAS 2005), o que mostra a força dessa preocupação para os estudiosos da área. Para Balacheff e Margolinas, "modelizar é dar uma forma que permite o raciocínio, o cálculo, para compreender e decidir". (BALACHEFF & MARGOLINAS 2005, p. 104). É, portanto, nesta problemática que se insere a pesquisa que ora apresentamos.

A principal motivação para a realização da modelização de conhecimentos neste quadro foi subsidiar o estudo posterior sobre as *decisões didáticas* tomadas pelos professores. "Chamamos de *decisões didáticas* aquelas decisões tomadas pelos professores com a intenção de levar o aluno a aprender um determinado conhecimento" (LIMA, 2006, p.29). Nesse caso, o conhecimento visado é a noção de simetria de reflexão. Ressaltamos, porém, que neste artigo focalizamos a problemática da modelização de conhecimentos dos alunos<sup>3</sup>.

Apresentamos, inicialmente, as razões pelas quais escolhemos a simetria de reflexão como noção matemática a ser estudada e o quadro teórico-metodológico de referência. Em seguida, apresentamos em linhas gerais o estudo teórico, privilegiando os resultados de pesquisas precedentes e simetria de reflexão do ponto de vista dos livros didáticos. O estudo experimental será apresentado a partir da análise da produção de um dos alunos participantes da pesquisa e, em seguida, trazemos uma síntese dos resultados da pesquisa, tomando como base esta produção.

**Palavras-chave:** Modelização de conhecimentos, Modelo cK $\Phi$ , Concepção, Procedimentos de resolução, Simetria de reflexão.

## SIMETRIA DE REFLEXÃO: CONTEXTO DA PESQUISA

A escolha da simetria de reflexão como noção matemática foi motivada, em primeiro lugar, pelo papel importante que a geometria ocupa nos estudos de modelização de conhecimentos do aluno, em particular, na França, onde foi realizada a pesquisa. Em segundo, as transformações têm um lugar privilegiado no ensino secundário naquele país. Conforme as orientações encontradas nos programas escolares em vigor<sup>4</sup>, o aluno deve começar a estudar as primeiras noções de simetria de reflexão<sup>5</sup> a partir do segundo ciclo da escola primária<sup>6</sup>. A aprendizagem das transformações deve evoluir de maneira tal que, no fim do ensino secundário, ele seja capaz de reconhecer a transformação de uma figura por uma simetria, uma translação, uma rotação ou uma composição dessas transformações.

Outra motivação dessa escolha é certa homogeneidade encontrada nos resultados das pesquisas anteriores com relação às concepções dos alunos sobre a simetria de reflexão. De fato, as concepções dos alunos foram amplamente estudadas nas pesquisas; os resultados obtidos se caracterizam como um dos pontos de partida para a realização da modelização. Dentre os estudos realizados destacamos Hart (1981) na Inglaterra; Grenier & Laborde (1987), Grenier (1988), Tahri (1993) e Miyakawa (2005), na França.

Como exemplo de concepção identificada pelas pes-

quisas, citamos a *concepção paralelismo*. Segundo esta, os alunos constroem a imagem de um segmento com relação a um eixo de simetria dado, paralelo a este segmento, independentemente da orientação do eixo na folha de papel. Uma explicação dos pesquisadores para esse comportamento do aluno é o amplo domínio de validade desta concepção. Com efeito, a mobilização desta mesma concepção pode conduzir o aluno a dar uma resposta correta, dependendo dos valores das variáveis do problema proposto.

No Brasil, o ensino das transformações geométricas, em particular da simetria de reflexão, ainda se constitui em um domínio de preocupações relativamente novas, tendo sido impulsionado a partir da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL 1997, 1998). Ressaltamos, porém, que várias pesquisas vêm sendo desenvolvidas neste domínio. Entre elas, podemos citar as pesquisas de Araújo & Gitirana (2002, 2000) e Lima et al. (1999). Os resultados das pesquisas respondem a várias questões abertas sobre as dificuldades dos alunos em relação a esta noção. No entanto, ainda se faz necessário aprofundar estes estudos, principalmente sobre os conhecimentos que os alunos mobilizam quando resolvem problemas envolvendo a simetria e os procedimentos que utilizam na resolução destes problemas.

<sup>1</sup> Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Centro Acadêmico do Agreste – CAA.

<sup>2</sup> Esta pesquisa foi desenvolvida no Laboratório Leibniz – IMAG, em Grenoble, na França, no quadro da tese de doutoramento de Iranete Lima (LIMA, 2006) e financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

<sup>3</sup> O texto completo pode ser acessado no seguinte endereço: <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00208015/fr/>.

<sup>4</sup> Programa em vigor na época do desenvolvimento da pesquisa: *Programmes Scolaires* (1996).

<sup>5</sup> Symétrie orthogonale.

<sup>6</sup> Este ciclo de ensino compreende a Educação Infantil e os dois primeiros anos do Ensino Fundamental, no sistema de ensino brasileiro.

## MODELO CK $\phi$ E QUESTÕES DE PESQUISA

Para realizar a modelização de conhecimentos do aluno, utilizamos o Modelo CK $\phi$  "Concepção, Conhecimento e Conceito", desenvolvido por Balacheff (1995). Nesse modelo, uma concepção é definida como uma estrutura mental atribuída a um sujeito por um observador do seu comportamento, e a aprendizagem é a passagem de uma concepção a outra. Na formalização proposta pelo modelo, uma concepção C é caracterizada pelo quádruplo (P, R, L,  $\Sigma$ ), em que P é um conjunto de problemas sobre o qual a concepção C é operatória, R é um conjunto de operadores que permitem o tratamento do problema, L é um sistema de representação que permite a expressão dos problemas (P) e dos operadores (R) e  $\Sigma$  é uma estrutura de controle que assegura a não-contradição da concepção. Esta estrutura permite atestar a legitimidade e a validade de uma ação do sujeito.

O modelo CK $\phi$  pressupõe que um sujeito, diante de um problema a resolver, pode dispor de várias concepções sobre uma mesma noção e mobilizar uma ou outra em função do problema proposto. Estas concepções podem ser incompletas, errôneas ou, ainda, local ou globalmente verdadeiras, tendo em vista que cada uma delas tem um domínio de validade. Balacheff (ibid.) destaca o paradoxo da coabitação em um mesmo sujeito, observado em diferentes situações, de conhecimentos contraditórios. Para ele, a ação racional de um sujeito resolvendo um problema é localmente coerente. Assim, não há transferência natural de um conhecimento por ele mobilizado, de uma situação para outra, por mais evidente que pareça o isomorfismo dessas situações aos olhos de um observador. Dessa forma, uma concepção C é legítima numa esfera da prática, mas existem problemas que podem revelar sua falsidade ou seus limites e problemas que permitem, melhor que outros, reforçá-la ou desestabilizá-la.

No processo experimental, estudamos, em particular, as concepções de alunos de classes equivalentes ao oitavo ano do Ensino Fundamental, como também os procedimentos que esses alunos utilizam para resolver problemas de identificação e de construção da imagem de figuras por simetria de reflexão. Porém, antes desta etapa, realizamos o estudo teórico que subsidiou a modelização.

Apoiada sobre a formalização proposta pelo modelo CK $\phi$ , fizemos a escolha de entrar na modelização de conhecimentos a partir das estruturas de controle ( $\Sigma$ ) de concepções sobre a simetria de reflexão. Considerando o caráter *a priori* do estudo, essa escolha foi baseada na hipótese de que, dentre os elementos de uma concepção, estas estruturas têm um papel de destaque no estudo de comportamentos dos sujeitos, tendo em vista que explicitam o seu funcionamento na condução da ação por eles realizada (GAUDIN, 2005). Dessa escolha, originaram-se algumas questões de pesquisa, dentre as quais citamos as seguintes:

- Como caracterizar o conjunto de controles de concepções suscetíveis de serem mobilizadas por um aluno na resolução de um problema relativo à simetria de reflexão?
- Que procedimentos os alunos utilizam para resolver determinados tipos de problemas de simetria de reflexão?

Em seguida, apresentamos em linhas gerais o estudo teórico realizado.

## ESTUDO TEÓRICO

Levando em consideração a característica *a priori* do estudo, optamos por *modelizar* conhecimentos de um aluno genérico.

Em um primeiro momento, delimitamos as classes de problemas de simetria de reflexão, as variáveis didáticas e os valores destas variáveis que foram considerados na modelização. Como exemplo destas variáveis e valores, citamos: *natureza da figura F* (geométrica usual ou não, simples, complexa); *especificidade da figura F* (possui segmentos paralelos ou não, possui eixos de simetria ou não); *orientação do eixo de simetria na folha de papel* (horizontal, vertical, oblíquo). Para tanto, tomamos como ponto de partida os resultados de pesquisas sobre a construção da imagem de um segmento por simetria de reflexão, as orientações dos programas oficiais em vigor na França e o resultado da análise de livros didáticos adotados nas escolas francesas.

Em um segundo momento, partindo da hipótese de que as estruturas de controle ( $\Sigma$ ) explicitam os critérios responsáveis pela escolha, decisão, adequação e validade de uma ação do sujeito que resolve um problema (GAUDIN, 2005), realizamos estudos do ponto de vista matemático e didático das classes de problemas escolhidas, em função da análise dos livros didáticos.

Apresentamos, a seguir, alguns resultados das pesquisas levados em conta neste estudo e alguns aspectos da análise dos livros didáticos.

## RESULTADOS DE PESQUISAS

Ancorada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), Grenier (1987, 1988) estudou amplamente as concepções de alunos do ensino secundário sobre a simetria de reflexão. Nesses estudos, identificou as concepções a partir dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas.

Um aspecto questionado pela pesquisadora concerne à transferência natural, ou não, de um conhecimento já mobilizado pelo aluno na resolução de outro problema. Na busca de respostas a esta questão, ela propôs aos alunos uma atividade de construção à mão livre de imagens de figuras formadas por segmentos (um ou dois) e de figuras constituídas de pontos isolados (um ou dois). A finalidade dessa atividade foi verificar se um aluno que constrói o simétrico de um ou de dois pontos isolados, com relação a um eixo de simetria dado, seria capaz de construir o simétrico de um segmento ou de uma figura formada por dois segmentos. Os resultados da pesquisa mostram que os alunos não tiveram dificuldades para construir a imagem de figuras formadas por pontos isolados, porém eles não reinvestiram esses conhecimentos para construir a imagem de figuras formadas por segmentos.

Os resultados desses estudos mostram também que a conservação da natureza do objeto (imagem de um ponto é um ponto e a imagem de um segmento é um segmento) é um conhecimento estável nos alunos, em revanche da conservação do comprimento dos segmentos que se revelou um conhecimento menos estável.

Tomando como referência os resultados das experimentações, Grenier & Laborde (1987) propuseram uma tipologia de procedimentos suscetíveis de serem mobilizados pelos

alunos na resolução de problemas de construção da imagem de uma figura por uma simetria de reflexão:

*Direção ortogonal:* a determinação de um ponto da figura-imagem se faz em função de uma direção ortogonal ao eixo de simetria;

*Direção por prolongamento:* esse procedimento dá por imagem de um ponto um ponto situado no prolongamento de uma direção materializada pela figura objeto;

*“Direção horizontal” ou “direção vertical”:* dão por ponto-imagem um ponto situado sobre uma mesma reta horizontal ou uma mesma reta vertical que o ponto objeto (GRENIER & LABORDE 1987, p. 71-72).

Nessa mesma direção, Tahri (1993) estudou as concepções dos alunos sobre a simetria de reflexão. Seu estudo comporta, por um lado, a elaboração de um estudo teórico de concepções dos alunos e, por outro, a elaboração de um dispositivo experimental para modelizar as decisões didáticas tomadas por professores no contexto de aprendizagem em um ambiente computacional. Para construir tanto o modelo teórico quanto o dispositivo experimental, apoiou-se fortemente sobre os resultados das pesquisas de Grenier e Laborde (ibid.). Assim, a atividade proposta aos alunos de uma classe equivalente ao sexto na do Ensino Fundamental consistiu na construção da imagem de um segmento por uma simetria de reflexão. Segundo a autora, a construção dessa imagem poderia se realizada por um dos três tipos de procedimentos seguintes:

**Procedimento global:** dizemos que o procedimento de construção da imagem do segmento é global se nesta imagem não intervêm outros objetos senão o segmento construído.

**Procedimento semi-analítico:** dizemos que o procedimento de construção da imagem do segmento é semi-analítico ou semiglobal se somente uma das extremidades do segmento é construída. O segmento em seguida é construído “globalmente” apoiando-se nesta extremidade;

**Procedimento analítico:** dizemos que o procedimento de construção da imagem do segmento é analítico se esta imagem é obtida depois da construção das duas extremidades. O aluno constrói a imagem da primeira extremidade, depois, da segunda extremidade e, em seguida, define o segmento imagem juntando estas duas extremidades. (TAHRI, 1993, p. 49-50).

Em função dos procedimentos de resolução que podem ser eventualmente utilizados pelos alunos, Tahri (ibid.) propôs uma classificação de concepções, dentre as quais citamos as seguintes:

*Concepção simetria ortogonal* (cf. Figura 1): a imagem do segmento é obtida por simetria ortogonal com relação ao eixo.

*Concepção paralelismo* (cf. Figura 2): o segmento e sua imagem são paralelos e de mesmo comprimento.

*Concepção simetria central* (cf. Figura 3): o segmento imagem é obtido por simetria central, seja no prolongamento do segmento objeto, seja paralelo e de sentido inverso (TAHRI, 1993, p. 68-69).

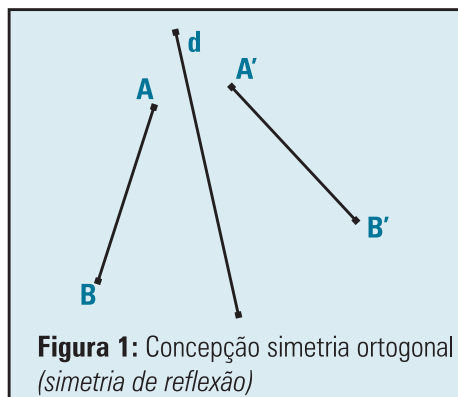


Figura 1: Concepção simetria ortogonal (simetria de reflexão)

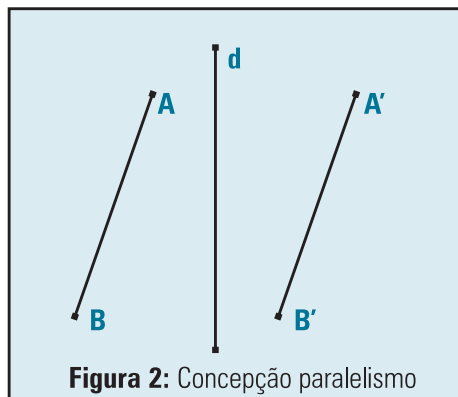


Figura 2: Concepção paralelismo

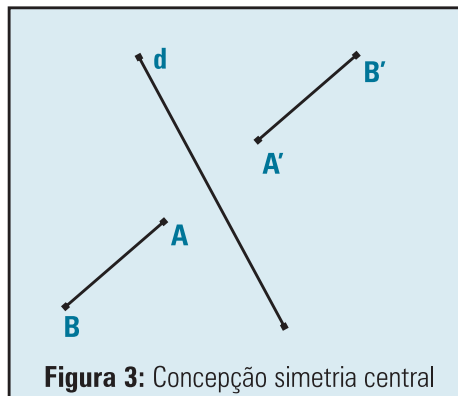


Figura 3: Concepção simetria central

Vale ressaltar que essa tipologia de procedimentos baseia-se apenas na direção da reta suporte dos pontos objeto e imagem, e a “distância” ao eixo de simetria é tratada como sendo implícita aos procedimentos de construção.

Os resultados do estudo experimental mostram que os alunos tiveram as mesmas dificuldades e mobilizaram as mesmas concepções (corretas, ou não, do ponto de vista da matemática) identificadas nas pesquisas precedentes, mesmo utilizando um ambiente computacional. Mostram também que a distância considerada pelos alunos é sempre sob a forma de uma “distância” ao longo de direções privilegiadas, como o prolongamento de um segmento, por exemplo. Outras vezes, essa “distância” é percebida globalmente como uma posição de equilíbrio entre as duas figuras (inicial e imagem) e o eixo de simetria.

Os resultados obtidos e a tipologia de procedimentos e de concepções acima apresentados se constituíram em elemen-

tos fundamentais para a realização da modelização no quadro do nosso estudo. Salientamos, porém, que estas pesquisas estudaram, em particular, as concepções dos alunos concernentes à construção da imagem de segmentos dados, com relação a um eixo de simetria. Dessa forma, as variáveis didáticas consideradas nestes estudos são intrínsecas a esta problemática. Na nossa pesquisa, além de trabalharmos com a construção da imagem de segmentos por simetria de reflexão, interessamos-nos também pelos problemas de identificação e de construção da imagem de figuras mais complexas (formadas por segmentos, polígonos, etc.). Uma vez trabalhando com estas figuras, questionamos-nos sobre as classes de problemas que devíamos considerar no estudo e sobre as variáveis didáticas e seus valores. A hipótese subjacente é que outras variáveis inerentes a estas figuras poderiam fazer emergir novos procedimentos de resolução no processo de modelização. Questionamo-nos também quanto à generalização (ou não) das concepções identificadas no contexto da construção do simétrico do segmento, para o caso das figuras complexas. Dessa forma, o estudo objetivou a aquisição de elementos de respostas a estes questionamentos.

## A SIMETRIA DE REFLEXÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta etapa do estudo teve como objetivo compreender como a simetria de reflexão é introduzida nas classes de *sixième au collège*<sup>7</sup>. Assim, interessamo-nos particularmente pelas definições e propriedades tratadas no ensino, pelos métodos de construção ensinados, pelos tipos de problemas propostos, assim como pelas variáveis didáticas presentes nestes problemas.

Os resultados mostraram que, em consonância com os programas oficiais, todos os livros analisados introduzem a simetria de reflexão (como transformação de figuras) a partir de atividades preliminares, privilegiando a caracterização dessa noção por dobradura e sobreposição de figuras. Entretanto, na parte de sistematização, encontramos, em todas as obras, definições de *figuras simétricas* e de *simétrico de um ponto*. As definições mais adotadas nestas obras são:

*Figuras simétricas*: duas figuras simétricas com relação a uma reta se sobrepõem por dobradura ao longo desta reta.

*Simétrico de um ponto*: dois pontos distintos A e A' são simétricos com relação a uma reta d quando a reta d corta o segmento AA' perpendicularmente no seu ponto médio (LIMA, 2006, p. 56)

Com relação às propriedades, a *perpendicularidade* (ortogonalidade) e a *conservação de distâncias de pontos ao eixo* são abordadas na maioria das obras analisadas de forma implícita, pela construção de pontos simétricos e da mediatriz. Em contrapartida, as propriedades de *conservação* são abordadas explicitamente em todos os livros. São elas: *conservação de comprimento, conservação da medida dos ângulos, conservação do alinhamento dos pontos, conservação de dimensões, conservação das áreas e dos perímetros das figuras*. Vale salientar ainda que a propriedade de *invariância dos pontos*

do eixo pela simetria é abordada nesses livros didáticos. No entanto, a propriedade de *mudança da orientação dos ângulos* pela simetria de reflexão não é tratada explicitamente na maioria das obras analisadas.

Observou-se também que, independentemente da definição de simetria de reflexão adotada, a construção de um ponto simétrico é o primeiro método ensinado em todos os livros. Seguido pelos métodos de construção de um segmento, uma reta, um círculo, simétricos de eixos de simetria, da mediatriz de um segmento e da bissetriz de um ângulo. Estes métodos são geralmente ensinados através da utilização dos instrumentos de desenho (régua graduada, esquadros e compasso).

Os métodos de construção do simétrico de um ponto propostos nestas obras são os clássicos:

**1) Construção do simétrico de um ponto utilizando o esquadro e o compasso**: traçar a reta perpendicular ao eixo com a ajuda do esquadro e, depois, transferir a distância do ponto ao eixo do outro lado deste com o auxílio da régua graduada ou do compasso (cf. Figura 4). As propriedades subjacentes a este procedimento são *perpendicularidade e igualdade de distâncias ao eixo*.

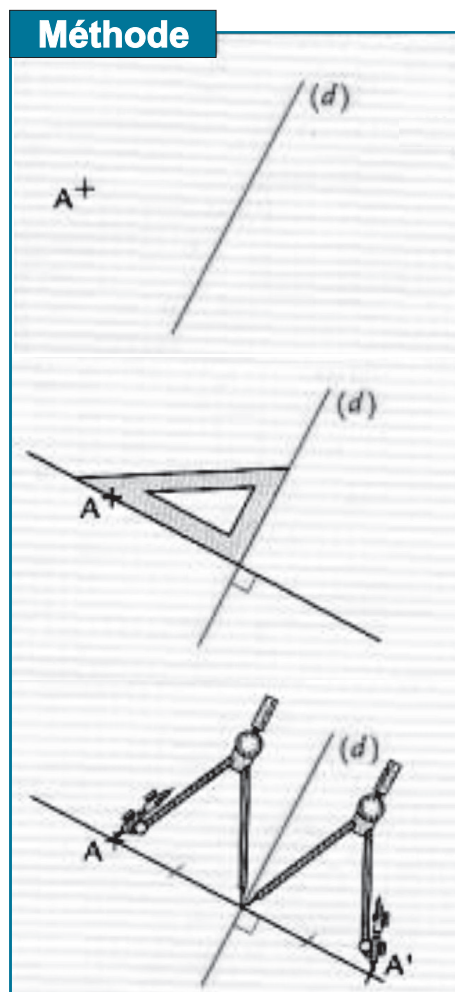
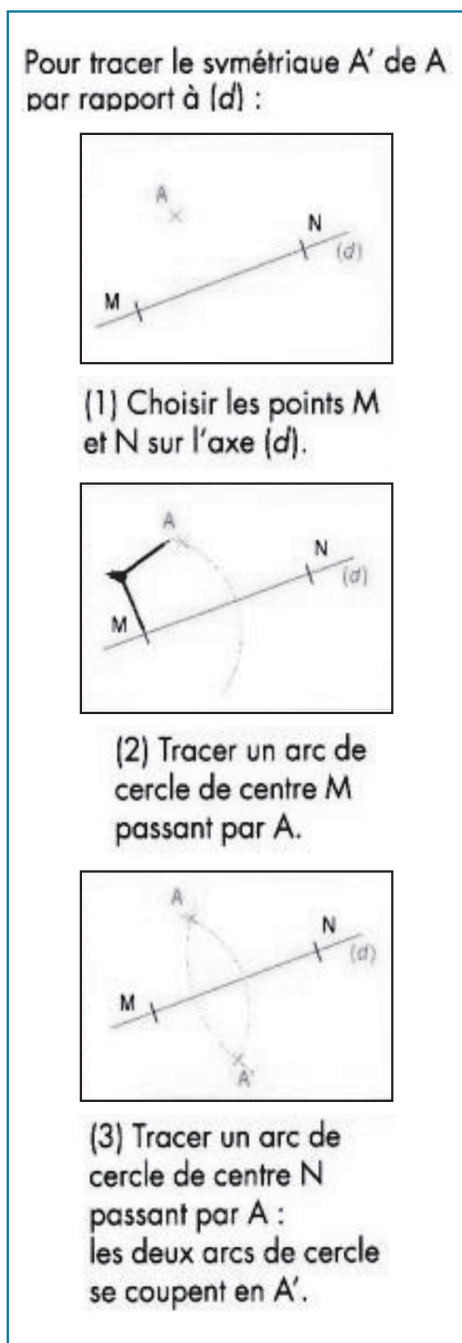


Figura 4. Construção do simétrico de um ponto com esquadro e compasso<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Série equivalente ao sexto ano do Ensino Fundamental. No sistema escolar francês, o ensino da simetria de reflexão é sistematizado nesta série. Analisamos seis obras adotadas frequentemente pelas escolas francesas nesta série.

<sup>8</sup> MALAVAL, J. et al. Collection Transmath Math 6e, Ed. 2000, Paris : Nathan Coleção Transmath, 6e, 2000, p. 198.

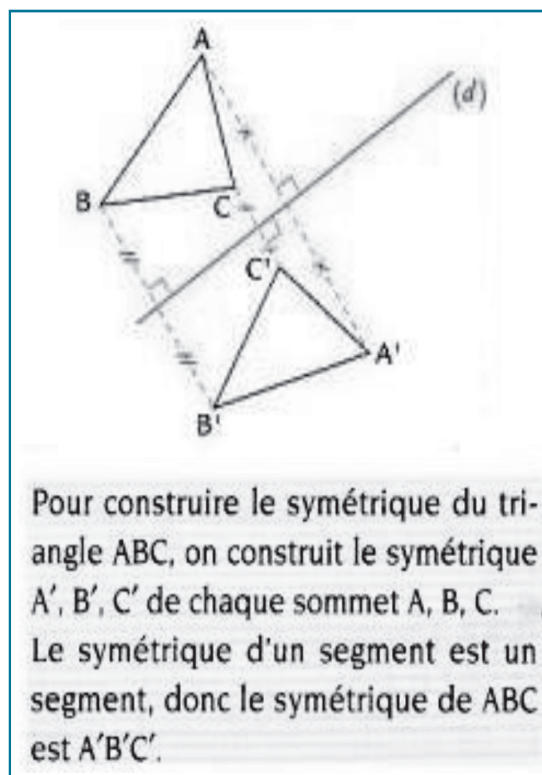
**2) Construção do simétrico de um ponto utilizando o compasso unicamente:** este método de construção se apóia sobre a propriedade de *equidistância*.



**Figura 5.** Construção do simétrico de um ponto com compasso<sup>9</sup>

Os métodos de construção de figuras simétricas (segmento, reta, círculo, triângulo) são comumente ensinados em todos os livros analisados. Isto se faz a partir da construção dos simétricos de pontos característicos da figura (extremidades de um segmento, vértices de um triângulo...) e se apoiando sobre as propriedades de conservação da simetria (alinhamen-

to, comprimento...), como mostra o exemplo a seguir:



**Figura 6.** Construção do simétrico de um triângulo<sup>10</sup>

Com relação aos tipos de problemas propostos nesses livros, todos os autores adotam uma metodologia comum, possivelmente, no intuito de atender aos objetivos fixados no programa oficial. Assim, os problemas mais encontrados são dos tipos seguintes:

- Identificação de figuras simétricas com relação a uma reta  $r$ ;
- Identificação de eixos de simetria;
- Construção de figuras simétricas (à mão livre, sobre papel quadriculado, utilizando instrumentos de desenho);
- Construção de eixos de simetria (à mão livre, sobre papel quadriculado, utilizando instrumentos de desenho).

Os problemas de identificação e de construção de figuras simétricas são privilegiados com relação aos problemas de identificação e de construção de eixos de simetria. Esta subsidiou a delimitação das classes de problemas consideradas na modelização dos controles e na elaboração do dispositivo experimental.

## OS CONTROLES ( $\Sigma$ )

Os resultados do estudo teórico do ponto de vista das pesquisas e do ensino se constituíram na principal ferramenta para a atribuição de critérios e de valores que podem ser considerados pelo aluno na resolução de problemas de construção de figuras simétricas. Os critérios e os valores atribuídos são os seguintes:

<sup>9</sup> CHAPIRON, G. et al. *Collection Triangle mathématiques 6e*, 2e Édition, Paris : Hatier Triangle, 6e, 2000. p. 285. Tradução: para traçar o simétrico  $A'$  de  $A$  com relação à reta  $d$ : (1) Escolha os pontos  $M$  e  $N$  sobre o eixo  $d$ . (2) Trace um arco de círculo de centro  $M$  passando por  $A$ . (3) Trace um arco de círculo de centro  $N$  passando por  $A$ : os dois arcos de círculo se cortam em  $A'$ .

<sup>10</sup> MALAVAL, J. et al. *Collection Transmath Math 6e*, Ed. 2000, Paris: Nathan Transmath, 6e, 2000, p. 199. Tradução: Para construir o simétrico do triângulo  $ABC$ , constrói-se o simétrico do  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de cada vértice  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . O simétrico de um segmento é um segmento, então o simétrico de  $ABC$  é  $A'B'C'$ .

- **Direção:** ortogonal ao eixo de simetria, horizontal ou vertical (com relação à borda do papel), prolongamento (de um segmento), outra;
- **Distância ao eixo de simetria:** conservada, não conservada;
- **Tamanho da figura F:** conservado, não conservado;
- **Forma da figura F:** conservada, não conservada;
- **Posição da figura F com relação a F':** translação, trans-

lação seguida de um "retornamento" da figura, rotação, rotação seguida de um "retornamento" da figura, outra;

- **Sentido:** mesmo sentido, sentido inverso

Estes critérios e seus respectivos valores nos deram acesso a vários controles (corretos, ou não, do ponto de vista da Matemática) suscetíveis de serem mobilizados por um aluno genérico na resolução de problemas. Exemplos dos controles modelizados são os seguintes:

Critério	Valor	Controle
"direção"	Ortogonal ao eixo	$\Sigma_{ortogonal}$ (perpendicular): a figura (subfigura) simétrica de uma figura (subfigura) por simetria ortogonal é construída na direção ortogonal à reta $d$ .
	Horizontal	$\Sigma_{horizontal}$ : a imagem de uma figura (subfigura) por simetria ortogonal é construída na direção horizontal.
"distância ao eixo"	Conservada	$\Sigma_{dist}$ : uma figura (subfigura) e sua simétrica estão à mesma "distância" do eixo de simetria.
"tamanho"	Conservado	$\Sigma_{tamanho}$ : o simétrico de um segmento é um segmento de mesmo comprimento. $\Sigma_{raio\_circulo}$ : o simétrico de um círculo é um círculo de mesmo raio.
"forma"	Conservada	$\Sigma_{forma}$ : uma figura e sua imagem por simetria ortogonal têm a mesma forma (em particular, o simétrico de um segmento é um segmento).
"posição"	Translação	$\Sigma_{translação}$ : a imagem de uma figura $F$ por simetria ortogonal é obtida pela translação de $F$ numa direção escolhida.
	Outra	$\Sigma_{outra}$ : a definir conforme o caso.

**Tabela 1.** Exemplos de critérios, valores e controles

Além dos controles associados aos critérios acima apresentados, os resultados do estudo teórico nos permitiram a identificação de outros, tais como:

- **Controle ligado à utilização da dobradura.**  $\Sigma_{dobradura\_1}$ : uma figura e sua simétrica se sobrepõem por dobradura ao longo de um eixo de simetria;

- **Controle ligado à natureza da figura F'.**  $\Sigma_{natureza\_de\_F'}$ : o simétrico de uma figura é uma figura de mesma natureza;

- **Controles ligados à relação entre a Figura F e o eixo de simetria r.**  $\Sigma_{ponto\_invariante}$ : o simétrico de um ponto sobre o eixo de simetria é ele mesmo.  $\Sigma_{semi\_plan}$ : o simétrico de  $F$  está situado do outro lado do eixo de simetria.

Procedendo dessa maneira, modelizamos quase que exaustivamente os controles suscetíveis de serem mobilizados por um aluno genérico, do nível de ensino predefinido, na resolução de problemas de identificação e de construção da imagem de uma figura com relação a um eixo de simetria dado. O estudo dos procedimentos de resolução, que apresentamos a seguir, foi realizado com base nesses controles.

## PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO DE FIGURAS SIMÉTRICAS

A partir da tipologia de procedimentos proposta pelas pesquisas precedentes para o problema de construção da imagem de um segmento com relação a um eixo de simetria, e tendo em vista nosso objetivo de estudar figuras mais complexas,

adaptamos esta tipologia a essa categoria mais larga de problemas. Assim, caracterizamos os tipos de procedimentos da seguinte maneira:

**Procedimentos globais:** na construção da imagem não intervêm outros objetos senão a figura construída. A figura simétrica é construída seja perceptivelmente, à mão livre, por exemplo, seja com a ajuda de instrumentos tais como a dobradura ou papel de decalque.

**Procedimentos semi-analíticos:** um ou vários pontos-imagens são construídos levando-se em conta somente seus antecedentes e, em seguida, a figura é construída globalmente a partir desses pontos, mobilizando as propriedades de conservação da simetria ortogonal (medida de ângulos, de comprimento...).

**Procedimentos analíticos:** a imagem da figura  $F$  é obtida depois da construção dos simétricos de pontos característicos da figura  $F$  (vértices de polígonos, centros de círculos...). (LIMA, 2006, p. 86).

Como podemos constatar, esses procedimentos são inerentes aos problemas de construção de figuras simétricas. De fato, a antecipação da ação concreta que um aluno pode realizar na construção de uma figura simétrica nos permite descrever *a priori* os procedimentos suscetíveis de serem utilizados por este aluno. No entanto, para identificar a imagem de uma

figura entre figuras candidatas, o aluno não executa necessariamente ações concretas sobre ela e, conseqüentemente, muito raramente deixa indícios ou traços das ações realizadas no papel ou na tela do computador, por exemplo. Dessa forma, o caráter implícito da ação do aluno na resolução de problemas de *identificação de figuras simétricas com relação a uma reta* dificultou a descrição *a priori* dos procedimentos de resolução. Na modelização, buscando contemplar o maior número de casos possíveis, associamos os procedimentos *globais*, *semi-analíticos* e *analíticos* aos critérios e controles previamente identificados. Exemplo:

**a) Construção de F' por dobradura:** pode ser realizada ao longo da reta  $r$  ou segundo uma direção escolhida (paralela à borda do papel, por exemplo);

**b) Construção de F' utilizando papel de decalque.** Duas possibilidades se apresentam: a figura  $F$  e o eixo são decalcados ou somente a figura  $F$  é decalcada. Portanto, dois tipos de procedimentos são esperados: decalque da figura  $F$  e da reta  $r$  (neste caso, nós supomos que a reta  $r$  é representada por um segmento e que seja decalcado todo o segmento) e decalque da figura  $F$  somente. Vale ressaltar que cada um desses procedimentos dá origem a outros que podem estar relacionados à manipulação feita pelo aluno: retornar o papel ou rotacionar o papel, por exemplo.

Utilizamos a *modelização* de controles e de procedimentos de construção como ferramenta metodológica nos estudos experimentais realizados com os alunos e com os professores, com vistas a estudar as suas decisões didáticas. Apresentamos, assim, a produção de um aluno e como utilizamos essa ferramenta para analisá-la.

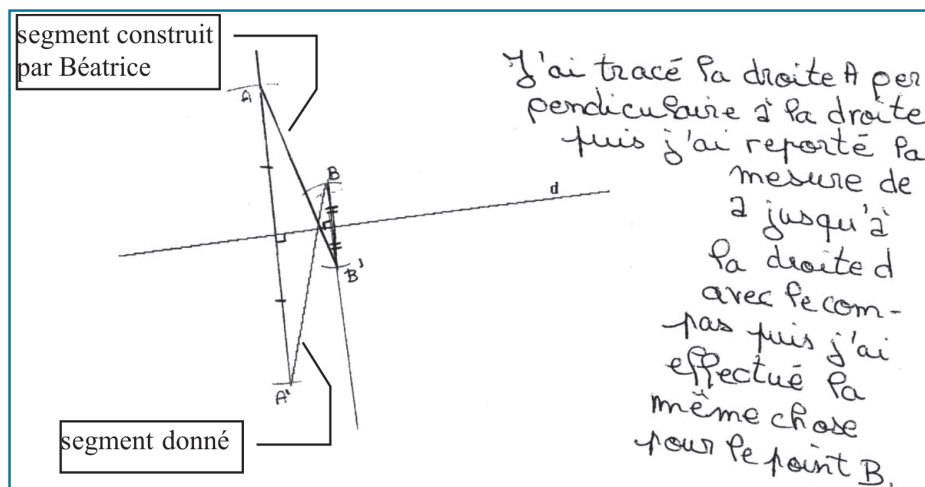
## EXPERIMENTAÇÃO: UM EXEMPLO

Cinquenta e um alunos da série equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental participaram da experimentação. Escolhemos os alunos desta série porque eles já haviam estudado a simetria de reflexão. Estes alunos resolveram, em uma situação cotidiana de sala de aula, dois problemas de identificação de figuras simétricas e dois problemas de construção da imagem de figuras por simetria de reflexão; pedimos-lhes que explicassem as respostas dadas. De posse das respostas, analisamos aspectos referentes às construções realizadas, às argumentações e aos procedimentos por eles utilizados.

Seguem, portanto, as respostas dadas por um desses alunos aos problemas de construção e, também, uma breve análise dessas respostas, em termos de controles e de procedimentos de resolução.

**Problema-segmento:** *Construa com os instrumentos de desenho o simétrico do segmento abaixo em relação ao eixo  $d$ . Explique sua resposta.*

### Resposta do aluno



**Figure 7.** Resposta do aluno ao Problema-segmento<sup>11</sup>

Tanto a construção do aluno quanto a sua explicação indicam que ele utilizou um procedimento do tipo *analítico*. Ele explicou que traçou “a reta  $A$  perpendicular à reta”. Analisando sua construção, observamos que a reta a qual ele se refere é a reta  $\overline{AA'}$ , cuja perpendicularidade à reta  $d$  é indicada na construção. Além disso, sinalizou a igualdade de distâncias das extremidades do segmento ao eixo de simetria, o que pode indicar a mobilização da propriedade de equidistância. Descrevemos, portanto, o procedimento analítico suscetível de ser utilizado da seguinte maneira:

1. Construir as retas perpendiculares à reta  $d$  passando pelas extremidades do segmento dado;
2. Construir os simétricos destas extremidades transferindo as distâncias ao eixo sobre essas perpendiculares;
3. Construir o simétrico do segmento a partir das extremidades construídas.

Vale salientar, ainda, que o aluno nomeou o segmento inicial como  $\overline{BA'}$  e o segmento imagem como  $\overline{AB'}$ ; os pontos  $A$  e  $B$  encontram-se, assim, no semiplano acima do eixo de simetria e os pontos  $A'$  e  $B'$ , no semiplano abaixo deste. Fazemos a hipótese de

<sup>11</sup> Tradução da resposta do aluno: “eu tracei a reta  $A$  perpendicular à reta, depois transferei a medida de  $A$  até a reta  $d$  com o compasso, depois efetuei a mesma coisa para o ponto  $B$ ”.

que ele construiu primeiro a figura simétrica sem nomear os pontos e, depois, no intuito de elaborar a explicação pedida no enunciado do problema, decidiu nomeá-los para facilitar a expressão da argumentação. Notemos que sua explicação mostra algumas dificuldades na utilização da linguagem matemática; por exemplo, ele chama de "reta A" a reta  $\overline{AA'}$ . Nesta análise, no entanto, não levamos em conta essas dificuldades. Considerando o procedimento analítico acima descrito, entendemos que os controles abaixo relacionados (cf. tabela 2) podem ter influenciado a resolução do problema:

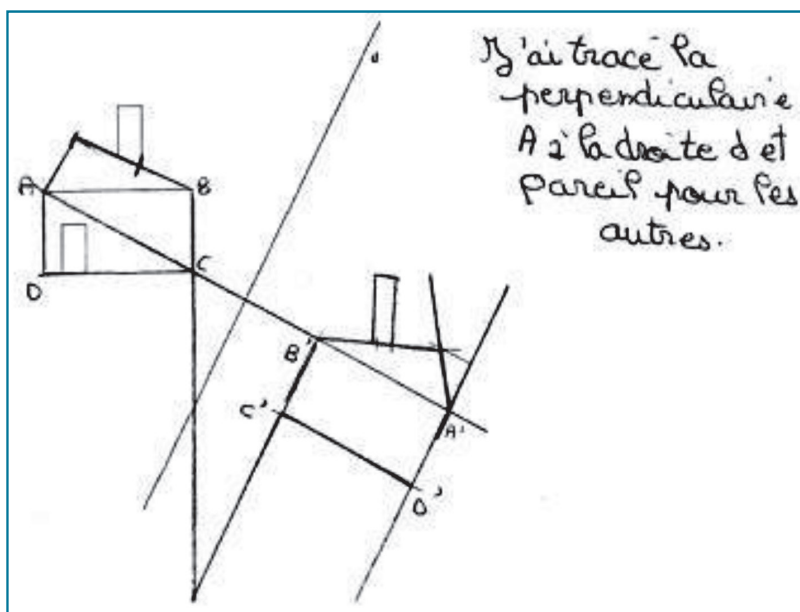
Critérios	Valores	Controles
"direção"	Ortogonal ao eixo de simetria	$\Sigma_{\text{ortogonal}}$ (perpendicular): a figura (subfigura) simétrica de uma figura (subfigura) por simetria ortogonal é construída na direção ortogonal à reta $d$ .
"distância ao eixo"	Distância ao eixo conservada	$\Sigma_{\text{distância}}$ : uma figura (subfigura) e sua simétrica estão à mesma "distância" do eixo de simetria
Outro controle		$\Sigma_{\text{segmento}}$ : Se as extremidades de um segmento são simétricas das extremidades de outro segmento, em relação a uma reta $r$ , então esses dois segmentos são simétricos em relação a $d$ .

**Tabela 2.** Problema-segmento: critérios, valores e controles identificados na produção do aluno

Compreendemos que, nesta resolução, os controles mobilizados são corretos do ponto de vista da Matemática. Dessa forma, o aluno tem uma concepção de simetria de reflexão que é caracterizada pela mobilização de controles de *perpendicularidade* e de *conservação da igualdade das distâncias* dos pontos da figura ao eixo de simetria.

**Problema-casa:** Construa com os instrumentos de desenho o simétrico da figura abaixo em relação ao eixo  $d$ . Explique sua construção.

**Resposta do aluno**



**Figure 8.** Resposta do aluno ao Problema-casa<sup>12</sup>

Consideramos que, para construir a figura-imagem (cf. Figura 8: à direita da reta  $d$ ), o aluno utilizou um procedimento do tipo *semi-analítico* (parte da construção é analítica e parte é global). As razões desta hipótese são explicadas mais adiante. Interpretamos o procedimento utilizado pelo aluno nesta construção da seguinte maneira:

- 1) Construir a reta perpendicular à reta  $d$ , passando pelo vértice nomeado pelo aluno ponto  $A$  sobre a figura e construir o simétrico desse ponto ( $A'$ ) sobre esta reta, conservando a distância à reta  $d$ .
- 2) A partir do ponto  $A'$ , e considerando a direção dada pela reta  $\overline{AA'}$ , construir globalmente a figura, conservando os comprimentos dos segmentos, a forma da figura inicial e invertendo a orientação dos ângulos.

Observamos que, nesta construção, o aluno não utilizou marcas para indicar a perpendicularidade entre as retas ou a igualdade de distâncias sobre a figura, como o fez no Problema-segmento. Porém, considerando a explicação "eu tracei a perpendicular  $A$  à reta  $d$ ", interpretamos que a reta  $\overline{AA'}$  é perpendicular à reta  $d$ . Nossa hipótese é a de que, para construir o ponto  $A'$ , ele empregou

<sup>12</sup> Tradução da resposta do aluno: "eu tracei a perpendicular  $A$  à reta  $d$  e o mesmo para os outros".



o mesmo procedimento utilizado para construir as extremidades do segmento no problema anterior (cf. figura 7), um procedimento do tipo analítico. Nessa perspectiva, a direção escolhida para construir o ponto A' pode ser entendida como sendo *perpendicular ao eixo de simetria*. Em seguida, a figura-imagem foi construída globalmente. Esta hipótese se apóia no fato de que os vértices B', C' e D' da figura-imagem não correspondem aos simétricos dos pontos B, C e D, respectivamente.

Consideramos que os controles ligados aos critérios de *direção* e de *conservação de distâncias ao eixo de simetria* foram exercidos na construção de A', simétrico de A. Em seguida, a escolha do "lugar" na folha de papel para construir a imagem da figura, com relação à figura inicial, é definida em função da direção dada pela reta  $\overline{AA'}$ . Nesse momento da resolução do problema, entram em jogo outros controles como aqueles ligados ao critério *sentido* para definir, por exemplo, onde construir a chaminé da casa. Vale salientar que a especificidade da *figura-casa* (não possui eixo de simetria) colocou em evidência, com certa facilidade, que o aluno considerou na sua construção a mudança da orientação dos ângulos pela simetria de reflexão.

Continuando a análise da produção do aluno, na perspectiva acima apresentada, concluímos que os controles que podem ter influenciado sua construção são os seguintes:

Critérios	Valores	Controles
"direção"	Ortogonal ao eixo de simetria	$\Sigma_{ortogonal}$ : A figura (subfigura) simétrica de outra figura (subfigura) por simetria ortogonal é construída na direção ortogonal à d.
"distância ao eixo"	Distância dos pontos ao eixo, conservada: pontual na construção do ponto A'; global na construção da figura completa	$\Sigma_{distância}$ : Uma figura (subfigura) e seu simétrico estão à mesma "distância" do eixo de simetria.
"tamanho"	Conservado	$\Sigma_{tamanho\_1}$ : O simétrico de um segmento é um segmento de mesmo comprimento.
"forma"	Conservada	$\Sigma_{forma}$ : Uma figura e sua imagem por simetria ortogonal têm a mesma forma (em particular, o simétrico de um segmento é um segmento).
"posição"	Outra	$\Sigma_{posição\_outra}$ : A imagem da figura é construída em função de uma direção previamente definida.
"sentido"	Sentido inverso	$\Sigma_{sentido\_inverso}$ : uma figura e seu simétrico têm seus sentidos inversos.

**Tabela 3.** Problema-casa: critérios, valores e controles identificados na produção do aluno

A evidência de que o aluno construiu corretamente o simétrico de um ponto da figura-casa mostra que ele reinvestiu os conhecimentos utilizados na construção do simétrico do segmento (Problema-segmento). No entanto, estes conhecimentos não foram reinvestidos na construção dos demais pontos da figura-imagem. Para construí-los, o aluno muda de procedimento de construção, passando de um *procedimento analítico* correto para um *procedimento semi-analítico* incorreto. Considerando que, na construção da imagem do segmento (cf. Problema-segmento), esta mudança não ocorreu, pensamos que a complexidade da *figura-casa* pode ter interferido de forma relevante na decisão do aluno. Em outros termos, o fato de a figura ser composta por várias subfiguras e possuir diversos vértices pode ter levado o aluno a mudar de procedimento com o objetivo de simplificar a construção, porque o procedimento analítico é mais longo e mais difícil de ser executado.

Assim, concluímos que as construções realizadas pelo aluno indicam que ele conhece as propriedades de *igualdade das distâncias* dos pontos ao eixo e de *perpendicularidade* da simetria de reflexão e as utiliza para construir o simétrico de um ponto ou de um segmento. No entanto, quando se tratou de uma figura complexa, ele recorreu a um procedimento do tipo *semi-analítico* e construiu a figura imagem tendo o cuidado de conservar o tamanho e a forma da figura inicial e de inverter a orientação dos ângulos.

Esta análise levanta algumas questões concernentes às razões que levaram o aluno a abandonar os controles corretos (do ponto de vista da Matemática) e adotar outros ligados à percepção global da figura inicial. Ao menos duas hipóteses podem ser cogitadas: ou se trata da evolução de uma concepção a outra ou da coabitação de duas concepções no mesmo aluno. Estas hipóteses não foram testadas neste estudo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste artigo, apresentamos de forma sucinta a pesquisa realizada sobre a modelização de conhecimentos de alunos da Educação Básica sobre a simetria de reflexão e de como tal modelo foi construído. Para isso, utilizamos a formalização proposta pelo modelo cKc (BALACHEFF, 1995), privilegiando a entrada nesta modelização através das estruturas de controle ( $\Sigma$ ) de concepções sus-

cetíveis de serem mobilizadas por um aluno na resolução de problemas. O estudo teórico, realizado a priori, foi apresentado segundo a ótica de pesquisas realizadas sobre a simetria e das abordagens escolhidas por livros didáticos adotados na escola francesa, país onde foi desenvolvida a pesquisa. Este estudo permitiu a identificação de controles, no sentido atribuído por Balacheff (ibid.), e de procedimentos de resolução que podem ser utilizados pelos alunos na resolução de problemas de identificação e de construção de imagens de figuras por simetria de reflexão. Em seguida, apresentamos a experimentação realizada com alunos de classes equivalentes ao oitavo ano do Ensino Fundamental através do estudo da produção de um aluno.

O estudo experimental confirmou os resultados de outras pesquisas concernentes à influência de certas variáveis didáticas na resolução dos problemas de construção de imagens de figuras por simetria. Por exemplo, quando os segmentos dados têm *orientação vertical e horizontal* na folha de papel, vários alunos escolheram a *direção horizontal* ou a direção dada pelo *prolongamento* de um segmento da figura na construção da imagem. Observamos na produção de alguns alunos que as variáveis dos problemas favoreceram a mobilização de controles diferentes. É o caso, por exemplo, da produção acima apresentada (cf. seção 4) em que a natureza da figura (simples ou complexa) parece ter levado o aluno a mudar de controles e, conseqüentemente, de procedimento de construção.

Com relação aos procedimentos de construção utilizados pelos alunos na experimentação, os resultados mostram que eles privilegiavam os procedimentos do tipo *analítico* (corretos ou não) para construir as imagens de figuras por simetria de reflexão. Fizemos a hipótese de que os instrumentos de desenho (régua graduada, esquadro, compasso...) colocados à disposição podem ter contribuído para esse resultado. Os procedimentos do tipo *semi-analítico* foram mais utilizados na construção da imagem de figuras complexas, em contrapartida da construção da imagem de segmentos. Nossa hipótese é a de que os alunos recorreram a estes procedimentos buscando apoio sobre os elementos da figura, para em seguida construir sua imagem com base na percepção global. Eles se apoiaram, então, espontaneamente sobre as propriedades de conservação dos comprimentos dos segmentos e das medidas dos ângulos pela simetria.

Além disso, os resultados do estudo mostraram a pertinência e a eficácia da formalização de controles que realizamos com o objetivo de modelizar os conhecimentos de alunos sobre a simetria de reflexão. Com efeito, em certos casos nos quais as respostas dos alunos pareciam confusas ou até mesmo contraditórias, graças à análise em termos de controles, pudemos reconstituir um raciocínio coerente do sujeito na resolução dos problemas. Pensamos assim ter colocado em evidência o interesse didático de estudar a atividade do aluno em termos de estruturas de controle.

## Referências Bibliográficas

- ARAÚJO, A. J. & GITIRANA GOMES-FERREIRA, V. Simetria de Rotação: uma seqüência didática com o Cabri-géomètre. In: **23a. ANPED - Reunião Nacional de Pesquisadores em Educação**, Caxambu, 2000. pp. 1-16.
- BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. *Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques*. In Mercier A. & Margolinas C. (Ed.), **Balises en Didactiques des Mathématiques**, pp. 75 - 106. Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions, 2005.
- BALACHEFF, N. Conception, connaissance et concept. In: Denise Grenier (ed.) **Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques** (pp.219-244). Grenoble: IMAG, 1995.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, ensino de quinta a oitava séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de primeira a quarta séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- GAUDIN, N. **Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction**. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.
- GRENIER, D. **Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième**. Thèse. IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1988.
- GRENIER, D. & LABORDE, Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonale. In **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres**. Grenoble: La Pensée Sauvage - Éditions, 1997.
- HART, K. **Children's understanding of mathematics**: Alden Press, Oxford, London, 1981. Pp.11-16.
- LIMA, I. **De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale**. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2006.
- LIMA, P. F.; GITIRANA G. F. V. & SIQUEIRA, J. E. O conceito de simetria de reflexão no Ensino Fundamental. In: **EPEM - Encontro Pernambucano de Educação Matemática**, Recife: Anais do IV EPEM, 1999.
- MIYAKAWA, T. **Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale**. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.
- TAHRI, S. **Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse des décisions didactiques**. Thèse. IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1993.
- VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. In : **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 10, n°2.3, 1990. p. 133-170.