¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes

Julián Ricardo Gómez[*]
José Luis Orozco[**]
Germán Darío Realpe[***]
Gloria Benavides[****]
Ninfa Navarro[*****]
Edgar Alberto Guacaneme[******]

RESUMEN

A través del estudio de tareas propuestas en libros de texto que usamos cotidianamente en el proyecto de formación "Juega y construye la Matemática", hemos reconstruido aspectos de nuestro conocimiento didáctico del contenido matemático relacionado con el pensamiento variacional e identificado elementos, asociados al desarrollo del razonamiento covariacional, no necesariamente presentes de manera explícita en las teorías que lo abordan. Esta comunicación expresa algunos de estos aspectos y elementos, como una invitación a los profesores de matemáticas, colegas nuestros, a configurar equipos de estudio y avanzar en su desarrollo profesional.

Palabras clave: pensamiento variacional, formación de profesores, razonamiento, análisis de tareas.

[*] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: juliangomez@colegiochampagnat.edu.co
[**] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co
[***] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: germanrealpe@colegiochampagnat.edu.co
[****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: gloriabenavides@colegiochampagnat.edu.co
[*****] Colegio Champagnat. Dirección electrónica: ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co
[******] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Desde hace más de dos décadas y media la Comunidad de Hermanos Maristas ha estado comprometida de manera singular con la educación en matemáticas, a través del desarrollo del proyecto "Juega y Construye la Matemática"; los trabajos de investigación e innovación liderados por el profesor Jorge Castaño por un poco más de tres lustros y el trabajo editorial, de incorporación de lo tecnológico y de formación docente coordinado en la última década por el profesor Arbey Grisales, constituyen dos evidencias de ello.

Recientemente, los profesores de matemáticas del Colegio Champagnat de Bogotá hemos emprendido un ejercicio colectivo de aprendizaje a partir de reflexionar y estudiar lo que gestionamos a través de nuestro quehacer docente. En esta dirección, inicialmente hemos hecho un balance de nuestras visiones acerca de la puesta en acto del proyecto y hemos planteado unas hipótesis sobre las que estamos trabajando, algunas de las cuales son: (i) puede existir una brecha entre el trabajo realizado en primaria y secundaria, en razón a que en primaria el juego tiene una expresión concreta, y en secundaria el juego tiende más al trabajo con objetos inmateriales (por ejemplo, los símbolos); (ii) la organización curricular que regía como política hasta antes de los *Lineamientos* (MEN, 1998), aún mantiene un nivel de incidencia en el currículo de matemáticas que poco favorece la construcción de una identidad asociada al proyecto; (iii) las tareas propuestas en las cartillas, que expresan el currículo propuesto del proyecto, no han sido estudiadas desde las directrices curriculares actuales (MEN, 1998, 2006), particularmente como expresión de los diferentes tipos de pensamiento matemático, expresados en tales directrices.

Precisamente para abordar la última de las hipótesis hemos emprendido inicialmente la identificación y análisis de las tareas presentes en las cartillas, que pueden propender por el desarrollo del pensamiento variacional; sin embargo, esta tarea nos implicó en el estudio de las directrices curriculares en torno a este tipo de pensamiento y en la apropiación significativa de un marco que describe el razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003). La presente comunicación, exhibe algunos avances en esta dirección.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En sentido estricto, el trabajo de análisis desarrollado cuenta con dos insumos de referencia: el contenido de las disposiciones curriculares para las matemáticas escolares en Colombia (MEN, 1998, 2006) y lo relativo al razonamiento covariacional (Carlson et al. 2003).

Más allá de detallar lo relatado en las disposiciones, a continuación esbozamos algunas ideas que nos han sido particularmente significativas. Reseñemos, entonces, que entendemos que el pensamiento variacional: (i) no es un contenido ni un procedimiento matemático que se ubique en un grado escolar; (ii) su desarrollo se constituye en un horizonte de sentido para el currículo de las matemáticas escolares; (iii) es uno de los tipos que configura el pensamiento matemático, pero se articula con los demás tipos de pensamiento; (iv) convive en estrecha relación con el aprendizaje de temas matemáticos relacionados con el estudio de la variación y el cambio; (v) debe ser objeto/objetivo de trabajo en cada uno de los grados o ciclos escolares y, en este sentido, se configura como un asunto trasversal y un continuo *in crescendo* del currículo.

Por otra parte, se ha asumido una perspectiva teórica sobre el razonamiento covariacional, entendido como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124). De este consideramos pertinente reseñar, de manera supremamente sintética, los niveles de razonamiento, a través de una tabla tomada casi textualmente (Carlson et al., 2003, p. 129).

NIVELES DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Nivel 1 (N1). Coordinación

En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.

Nivel 2 (N2). Dirección

En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.

Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.

METODOLOGÍA

La estrategia de identificación y estudio de las tareas en las cartillas ha sido relativamente simple, pues, organizados en pequeños equipos, nos hemos encargado de leer las cartillas de algunos grados y de rastrear las tareas que parecieran movilizar el pensamiento variacional. Una vez identificadas, las resolvemos y reflexionamos sobre las mismas, dándonos la posibilidad de reconocer maneras de potenciarlas aún más a favor del desarrollo del pensamiento variacional y, en este sentido, haciendo unos ejercicios de diseño curricular puntual y, por ahora, especulativo. En el siguiente apartado ilustramos algunos momentos de este proceso.

ANÁLISIS DE DATOS

Tomemos una de las tareas (*Actividad N.° 29*) que identificamos en la cartilla para el grado quinto (Vera, Rodríguez & Ríos, 2012, p. 49); en esta se trabaja con los números triangulares. Inicialmente se presenta el dibujo de la figura 1 y se pide que el estudiante "estudie las disposiciones de puntos" y se hacen consideraciones y preguntas acerca de la manera de *construir* más números triangulares. Posteriormente se presenta la información de la figura 2 y se invita al estudiante a que diseñe y use un *método* para encontrar números triangulares sin recurrir a hacer un dibujo de los mismos.

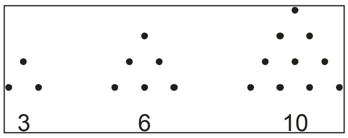

Figura 1

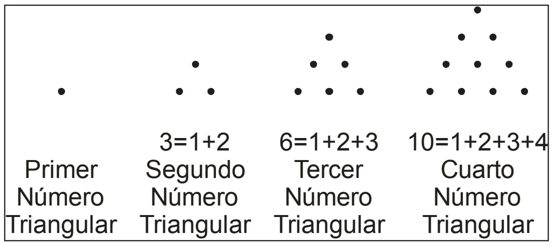

Figura 2

Al respecto, la tarea se refiere a la identificación de la misma en relación con el pensamiento variacional; debemos señalar, entre otras observaciones, que:

1. Si bien es suficientemente claro que a través de esta se está procurando el reconocimiento de un patrón de cambio, no es tan diáfana la existencia de dos magnitudes que varían de manera coordinada. De hecho, desde nuestra perspectiva, en la figura 1 una de las "magnitudes" está implícita y la otra se explicita a través de dos registros de representación diferentes (figural y numérico); por su parte en la figura 2 la misma "magnitud" se explicita a través de la verbalización de los ordinales (i. e., primero, segundo, tercer, cuarto). Esto sucede en la mayoría de las situaciones que presentan secuencias gráficas (verbigracia, las que otrora se usaban en los exámenes ICFES para evaluar lo que entonces se llamaba razonamiento abstracto). Desde esta perspectiva consideramos que antes que el estudiante pueda coordinar el cambio de una variable con respecto al cambio de la otra (N1), debe reconocer las magnitudes que varían; por lo tanto, vemos necesario incluir un Nivel 0 (N0) Reconocimiento de las variables en el listado de niveles propuestos por Carlson et al. (2003).

2. Las consignas y preguntas propuestas para las situaciones expresadas en las figuras 1 y 2 aluden fundamentalmente al Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa. En efecto, el estudiante debe lograr ver la variación entre una y otra figura de la secuencia, pero no basta que observe que la cantidad de puntos aumenta, sino que debe cuantificar cada uno de los cambios. En la figura 1 este reconocimiento se puede hacer en el registro figural o en el registro numérico y connota operaciones matemáticas distintas: conteo en el primer caso y resta en el segundo. Para la figura 2 este reco-

nocimiento se puede hacer, adicionalmente, a través de la comparación de las expresiones que presentan las sumas de los números. En ambos casos (figuras 1 y 2) no se exige explícitamente la cuantificación de la magnitud que se refiere al número de orden de cada uno de las disposiciones. Lo anterior nos permite suponer que la coordinación cuantitativa pasa por la cuantificación de los cambios de cada una de las variables involucradas, aunque ocasionalmente uno de ellos quede suficientemente oculto (quizá debido a su aparente banalidad). Asimismo, nos permite sospechar que la cuantificación del cambio o variación de una de las variables depende del tipo de registro en el que se presente la información de los valores a comparar.

3. La Actividad N.° 29 podría complementarse para abordar el Nivel 4 (N4) Razón promedio y asumirse como caso particular de una situación para el Nivel (N5) Razón instantánea. En efecto, creemos que si se enfatizara en la relación que existe entre el número asociado al dibujo de la secuencia (i. e. a la variable que hemos señalado aparece implícita o que solo se explicita verbalmente) y el número triangular respectivo, podría disponerse de una relación funcional explícita (inicialmente de $\rceil$ en $\rceil$ y posteriormente de $|$ en $|$), no lineal ni afín, en la cual se exploren condiciones sobre la razón de cambio promedio (para la función de variable natural) e incluso se aborde, en los grados de la Educación Media, el estudio de la razón instantánea (para la nueva función de variable real).

CONCLUSIONES

El estudio del conocimiento escolar que como colectivo hemos emprendido nos ofrece una posibilidad de aprendizaje individual y colectivo que definitivamente configura acciones concretas de desarrollo de nuestro conocimiento personal. Sin embargo, debemos reconocer que este se potencia cuando asumimos como marco de referencia los planteamientos esbozados en la normativa curricular, y en documentos y teorías resultantes de la investigación en didáctica de la matemática. Asimismo, advertimos que somos capaces de proponer hipótesis que si bien pueden ser investigadas rigurosamente en el campo de la educación matemática, constituyen hipótesis de trabajo en nuestro quehacer docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), 121-156.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vera, J., Rodríguez, A., & Ríos, A. (2012). *Juega y construye la matemática. Quinto Grado*. Bogotá: Editorial Kimpres Ltda.