¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?

Edwin Yesyd Parra[*]
Erica Senid Vargas[**]
Edgar Alberto Guacaneme[***]

RESUMEN

La idea de los pitagóricos de expresar diferentes relaciones entre cantidades de magnitud geométrica a través de números los condujo a intentar expresar la relación entre la cantidad de longitud de la diagonal y la del lado de un cuadrado, cuestión que abrió la puerta al problema de la inconmensurabilidad. La perseverancia del pensamiento humano encuentra entonces en los pitagóricos una expresión sin igual, al construir métodos geométricos que originan sucesiones de parejas de números naturales cuya razón se aproxima secuencial y alternantemente a la relación en cuestión. La demostración de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado y los métodos aludidos para tales objetos geométricos son el objeto de este trabajo.

Palabras clave: inconmensurabilidad, razón y proporcionalidad, relación geométrica, sucesión.

[*] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: edwinyesyd@gmail.com
[**] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:evargas379@gmail.com
[***] Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica:guacaneme@pedagogica.edu.co

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En el marco del desarrollo del Trabajo de grado titulado "La teoría de las proporciones en la escuela pitagórica", llevado a cabo en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, hemos estudiado aspectos del trabajo de dicha escuela, en tanto hito en la evolución de la teoría de las proporciones, y hemos centrado la atención en dos métodos (adición sucesiva y sustracción sucesiva) a través de los cuales los pitagóricos encontraron una aproximación a la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado. La presentación de la comprensión que sobre los mismos hemos logrado es el objeto de esta comunicación.

METODOLOGÍA

En el desarrollo del trabajo de grado citado antes, hemos procurado el estudio de documentos que refieren información sobre la *antanairesis* y *antipairesis* (Filep, 1999; Gardies, 1988; Thorup, 1992); por esta vía encontramos los métodos de adición y sustracción sucesiva, entendidos como métodos pitagóricos para aproximar la razón de magnitudes inconmensurables. Ligado al estudio de los métodos, hemos debido comprender el problema de la inconmensurabilidad (de Guzmán, 1986) y valorar la genialidad pitagórica expresada en tales métodos. En este sentido, en lo que sigue, primero abordamos tres maneras de enunciar el concepto de conmensurabilidad y, por ende, de inconmensurabilidad; esta última la ilustramos a través del estudio de la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Posteriormente hacemos una descripción de los métodos de adición y sustracción sucesiva, probablemente ideados por los pitagóricos para aproximarse a la relación en cuestión, a través de razones entre números naturales. Finalmente establecemos algunas reflexiones a propósito del trabajo realizado y de sus resultados.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La noción de conmensurabilidad podemos enunciarla (o entenderla) de tres maneras diferentes, aunque interrelacionadas. La primera consiste en partir de dos magnitudes distintas A y B, y construir múltiplos de cada una de ellas (mA, nB; m y n números naturales) hasta encontrar una tercera magnitud C tal que $C = mA = nB$; en la figura 1 se ilustra esta manera de entender la conmensurabilidad para el caso de los segmentos A y B. Si bien en esta primera manera se privilegia la suma de las magnitudes, en la segunda se hace uso de sustracciones sucesivas. Así, dadas dos magnitudes D y E se procura encontrar una tercera magnitud F, tal que $rF=D$ y $sF=E$ (r y s números naturales); ello se consigue restando siempre la magnitud menor de la mayor, hasta el momento en que el resto sea cero. En la figura 2 hemos considerado los segmentos iniciales *D* y *E*, siendo $D>E$ y luego de restar dos veces *E* de D se obtuvo el resto C; posteriormente de *E* se restó *C*, obteniendo *F*, que se logró restar cuatro veces de *C*.

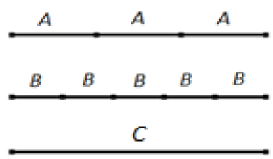

Figura 1. En este caso $C = 3A = 5B$

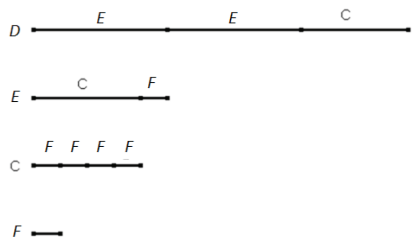

Figura 2. En este caso $14F=D$ y $5F=E$; *C* es el resto entre *D* y *2E*

La tercera y última manera involucra proporciones entre las magnitudes y los números que aparecen en las dos primeras maneras, $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ o $\frac{E}{D}=\frac{s}{r}$ de modo que dos magnitudes son conmensurables si existen tales números con los cuales configurar una proporción. Si la relación entre dos magnitudes no se puede expresar con ninguna de las tres maneras anteriores (es decir que no podemos encontrar los números *n* y *m* o *r* y *s*) las magnitudes son inconmensurables.

Como es bien conocido, un ejemplo particular de magnitudes inconmensurables son las representadas por el lado y la diagonal de un cuadrado. No tan conocida es la deducción de la inconmensurabilidad entre estos objetos, veamos:

Sea el cuadrado *ABCD* (ver figura 3). Supongamos que la diagonal y el lado son conmensurables. Existe entonces un segmento $\overline{HK}$ tal que divide a $\overline{BC}$ (lado) y $\overline{AC}$ (diagonal). Sea ahora $\overline{FC}$ congruente con $\overline{BC}$ y determínese E como corte de la perpendicular a $\overline{AC}$ con $\overline{AB}$.

Así, como $\sphericalangle AFE$ y $\sphericalangle CBE$ son rectos, $\overline{FE}$ y $\overline{BE}$ no son solo tangentes a la circunferencia con centro en *C* y radio $\overline{FC}$, sino que además son congruentes. Los ΔEFA y ΔCBA comparten el $\sphericalangle FAE$ y cada uno tiene un ángulo recto, luego estos son semejantes y se puede establecer que $\frac{FE}{BC}=\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$

. Así se puede decir que como ΔCBA es isósceles, el ΔEFA también lo es, luego $\overline{AF}$ es congruente con $\overline{FE}$. Como se estableció que $\overline{HK}$ divide a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es decir, que $\overline{HK}$ cabe un número finito de veces en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, además, $AC = AF + FC$ o, lo que es equivalente, $AC = AF + BC$, entonces $\overline{HK}$ también cabe un número entero de veces en $\overline{AF}$, del mismo modo como $AB = AE + EB$, lo cual equivale a $AB = AE + FA$, así también $\overline{HK}$ cabe un número entero de veces en $\overline{AE}$.

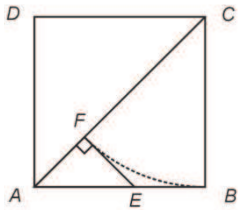

Figura 3. Construcción usada para deducir la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado

Como los triángulos Δ *EFA* y Δ *CBA* se comportan de la misma manera y tienen características semejantes, el proceso anterior se continúa indefinidamente, es decir, siempre existirá el segmento $\overline{HK}$ que divide a los lados y las diagonales de los cuadrados que se generan. El $\overline{HK}$ siempre será menor que el lado, lo cual es imposible ya que si este divide el lado llegará el momento en el que sean iguales.

Ante esta evidencia de imposibilidad de existencia de dos números cuya relación fuera la misma que la existente entre la longitud de la diagonal y el lado de un cuadrado (entre otros fenómenos de inconmensurabilidad), los pitagóricos construyeron dos originales métodos para encontrar sucesiones de parejas de números cuya relación se aproxima secuencialmente a la relación entre las cantidades de magnitud geométrica en cuestión.

Método de adición sucesiva. En suma, el método consiste en formar cuadrados cada vez más grandes a partir de un cuadrado de lado 1, sumando al lado *a* la diagonal *d* y a la diagonal dos veces el lado (ver figura 4) y posteriormente calcular el valor de la razón entre la diagonal y el lado, bajo la consideración de que $d = 1$ (ver la tabla 1; en ella hemos usado notación moderna).

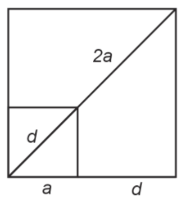

Figura 4. El cuadrado de lado a+d se construye a partir del cuadrado de lado a

d	$d=1$	$d_1 = 2a+d$	$d_2 = 4a+3d$	$d_3 = 10a+7d$	$\dots$	$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$
a	$a=1$	$a_1 = a+d$	$a_2 = 3a+2d$	$a_3 = 7a+5d$	$\dots$	$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$
Razón	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{7}{5}=1,4$	$\frac{17}{12}=1,4166$	$\dots$	$\frac{d_n}{a_n} \approx \sqrt{2}$

Tabla 1. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de adición sucesiva

La sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$.

Método de sustracción sucesiva. En resumen, el método consiste en tomar un cuadrado de lado *a* y sustraerlo de la diagonal *d*; posteriormente, construir un cuadrado sobre el lado resultante (residuo) y para este hacer el mismo proceso (ver figura 5). Finalmente, se calcula el valor de la razón tomando $a=1$ y $d=1$ (ver la tabla 2; en ella hemos usado notación moderna).

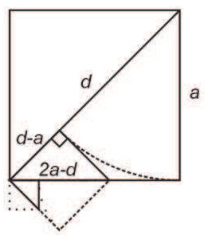

Figura 5. El segundo cuadrado se construye a partir del cuadrado del resto de d–a

d	$d=1$	$d_1 = \|2a-d\|$	$d_2 = \|3d-4a\|$	$d_3 = \|10a-7d\|$	$\dots$	$d_n = \|2a_{n-1} - d_{n-1}\|$
a	$a=1$	$a_1 = \|d-a\|$	$a_2 = \|3a-2d\|$	$a_3 = \|5d-7a\|$	$\dots$	$a_n = \|-a_{n-1} + d_{n-1}\|$
Razón	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}=1,5$	$\dots$	$\frac{d_n}{a_n} \approx \sqrt{2}$

Tabla 2. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de sustracción sucesiva

Ahora, si observamos el valor que toma la diagonal luego del *n*-ésimo paso impar ($n \geq 3$), este resulta ser negativo. Algo similar ocurre con los valores del lado luego del *n*-ésimo paso par ($n \geq 4$). Dado que en el contexto geométrico no podemos involucrar magnitudes negativas, posiblemente los pitagóricos optaron por restar el menor valor del mayor en cada uno; por tanto, al emplear la notación moderna para encontrar los valores de a_n y d_n, tomamos el valor absoluto de las magnitudes involucradas. De esta manera, aquí también, la sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$; de hecho, a partir del tercer término, coincide con la del método de adición sucesiva.

CONCLUSIONES

Al observar y analizar los resultados de cada uno de los métodos encontramos que ambos generan, en esencia, *una misma* sucesión de lo que hoy llamaríamos números racionales, a través de los cuales se va *cerrando el cerco* y capturando la inconmensurabilidad (o si se prefiere, la irracionalidad); sin embargo, hay que advertir que uno de los métodos la genera dirigiéndose hacia lo infinitamente grande, en tanto que el otro lo hace transitando hacia lo infinitamente pequeño. No deja de sorprendernos que esta condición de tratamiento diferenciado conduzca al mismo resultado y no podemos menos que imaginar un espacio que se extiende infinitamente en dos direcciones antípodas para cerrarse sobre sí mismo y finalmente encontrarse. Esta visión, que más parece una fantasía, nos revela un halo de misterio que, por un lado, rescata el carácter estético de las matemáticas, a veces tan esquivo a la mayoría de humanos y, por otro lado, nos deja entrever el aspecto mitológico que parecía envolver la cosmovisión pitagórica mediada por las matemáticas mismas. Todo lo anterior emerge como un resultado supremamente valioso para nuestra condición de maestros de matemáticas en formación, pues más allá de suministrarnos un poco más de erudición (y con ello atacar nuestra infinita ignorancia), nos ofrece un panorama para redimensionar la belleza de las matemáticas y para comprender potenciales bases desde las cuales escolarmente se aborde el problema de los números irracionales y su profunda relación con los números racionales (o viceversa).

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (1986). Los Pitagóricos.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.