http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n1p54

A prova dos nove e o caso da "Arithmetica Primaria" de Cezar Pinheiro

Proof the nine and the case of "Arithmetica Primary" in Cezar Pinheiro

Alana Godoy Lacava
alanaglacava@gmail.com

David Antonio da Costa
david.costa@ufsc.br

Resumo

Este artigo está inserido no campo da história da educação matemática e busca estudar um conteúdo matemático não mais prescrito nos livros didáticos atuais, mas que foi ensinado em tempos passados nas escolas: a prova dos nove. Assim, pretende-se apresentar os primeiros indícios, as diferentes maneiras de interpretá-la e as demonstrações da prova dos nove para as quatro operações fundamentais. Também se apresentam os diferentes termos e significados da "prova dos nove" e "noves-fora", explicando a regra prática do segundo. Por fim, será realizada uma análise da abordagem da prova dos nove, tomada como exemplo na obra de Cezar Pinheiro, nomeada "Arithmetica Primaria", de 1902. Nota-se que nesta obra a prova dos nove está vinculada aos ensinamentos das quatro operações aritméticas e trata-se de um prova de verificação de cálculo escrito, que não é considerada como uma prova real pelo autor.

Palavras-chave: História da educação matemática; Prova dos nove; Noves-fora; Livro Didático.

Abstract

This article is inserted in the field of history of mathematics education and studies a mathematical content no longer prescribed in current textbooks, but that was taught in times past in schools: the proof by nine. It is intended to present the first evidence of this content, the different ways to interpret this and demonstrations for the four fundamental operations. It will be differentiate the terms "proof by nine" and "casting out nines" explaining the rule of the second. Finally, it will analyze the approach of proof by nine prescribed in the book of Cezar Pinheiro, named "Arithmetica Primary ", 1902. In this book the proof by nine is linked to the teachings of the four arithmetic operations and it is a written calculation verification test, which is not considered as a real test by the author.

Keywords: History of mathematics education; Proof by nine; Casting out nines; Textbook.

Introdução

A prova dos nove, também chamada de prova dos noves-fora, em tempos passados fez parte dos conteúdos dos livros didáticos, livretos de tabuadas e também foi ensinada nas escolas. Além disso, é considerada para alguns historiadores como uma das provas de verificação de cálculo escrito mais utilizados antigamente.

> Lembro que na época que iniciei a universidade e comecei a ministrar aulas, ensinávamos os alunos a decorar a tabuada e assim, na resolução de operações com números naturais ensinávamos além da prova real, também a "prova dos noves-fora", que se encontra presente ainda nos livretos de tabuada, os quais são vendidos

> em papelarias do Estado, sendo que esta prova ainda é aplicada por alguns comerciantes locais (BEZERRA, 2013, p.9).

Assim, nas décadas passadas para conferir alguns cálculos utilizava-se a "famosa" prova real ou a prova dos nove, a qual deixou de ser usada nas escolas com o passar dos anos. Muitos das novas gerações se querem ouviram falar no termo "prova dos nove" e não se nota mais a presença deste conteúdo nos livros didáticos.

A revisão de literatura aponta a existência de poucas pesquisas que tratam da prova dos nove no campo da história da educação matemática. A pesquisa de Miguel e Souza (2006) intitulada "Um estudo sobre o processo de obsolescência de uma prática cultural: a prova dos nove" teve como objetivo estudar os processos de produção, circulação e apropriação da prova dos nove em diferentes contextos geopolíticos e institucionais, particularmente no contexto escolar brasileiro. Tal pesquisa está inserida no campo da história da educação matemática e se deu através da investigação de fontes de pesquisa orais (entrevistas com professores das escolas públicas da cidade de Campinas), escritas e/ou iconográficas. Os autores se debruçaram no estudo de quatro obras: a de *al-Khowarizmi* – século XII – que foi traduzida para o francês e é considerada a mais antiga pelos autores; a de *Al-Uqlidisi* – escrita no ano de 952 ou 853 – que foi traduzida do árabe; a denominada *Artimética de Treviso* – publicada em 1478; e o *Tratado da Pratica d'Aristmeytyca* – publicada em 1519.

Vale destacar também, a monografia de Cruz (2009) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (campus Cascavel), nomeada "Divisibilidade e Prova dos Noves" e inserida no campo da História da Matemática. Neste trabalho, a autora realizou um estudo sobre divisibilidade entre números naturais e inteiros, buscando compreender como este conteúdo é trabalhado nas salas de aula e para isso foram analisadas duas coleções de livros didáticos. Para a autora a prova dos nove é uma aplicação de divisibilidade, diante disso, foi elaborado um roteiro de estudo baseado na história da matemática, que permite a reinserção da prova dos noves em sala de aula como uma metodologia de ensino para abordar os conceitos de divisão e sistema de numeração.

Partindo do que foi exposto, este artigo tem o propósito de problematizar a prova dos nove enquanto conteúdo matemático escolar, apontar indícios de sua origem, demonstrar esta prova para as quatro operações fundamentais da aritmética e, por fim, analisar a abordagem deste conteúdo na 2ª edição do livro didático "Arithmética Primaria" de 1902, escrito por Cezar Pinheiro.

Vale salientar que, de acordo com Valente (2008), a matemática se constitui na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. A história da educação matemática e os livros didáticos são elementos inseparáveis, e estes são fontes fundamentais para a construção de uma trajetória histórica de constituição e no desenvolvimento da matemática escolar.

> Em realidade, o que mais comumente se tem feito, nas pesquisas com livros didáticos de matemática, é o seu uso para estudo de uma temática particular: um determinado tema, assunto ou item de conteúdo matemático torna-se objeto de estudo histórico, através de livros didáticos de outros tempos escolares. (VALENTE, 2008, p. 144)

Assim, para além da compreensão acerca deste conteúdo matemático e das demonstrações desta prova, que serão tratados ao longo do texto, será apresentado um exemplo de como a prova dos nove era abordada nos livros didáticos de tempos passados e com quais outros conteúdos matemáticos estava vinculada.

Interpretações da prova dos nove e seus primeiros indícios

A prova dos nove é interpretada de diferentes maneiras em algumas pesquisas (MIGUEL, 2010; RIBEIRO, 2014; ESQUINA, 2013; OLIVEIRA e LUTOSA, 1998). Segundo Miguel (2010), trata-se de uma *prática sócio-cultural* de verificação da correção de um cálculo escrito. Uma prática social é também uma prática cultural e vice-versa, pois, quando se refere a uma prática mesmo que seja realizada por uma só pessoa é considerada social por envolver a memória de um conjunto de ações que estão relacionadas aos integrantes de uma comunidade humana. Além disso, uma prática é sempre geradora de cultura e por isso deve ser sempre considerada como cultural.

> [...] melhor seria conceber a "prova" dos nove como uma prática sociocultural de verificação da correção de um cálculo escrito, e não como um conteúdo escolar autônomo e interno que, tal como se postula na perspectiva de Chervel (1990), teria sido criado "na escola, pela escola e para a escola", ou então, como um suposto saber a ensinar que, tal como se postula na perspectiva de Chevallard (1991), teria sido transposto didaticamente da esfera sábia para o contexto escolar (MIGUEL, 2010. p. 5).

Estes apontamentos despertam a reflexão acerca das maneiras de se inserir alguns conteúdos nas escolas. André Chervel (1990) indica que as disciplinas são autônomas das ciências, uma vez que a escola é quem produz estes saberes. Para Yves Chevallard, por sua vez, os conteúdos que são dados na escola são transposição dos saberes científicos, e que não dependem da escola para sua existência, uma vez que procede de outra esfera (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Para Ribeiro (2014), a prova dos noves é uma *regra* que permite saber se uma operação de adição, subtração, divisão ou multiplicação foi realizada corretamente. Já para Esquina (2013), trata-se de um *método* para identificar erros em operações com números naturais, além de ser um exemplo bem simples de aplicação das propriedades de congruência. Já para Oliveira e Lutosa (1998), a prova dos nove não passava da aplicação de uma *regra técnica* para verificar os resultados de operações aritméticas.

> Enfim, percebemos que mesmo não sendo mais utilizada em sala de aula, a prova dos noves é um método que ainda é utilizado por alguns comerciantes para verificar se existem erros realizados nas quatro operações. Nela se escondem conceitos como divisibilidade, decomposição decimal de um número natural e indução matemática (BEZERRA, 2013, p. 12).

Dessa forma, seja uma regra, técnica ou um método, ou ainda uma prática sócio-cultural, a prova dos nove não está somente ligada às operações fundamentais, mas também a outros conteúdos matemáticos. Mas, quais foram os primeiros indícios dessa prova? Quando surgiu? Desde quando começou a ser utilizada nas escolas?

Não foram encontradas literaturas que apontem a origem da prova dos nove, e desde quando é utilizada nas aulas de matemática, ou até mesmo fora delas. O que se encontra são alguns indícios que apontam que a prova dos nove não é um conceito de décadas passadas, mas de séculos.

> (...) A origem do método é obscura. Encontra-se [método] nas obras de vários escritores árabes, incluindo al-Khowârizmî (c.825), al- Karkhî (c. 1020), Behâ Eddîn (c. 1600), e outros. Avicenna (c. 1020), no entanto, ao discutir este conteúdo, trata-se como um método hindu. (SMITH, 1958, p. 151, tradução nossa).

Diante do que foi exposto, a prova dos nove era tratada por vários escritores árabes em séculos passados, incluindo o matemático al-Khowârizmî que viveu no século IX. Esta concepção foi seguida por diversas outras aritméticas árabes e nelas geralmente se ensinavam regras para efetuar cálculos modelados nos algoritmos hindus. Um dos processos que estavam presentes na aritmética de al-Khowârizmî, usado para testar cálculos aritméticos, é o que conhecemos hoje como *noves-fora* (EVES, 2004).

Porém, muito antes do que isso, no século III, o teólogo Hipólito que parece ter sido bispo do Porto de Roma na Itália, foi “mencionado por ter dado os métodos da ‘prova’ de um cálculo denominado ‘noves e setes-fora’” (CAJORI, 2007, p.87). Assim, este foi o primeiro indício encontrado da origem da prova dos nove, e segundo Cajori (2007), por mais que os hindus testassem os cálculos usando o método do *noves-fora*, este processo não é de origem indiana, pois Hipólito já o conhecia.

Cabe mencionar também que a primeira obra de matemática impressa em língua portuguesa foi o livro “Tratado de Pratica d’Arismetyca”, escrito por Gaspar Nicolas e publicado no ano de 1519 na cidade de Lisboa. A obra destinava-se a um público adulto envolvido com a prática comercial. Esta obra já apresentava a prova dos nove como verificação para as operações aritméticas, desse modo, em todas elas o autor explicava brevemente o modo de se proceder, apresentava um exemplo numérico e propunha a confirmação do resultado através da prova dos nove ou dos sete, ou através da operação inversa (MIGUEL; SOUZA, 2006).

Desse modo, são levantados alguns questionamentos: Por que a ênfase na prova dos nove em detrimento de outras? Por que não a prova dos dois, três, quatro... ou mesmo a prova dos sete, como apareceu na obra de Gaspar Nicolas? Uma das hipóteses para este fato é que

> Não existe nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinzes. O problema é essencialmente de ordem prática, pois o resto da divisão de um número natural não nulo por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9. Usamos a prova dos noves porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e, conforme mostramos, cada número natural e a soma dos algarismos da sua decomposição decimal deixam o mesmo resto quando divididos por nove. (OLIVEIRA; LUTOSA, 1998, p. 21)

Para melhor compreensão da citação anterior, serão apresentadas a seguir as demonstrações da prova dos nove para as quatro operações aritméticas, mas antes, cabe salientar que, ao contrário do que muitos pensam as expressões “prova dos nove” e “*noves-fora*” não apresentam o mesmo significado. Então, primeiramente será explicado qual é essa diferença.

Tirando o *noves-fora* de um número natural

Tirar o *noves-fora* de um número natural qualquer ***n**,* significa subtrair deste número o maior múltiplo de nove nele contido, o que é equivalente a encontrar o resto da divisão deste número ***n*** por 9. Por exemplo, para tirar o *noves-fora* do número 50, deve-se subtrair de 50 o maior múltiplo de 9 nele contido, ou seja, o maior múltiplo de nove menor que 50 é o 45 (que equivale a 9 multiplicado por 5). Logo, fazemos 50 – 45 = 5. Desse modo, dizemos que 50 *noves-fora* é igual a 5.

Porém, existe uma maneira mais simples de se obter o *noves-fora* de um dado número natural. Soma-se os algarismos deste dado número que se deseja obter o *noves-fora* obtendo outro valor. A partir deste novo valor, soma-se novamente os algarismos e assim por diante até restar um número de um único algarismo.

Desse modo, para tirar o *noves-fora* de 452 usando este modo mais simples, devemos somarmos os algarismos do número dado, ou seja, 4 + 5 + 2 = 11, em seguida continuar somando os algarismos do valor obtido até restar um único algarismo, que nesse caso é o 2, isto é, 1 + 1 = 2. Desse modo, 452 *noves-fora* é igual a 2, ou ainda, o resto da divisão de 452 por 9 resulta em 2.

Esta regra prática de se obter o resto da divisão de uma número ***n*** por 9 através da soma consecutiva de seus algarismos pode ser demonstrada matematicamente, veremos a seguir:

Demonstração 1: Primeiramente vamos mostrar, por indução, que $10^n - 1$ é múltiplo de 9, para todo $n \in$ N. Desse modo, para $n = 0$, temos $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, e zero é um múltiplo de 9.

Hipótese de Indução: Vamos supor que $10^n - 1$ é múltiplo de 9 para todo $n \in$ N.

Vamos provar para $n + 1$, chamemos $i = n + 1$. Então teremos:

$$10^i - 1 = 10^{n+1} - 1 = 10^n.10^1 - 1 = 10^n.(9 + 1) - 1 = 9.10^n + 10^n - 1$$

De fato, 9.10^n é múltiplo de 9, além disso, $10^n - 1$ também é de acordo com a hipótese de indução. Consequentemente, a soma $9.10^n + (10^n - 1)$ é múltiplo de 9. Portanto, provamos que $10^n - 1$ é múltiplo de 9 para todo número natural n.

Demonstração 2: Agora vamos provar que o resto da divisão de um número natural por 9 é o mesmo que a soma consecutivas de seus algarismos, que de fato é o que queríamos provar no início, e o que diz respeito ao *noves-fora*.

Seja $(x_n\, x_{n-1} \ldots x_1\, x_0)$ a representação decimal de um número natural x, em que x_i é um algarismo do sistema de numeração decimal para todo $i \in$ N, com $0 \leq i \leq n$. Logo, a decomposição decimal do número natural x pode ser representada da seguinte maneira:

$$x = (10^n.x_n + 10^{n-1}.x_{n-1} + \cdots + 10.x_1 + x_0)$$

Agora, provaremos que x e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto:

Seja x e x' dois números naturais, sendo $x' = (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0)$ tais que $x = 9q + r$ e $x' = 9q' + r'$, onde q, q', r e r' são números naturais e $0 \leq r < 9$, e $0 \leq r' < 9$ (Teorema do Algoritmo da Divisão[1]). Observe que r e r' são os restos das divisões de x e x' por 9 respectivamente.

Como $x = (10^n . x_n + 10^{n-1} . x_{n-1} + \cdots + 10 . x_1 + x_0)$, então

$$x = [(10^n - 1 + 1)x_n + (10^{n-1} - 1 + 1)x_{n-1} + \cdots + (10 - 1 + 1)x_1 + x_0], \text{ logo}$$

$$x = [(10^n - 1)x_n + (10^{n-1} - 1)x_{n-1} + \cdots + (10 - 1)x_1 + x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0]$$

Seja o número natural $b = (10^n - 1)x_n + (10^{n-1} - 1)x_{n-1} + \cdots + (10 - 1)x_1$, observe que b é um múltiplo de 9, pois consiste na soma de múltiplos de 9. Assim, $x = b + x'$, mas como $x = 9q + r$ e $x' = 9q' + r'$ (definidos anteriormente), podemos escrever $(9q + r) = b + (9q' + r')$, como b é um múltiplo de 9, podemos escrever $b = 9q''$, com $q'' \in$ N. Desse modo, teremos $(9q + r) = 9q'' + (9q' + r')$. Então:

$$(9q + r) = 9q'' + (9q' + r') = 9(q'' + q') + r' \text{ logo,}$$

$$\boldsymbol{9q} + r = \boldsymbol{9(q'' + q')} + r'$$

Como $\boldsymbol{9q}$ e $\boldsymbol{9(q'' + q')}$ são múltiplos de 9, podemos afirmar que:

$r = r'$, pois r e r' são menores que 9.

Então x e $(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0)$ deixam o mesmo resto quando divididos por 9. Portanto, podemos garantir que os restos das divisões de um número natural e da soma dos seus algarismos por 9 são iguais, assim, acabamos de demonstrar a regra prática do *noves-fora*.

Já a prova dos nove se refere à técnica na qual utilizamos o *noves-fora* de números naturais para verificar se o resultado das quatro operações fundamentais envolvendo tais números está correto. (OLIVEIRA; LUTOSA, 1998).

A prova dos nove acusa o erro quando o resultado de uma operação matemática está errada, porém ao aplicar a prova dos nove e ela acusar que não há erros, ainda assim, pode ser que a operação esteja errada. Mas, por que isso acontece? Por que nem sempre podemos confiar na prova dos nove para verificar um cálculo? Veremos, a seguir, como realizar a prova

[1] O Algoritmo da Divisão (também conhecido como algoritmo de Euclides) aparece nos elementos de Euclides (c.300 a.C.) como um teorema. Ele é velho conhecido até das crianças: corresponde à nossa conhecida "conta de dividir", que aprendemos nas séries iniciais do ensino fundamental, ainda no universo dos números naturais. (...) é possível verificar se a conta está correta verificando se ocorre a igualdade *dividendo = (divisor).(quociente) + resto*. (...) Teorema do Algoritmo da Divisão em N: Sejam a e b números naturais com $b \neq 0$; Então existe um único par de números naturais q e r de modo que $a = b.q + r$, com $0 \leq r < b$. (CARVALHO; GIMENEZ, 2006).

dos nove para as quatro operações aritméticas e as demonstrações matemáticas das mesmas, para posteriormente respondermos tais questões.

A prova dos nove para as quatro operações fundamentais

Adição

Para verificar o resultado de uma soma através da prova dos nove, devemos calcular o *noves-fora* de cada uma das parcelas da operação e somá-los. Em seguida, verificar se o valor dos *noves-fora* dessa soma é igual ao valor dos *noves-fora* do resultado.

Exemplo: Vamos supor que a adição realizada foi:

$$\begin{array}{r} \mathbf{224} \\ \underline{\mathbf{+456}} \\ \mathbf{680} \end{array}$$

Verificando através da prova dos nove:

Noves-fora da 1ª PARCELA: $2+2+4=8$

Noves-fora da 2ª PARCELA: $4+5+6=15 \rightarrow 1+5=6$

Soma do *noves-fora* das parcelas: $8+6=14$

Noves-fora dessa soma (se possível): $1+4=\mathbf{5}$

Noves-fora do resultado: $6+8+0=14 \rightarrow 1+4=\mathbf{5}$

Como o *noves-fora* da soma do *noves-fora* das parcelas é igual ao *noves-fora* do resultado, então de acordo com a prova dos nove, a operação está correta.

Demonstração: Dados os números naturais $a, b\ e\ c$ tais que $a+b=c$, então pelo Algoritmo da Divisão podemos escrever $a=9q_1+r_1$, $b=9q_2+r_2$ e $c=9q_3+r_3$, onde q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e r_3 são números naturais e $0 \leq r_1 < 9$, $0 \leq r_2 < 9$ e $0 \leq r_3 < 9$. Segue que,

$$9q_1+r_1+9q_2+r_2=9q_3+r_3, \text{ logo}$$

$$\mathbf{9(q_1+9q_2)}+r_1+r_2=\mathbf{9q_3}+r_3, \text{ com } r_1, r_2 \text{ e } r_3 \text{ menores do que 9}$$

$$\text{Então, } r_1+r_2=r_3$$

A partir desta última igualdade podemos concluir que a soma dos restos da divisão de $a+b$ por 9 é igual ao resto da divisão de c por 9, pois r_1, r_2 e r_3 são números menores do que 9. Desse modo, o *noves-fora* da soma do *noves-fora* das parcelas (a e b) é igual ao *noves-fora* do resultado (c). Portando, está demonstrada a prova dos nove para a adição.

Cabe salientar que, o que a prova dos nove faz é substituir $a_1 + a_2$ por $r_1 + r_2$ e verificar se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações está errada. Dada a simplicidade da determinação de r_1 e r_2 e da soma $r_1 + r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original. (RODRIGUES,1989).

Subtração

O caso da subtração é muito parecido com o da adição, mas neste caso, adota-se a prova real devemos calcular o *noves-fora* do minuendo, do subtraendo e do resultado obtido. A prova dos nove da subtração está relacionada com a prova real, assim o valor dos *noves-fora* da soma obtida dos *noves-fora* do subtraendo e do resultado deve coincidir com o valor dos *noves-fora* do minuendo.

Exemplo: Vamos supor que a subtração realizada foi

$$\begin{array}{r} \mathbf{750} \\ \underline{\mathbf{-\ 238}} \\ \mathbf{512} \end{array}$$

Verificando através da prova dos nove:

Noves-fora do minuendo: $7 + 5 = 12 \ \rightarrow 1 + 2 = \mathbf{3}$

Noves-fora do subtraendo: $2 + 3 + 8 = 13 \ \rightarrow 1 + 3 = 4$

Noves-fora do resultado: $5 + 1 + 2 = 8$

Soma do *noves-fora* do resultado e do subtraendo: $8 + 4 = 12$

Noves-fora dessa soma: $1 + 2 = \mathbf{3}$

Como o *noves-fora* da soma do *noves-fora* do resultado e do subtraendo é igual ao *noves-fora* do minuendo, conclui-se, de acordo com a prova dos nove, que a operação está correta.

Demonstração: Dados os números naturais $a, b\ e\ c$ tais que $a - b = c$, representando números quaisquer de uma subtração, então pelo Algoritmo da Divisão podemos escrever $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$, onde q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e r_3 são números naturais e $0 \leq r_1 < 9$, $0 \leq r_2 < 9$ e $0 \leq r_3 < 9$. Segue que,

$$9q_1 + r_1 - (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3, \text{ podemos escrever}$$

$$9q_1 + r_1 = 9q_3 + r_3 + 9q_2 + r_2$$

$$\mathbf{9q_1} + r_1 = \mathbf{9(q_3 + q_2)} + r_3 + r_2,$$

Como $\mathbf{9q_1}$; $\mathbf{9(q_3 + q_2)}$ são múltiplos de 9 e r_1, r_2 e r_3 menores do que 9,

então, $r_1 = r_3 + r_2$.

A partir desta última igualdade podemos concluir que a soma dos restos da divisão de $b + c$ por 9, é o mesmo que da divisão de a por 9, ou seja, o *noves-fora* da soma do *noves-fora* do resultado (c) e do subtraendo (b) é igual ao *noves-fora* do minuendo (a). Portando, está demonstrada a prova dos nove para a subtração.

Multiplicação

A prova dos nove da multiplicação consiste em calcular o *noves-fora* de cada um dos fatores da operação, e o *noves-fora* do produto desses valores deve coincidir com o *noves-fora* do resultado. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Vamos supor que a multiplicação realizada foi

$$\begin{array}{r} 542 \\ \underline{\times\ 26} \\ 3252 \\ \underline{1084+} \\ 14092 \end{array}$$

Verificando através da prova dos nove:

Noves-fora do 1º FATOR: $5 + 4 + 2 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$

Noves-fora do 2º FATOR: $2 + 6 = 8$

Noves-fora do resultado: $1 + 4 + 0 + 9 + 2 = 16 \rightarrow 1 + 6 = \mathbf{7}$

Produto *do noves-fora* dos fatores*:* $2\,.\,8 = 16$

Noves-fora desse produto: $1 + 6 = \mathbf{7}$

Como o *noves-fora* do produto do *noves-fora* dos fatores é igual ao *noves-fora* do resultado, então de acordo com a prova dos nove, a operação está correta.

Demonstração: Dados os números naturais $a, b\ e\ c$ tais que $a.b = c$, então pelo Algoritmo da Divisão podemos escrever $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$, onde q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e r_3 são números naturais e $0 \leq r_1 < 9$, $0 \leq r_2 < 9$ e $0 \leq r_3 < 9$. Segue que,

$$(9q_1 + r_1).(9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3, \text{ logo}$$

$$81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2r_1 + r_1r_2 = 9q_3 + r_3, \text{ então}$$

$$\mathbf{9(9q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1)} + r_1r_2 = \mathbf{9q_3} + r_3$$

Como com $\mathbf{9(9q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1)}$; $\mathbf{9q_3}$ são múltiplos de 9 e r_1, r_2 e r_3 são menores do que 9, então $r_1r_2 = r_3$.

Desse modo, demostramos que o resto da divisão de $a.b$ por 9 é o mesmo que o resto da divisão de c por 9, ou seja, o *noves-fora* do produto dos *noves-fora* dos fatores é igual ao *noves-fora* do resultado. Portando, está demonstrada a prova dos nove para a multiplicação.

Divisão

O algoritmo da divisão euclidiana nos diz que em uma divisão, o quociente multiplicado pelo divisor e somado com o resto, resulta no dividendo, ou seja, se dividirmos a por b e resultar em c com resto r, então temos que $(b.c) + r = a$. Desse modo, a prova dos nove da divisão está relacionada com o algoritmo da divisão na medida em que são realizados os *noves-fora*. Assim, precisamos calcular o *noves-fora* do divisor (b) e do quociente (c), multiplicar um valor pelo outro e tirar o *noves-fora* (quando possível). Em seguida, soma-se este resultado com o *noves*-fora do resto (r) da divisão e tira-se novamente o *noves-fora* (quando possível).. Por fim, devemos comparar esse valor encontrado com o *noves*-fora do dividendo (a). Veremos um exemplo para ficar mais claro:

Exemplo: Vamos supor que a divisão realizada foi:

$$\begin{array}{r|l} 782 & 35 \\ \cline{2-2} \underline{-70} & 22 \\ 82 & \\ \underline{-70} & \\ 12 & \end{array}$$

Verificando através da prova dos nove:

Noves-fora do Divisor: $3 + 5 = 8$

Noves-fora do Quociente: $2 + 2 = 4$

Produto dos dois *noves-fora* calculados acima: $4 \,.\, 8 = 32 \rightarrow 3 + 2 = 5$ (*)

Noves-fora do resto: $1 + 2 = 3$ (**)

Noves-fora de (*) + (**): $5 + 3 = \mathbf{8}$

Noves-fora do dividendo: $7 + 8 + 2 = 17 \rightarrow 1 + 7 = \mathbf{8}$

Como o *noves-fora,* do produto do *noves-fora* do dividendo e do divisor somado com o *noves-fora* do resto, é igual ao *noves-fora* do dividendo, de acordo com a prova dos nove, a operação está correta. Vejamos a demonstração matemática:

Demonstração: Dados os números naturais a, b, c e d tais que $a = (b.c) + d$, onde $0 \leq d < b$ então pelo Algoritmo da Divisão podemos escrever $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$, $c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$, onde $q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2, r_3$ e r_4 são números naturais e $0 \leq r_1 < 9$, $0 \leq r_2 < 9$, $0 \leq r_3 < 9$ e $0 \leq r_4 < 9$. Segue que,

$$(9q_1 + r_1) = (9q_2 + r_2).(9q_3 + r_3) + 9q_4 + r_4, \text{ logo}$$

$$(9q_1 + r_1) = 81q_2q_3 + 9q_2r_3 + 9q_3r_2 + r_2r_3 + 9q_4 + r_4, \text{ então podemos escrever}$$

$$\boldsymbol{9q_1} + r_1 = \boldsymbol{9(9q_2q_3 + q_2r_3 + q_3r_2 + q_4)} + r_2r_3 + r_4$$

Como $\boldsymbol{9q_1}$; $\boldsymbol{9(9q_2q_3 + q_2r_3 + q_3r_2 + q_4)}$ são múltiplos de 9 e

r_1, r_2, r_3 e r_4 são menores do que 9, então

$$r_1 = r_2r_3 + r_4$$

Então, o resto da divisão de a por 9 é igual ao resto da divisão de $(b.c) + d$ por 9. Portanto, a prova dos nove está demostrada para a divisão. Agora que a prova dos nove foi demonstrada para as quatro operações aritméticas, volta-se na seguinte pergunta: Por que ela falha? Por que não podemos confiar nesta prova de verificação?

O fato é que se a operação matemática estiver certa, e o aluno executar corretamente a prova dos nove, ela irá confirmar a exatidão dessa resposta. Porém, se a operação estiver errada há a possibilidade de a prova dos nove não detectar o erro. Isso ocorre porque a prova dos nove se baseia na soma dos algarismos de um número e, caso seja invertida a ordem desses algarismos, a soma continuará a mesma e o erro não será detectado pela prova dos nove. Ou seja, se o resultado for 145 e o aluno colocar 154, a prova dos nove apontará que a operação está correta, pois ambas as respostas ao tirar o *noves-fora* resultam em 1. Da mesma forma, se o aluno obtiver um resultado completamente diferente, e o *noves-fora* desse resultado der o mesmo valor do resultado correto**,** a prova dos nove não detectará o erro. Desse modo, se nesta mesma operação o aluno responder 136, por exemplo, o *noves-fora* continuará dando 1, assim como se responder 172, 163, 118, 235 e outras várias alternativas.

Agora que se compreende o procedimento da prova dos nove para as quatro operações fundamentais e a regra prática de calcular o *noves-fora* de um número natural, fica o seguinte questionamento: Como esta prova era ensinada na escola? Ou melhor, como ela estava prescrita nos livros didáticos? Quais as orientações para o ensinamento deste conteúdo?

A prova dos nove na obra de Cezar Pinheiro

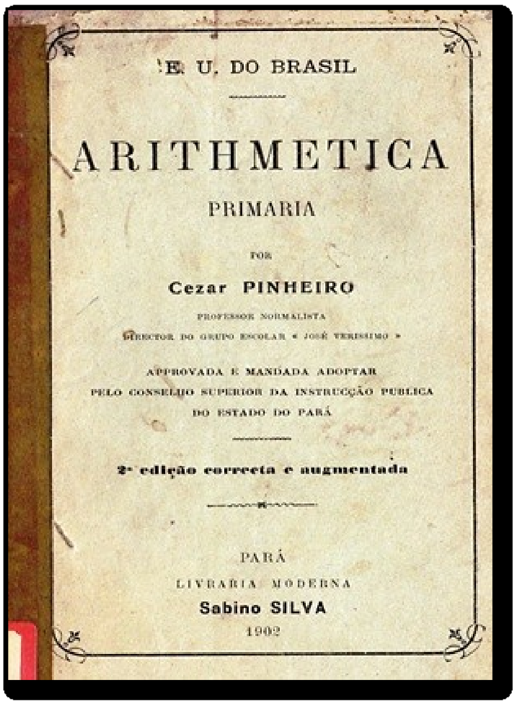
A fim de tentar responder tais questionamentos será feita uma análise da 2ª edição da obra "Arithmetica Primaria", que conta com a prova dos nove e publicada em 1902 por Cezar Pinheiro. A obra foi aprovada, com orientação de ser adotada nos grupos escolares, pelo Conselho Superior da Instrução Pública do estado do Pará em 1886 em sua primeira edição. Cabe mencionar que o autor era professor normalista e diretor do Grupo Escolar José Veríssimo, o qual está entre os dez primeiros grupos escolares implementado no estado do

Pará, do total de vinte e cinco, e foi inaugurado no dia 7 de setembro de 1901 na capital. Este grupo "foi construído pelo Governador José Paes de Carvalho, poderia sem receio figurar entre as melhores construções escolares do regime republicano" (FRANÇA, 2013, p. 7-8).

Tal obra encontra-se digitalizada no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina que conta com uma base de documentos que se transformam em fontes na medida em que os mesmos são problematizados e utilizados nas pesquisas históricas (AUTOR 2, 2015). Além disso, essa documentação digitalizada está inserida num diretório intitulado "História da Educação Matemática"[2], que se encontra disponível para consulta da comunidade científica. A inserção e manutenção desta base de dados é coordenada por um dos integrantes do GHEMAT[3] e conta com a contribuição de todos os pesquisadores do grupo.

Assim, pretende-se compreender como a prova dos nove está sendo apresentada na obra[4] de Cezar Pinheiro, qual a abordagem utilizada e com quais outros conteúdos matemáticos ela está vinculada.

Figura 1: Capa do livro Arithmetica Primaria.



Fonte: (PINHEIRO, capa, 1902).

[2] Para maiores detalhes ver em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>. Acesso em 06 nov., 2015.

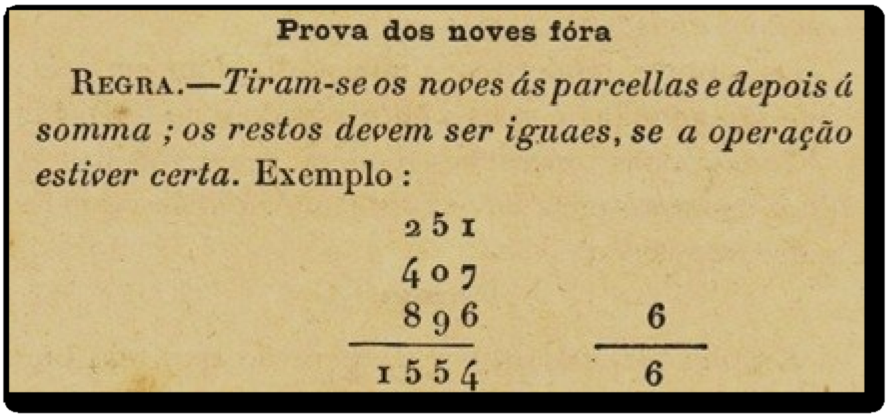
[3] Um dos grupos que merece destaque na escrita da historia de educação matemática, é o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), criado em 2000 e coordenado pelo professor Dr. Wagner Rodrigues Valente. Dentre as inúmeras produções científicas já realizadas, publicações e organização de seminários temáticos, este grupo valoriza pesquisas coletivas e reúne pesquisadores de diferentes instituições de vinte estados brasileiros.

[4] Para maiores detalhes, ver em:< https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134440>. Acesso em 06 nov., 2015.

No capítulo do livro nomeado "*Operações Fundamentais*", o autor define que operação fundamental "*é toda combinação feita com números*" (PINHEIRO, p.11, 1902) e menciona que as fundamentais são: soma ou adição; subtração; multiplicação; divisão. Além disso, aponta que os autores modernos as dividem em seis partes, incluindo a *potenciação* e a *radiciação* (PINHEIRO, 1902). Ao iniciar a "*somma*", Pinheiro a define como uma operação que une dois ou mais números em um só e apresenta a chamada "*regra*", que consiste na descrição das etapas de uma adição. Em seguida, apresenta a definição de prova, que para o autor *"é uma nova operação pela qual verifica-se o rezultado da primeira"* (PINHEIRO, p.12, 1902).

Dando sequência, é mencionado que existem muitas provas, mas as mais utilizadas chamam-se *"real"* e *"dos noves fóra"*, sendo a segunda *"de resultados as vezes negativos"* (PINHEIRO, p.12, 1902). Infere-se que o autor usa esta expressão para apontar que a prova dos nove pode não ser sempre confiável, à medida que pode indicar que uma operação está correta e de fato pode não estar. Talvez daí o termo "*resultados negativos*", ou seja, uma prova que pode apontar uma verificação errônea ("negativa"). Assim, o autor dá continuidade apresentando a "*prova dos noves fora*" que pode ser observada na figura abaixo:

Figura 2: Prova dos noves fora da adição.



Prova dos noves fóra

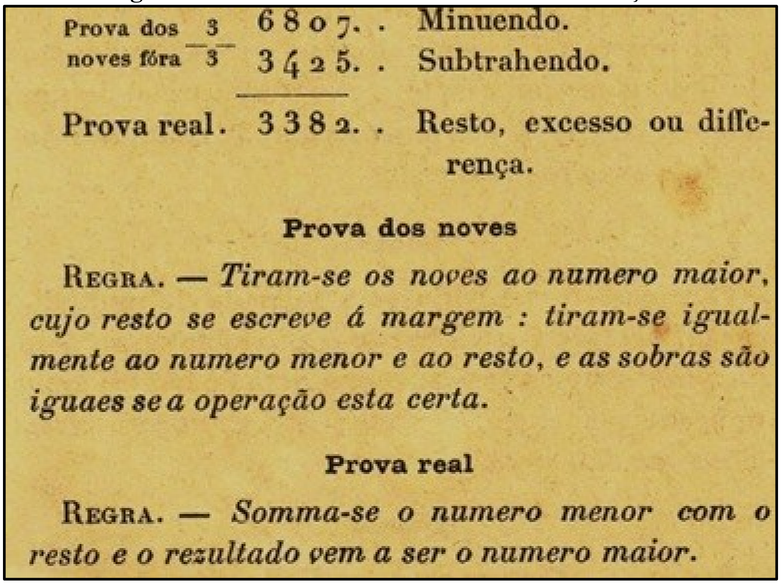
REGRA.—*Tiram-se os noves ás parcellas e depois á somma ; os restos devem ser iguaes, se a operação estiver certa.* Exemplo :

$$\begin{array}{r} 251 \\ 407 \\ 896 \\ \hline 1554 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

Fonte: (PINHEIRO, p.12, 1902).

Dessa forma, o que Pinheiro chama de "*regra*", são as instruções para se realizar a prova dos nove para a adição. No exemplo a soma dos *noves-fora* de cada parcela resultou em 6 assim como o *noves-fora* do resultado. Da mesma forma, após inserir a definição e as etapas da subtração, o autor apresenta um exemplo seguido das *regras* da prova dos nove e da prova real (figura 3).

Figura 3: Prova dos noves e Prova real da subtração.



Prova dos noves fóra 3 / 3	6807. .	Minuendo.
	3425. .	Subtrahendo.
Prova real.	3382. .	Resto, excesso ou differença.

Prova dos noves

REGRA. — *Tiram-se os noves ao numero maior, cujo resto se escreve á margem : tiram-se igualmente ao numero menor e ao resto, e as sobras são iguaes se a operação esta certa.*

Prova real

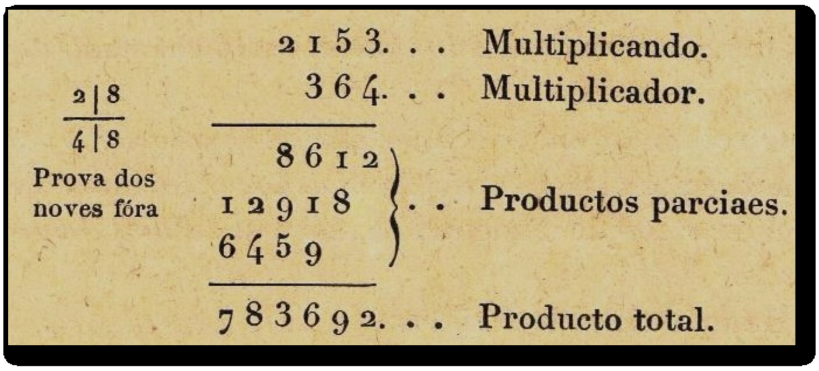
REGRA. — *Somma-se o numero menor com o resto e o rezultado vem a ser o numero maior.*

Fonte: (PINHEIRO, p.13, 1902).

Novamente, o que Pinheiro chama de *"regra"* são as etapas para realização da prova dos nove para a subtração, na qual o autor chama de "*numero menor"* ao invés de subtraendo (que está indicado do exemplo numérico acima das provas), e *"numero maior"* no lugar de minuendo. Assim, para o autor, a *prova real* é aquela em que se soma o subtraendo com o resultado obtido na operação (diferença) e confere-se este valor com o minuendo, para verificar se a operação está correta. Somente posterior à prova real da subtração é que o autor menciona a prova real da adição.

As outras duas operações fundamentais são apresentadas da mesma forma que as anteriores, mencionado a prova real apenas no final de ambas já terem sido introduzidas. Pinheiro traz um exemplo de multiplicação com a ilustração da prova dos nove no canto esquerdo (figura 4).

Figura 4: Exemplo de multiplicação com indicações da prova dos nove.

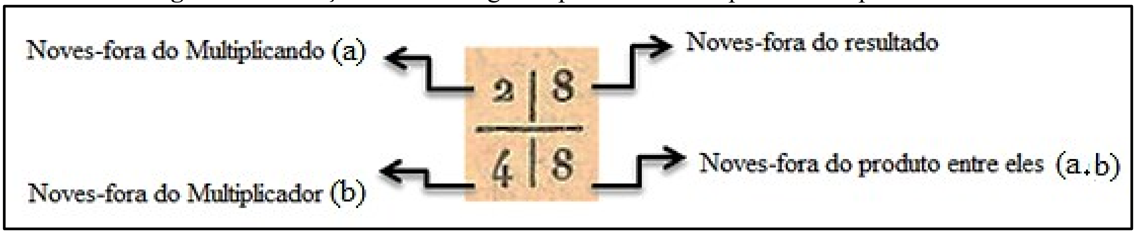


	2153. . .	Multiplicando.
2 | 8 / 4 | 8	364. . .	Multiplicador.
Prova dos noves fóra	8612 / 12918 / 6459	Productos parciaes.
	783692. . .	Producto total.

Fonte: (PINHEIRO, p.15, 1902).

Assim, o número "2" na simbologia da prova dos nove representa o *noves-fora* do multiplicando; o número "4" equivale ao *noves-fora* do multiplicador; o número "8" ao lado do quatro representa o *noves-fora* do produto (2 x 4); o número 8 ao lado do número dois representa o *noves-fora* do resultado, e como ambos coincidem, de acordo com a prova dos nove, a operação está correta. Para melhor ilustrar observe a figura 5:

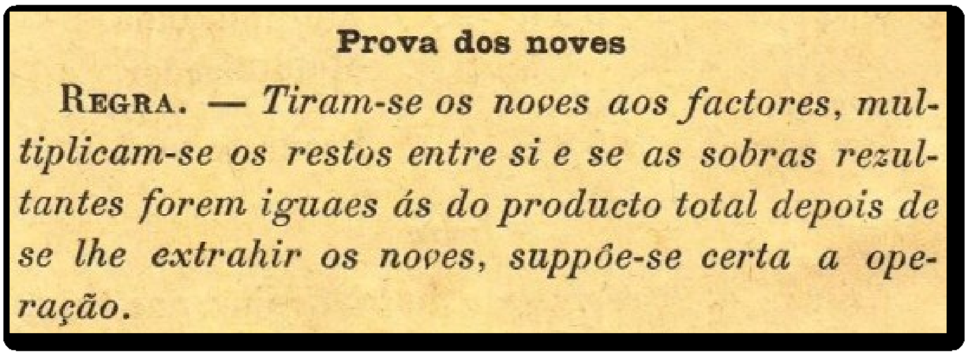
Figura 5: Ilustração da simbologia da prova dos nove para o exemplo anterior.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Posteriormente ao exemplo é que Pinheiro apresenta a "regra" da prova dos nove da multiplicação, descrevendo as etapas da realização desta prova para verificar se a multiplicação está correta, como pode ser visto na figura 6:

Figura 6: Prova dos nove da multiplicação.



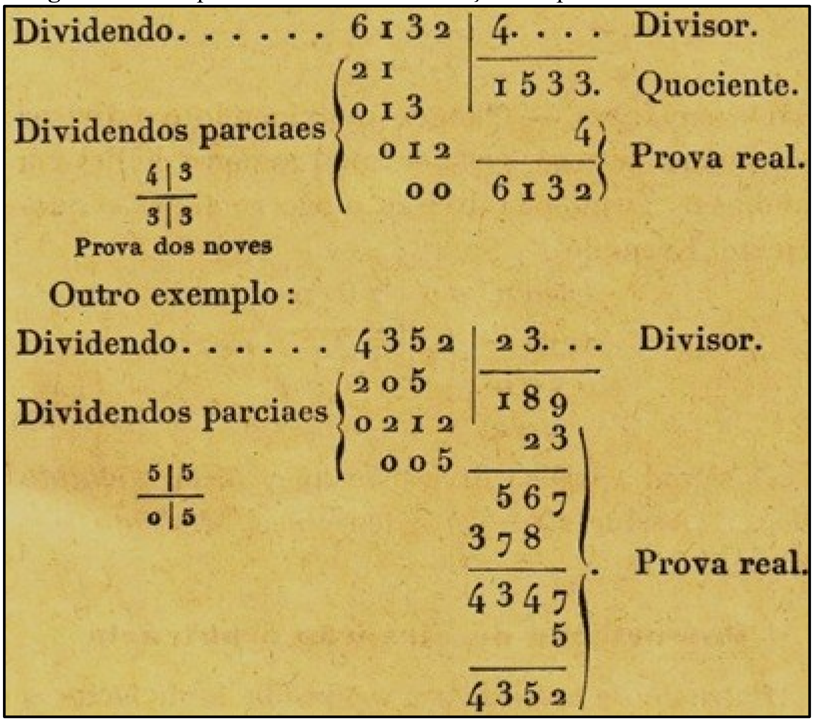
Prova dos noves

REGRA. — *Tiram-se os noves aos factores, multiplicam-se os restos entre si e se as sobras rezultantes forem iguaes ás do producto total depois de se lhe extrahir os noves, suppõe-se certa a operação.*

Fonte: (PINHEIRO, p.16, 1902).

Logo em seguida, iniciam-se as apresentações da divisão, e desta vez, não são mencionadas pelo autor, as *regras* que ensinem a se realizar a prova real e a prova dos nove para esta operação, apenas são apresentados dois exemplos numéricos com indicações das mesmas (ver figura 7).

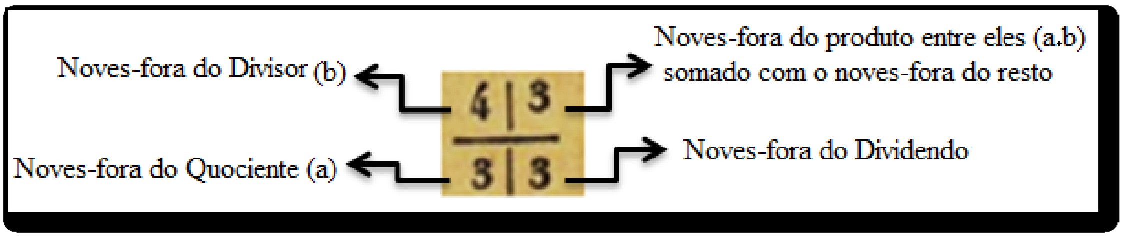
Figura 7: Exemplo de divisão com indicações de prova real e dos nove.


Dividendo. . . . . . 6 1 3 2 | 4. . . . Divisor.
Dividendos parciaes 21 013 012 00 | 1533. Quociente.
4
6132 Prova real.
4 | 3
3 | 3
Prova dos noves
Outro exemplo:
Dividendo. . . . . . 4352 | 23. . . Divisor.
Dividendos parciaes 205 0212 005 | 189
23
567
378
4347
5
4352 Prova real.
5 | 5
0 | 5

Fonte: (PINHEIRO, p.17, 1902)

Assim, nos exemplos há a indicação da prova dos nove por meio da simbologia no lado esquerdo da operação, como foi feito no exemplo anterior da multiplicação. Para melhor compreensão desta simbologia, observe a figura 8:

Figura 8: Ilustração da simbologia da prova dos nove para o exemplo da divisão.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Diante disso, em ambos exemplos apresentados pelo autor, o *noves-fora* do dividendo coincidiu com o valor do *noves-fora* do produto entre (a) e (b) somado com o *noves-fora* do resto, e assim, de acordo com a prova dos nove, as operações estão corretas. Pode-se observar que a prova real também é ilustrada pelo autor no decorrer do exemplo.

Vale salientar que, dando continuidade, neste mesmo capítulo do livro o autor apresenta a prova da potenciação e da radiciação, nestes casos trata-se apenas da prova real de cada uma delas. E assim encerram-se as provas mencionadas por Pinheiro ao longo de sua obra.

Considerações Finais

Este texto buscou compreender como a prova dos nove é interpretada em algumas pesquisas e apontar indícios de sua origem. Além disso, foram apresentados os significados das expressões "prova dos nove" e "*noves-fora*" que se diferem, demonstrando cada um deles, sendo o primeiro dividido em quatro etapas, compreendendo a demonstração para cada operação fundamental.

Pela revisão bibliográfica constatou-se que a prova dos nove é vista de diferentes maneiras: como técnica, regra, método ou prática-social. Mas, estas pesquisas mencionam que se trata de uma prova de verificação de cálculo para as operações fundamentais e que esta se relaciona com vários outros conteúdos matemáticos (divisibilidade do número nove, decomposição decimal de um número natural, indução matemática, entre outros). Quanto à origem da prova dos nove, o indício mais antigo da presença desta prova, foi no século III com Hipólito, o qual já conhecia e mencionava este método.

Para melhor compreender como tal prova era ensinada nas escolas, ou pelo menos, como era prescrita em um dos livros didáticos de décadas passadas, analisamos a 2ª edição da obra "Arithmética Primaria" de 1902, escrito por Cezar Pinheiro, a qual se encontra digitalizada no repositório institucional da UFSC. Nesta obra, a prova dos nove estava vinculada com o ensino das operações fundamentais, apresentada como um prova de verificação para os cálculos aritméticos, além disso, não é considerada como uma prova real pelo autor.

Assim, ao concluir a adição e subtração, Pinheiro apresentava a prova real e a prova dos nove de ambas operações, e da mesma forma foi feito com a multiplicação e divisão. Vale lembrar, que os procedimentos desta prova eram enunciados como "regras" pelo autor, e somente no caso da divisão esta regra não foi apresentada. Além disso, o autor ilustrou a prova dos nove por meio de uma simbologia ao lado esquerdo dos exemplos das operações, mas não a explicou em sua obra.

Partindo do que foi exposto, nota-se a grande preocupação do autor de verificar as operações realizadas pelos alunos através de uma prova, seja a prova dos nove ou a prova real, as quais são definidas pelo autor como uma nova operação pela qual se verifica o resultado da primeira. Infere-se também que Pinheiro não se preocupa em relacionar a prova dos nove com outros conteúdos aritméticos que a fundamentam, como é o caso da regra de divisibilidade do número nove. Da mesma forma, o autor não apresenta os motivos que o levou a indicá-la como "*resultados negativos*", como foi mencionado anteriormente. Mas, em contrapartida, enfatiza a importância de se utilizar a prova no aprendizado das quatro operações.

Cabe salientar que investigar as abordagens metodológicas de conteúdos matemáticos em outros períodos possibilita uma significativa colaboração para estabelecer um modelo didático de ensino de matemática nos dias atuais, oferecendo contribuições epistemológicas para a formação do professor e tornando suas práticas mais claras e significativas.

Referências

AUTOR 2. Repositório. In: VALENTE, Wagner Rodrigues [org.] – **Cadernos de Trabalho**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015, vol. 3.

BEZERRA, S. Como me tornei professora de matemática: memórias resgatadas através da história da educação matemática. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 2013, Curitiba. **Anais...** Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007, 654p.

CARVALHO, N. T. B; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos da Matemática**. Florianópolis: UFSC/EaD/CED/CFM. 2006.168p.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Porto Alegre**: Teoria & Educação,** vol 2, 1990, p. 177-229.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001. 336p.

CRUZ, J. Z. da S. **Divisibilidade e prova dos noves**. 53 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Higyno H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004. 844p.

FRANÇA, M. do P. S. G. de S. A. A implantação dos grupos escolares no estado do Pará. In: **VII Congresso Brasileiro de História da Educaçã**o, 2013, Cuiabá-MT. Circuitos e Fronteiras da História da Educação no Brasil. Cuiabá-MT: UFMT, 2013.

MIGUEL, A. Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa em História (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35A, abril, 2010 p. 01-57.

MIGUEL, A.; SOUZA, E. da S**.** Um estudo sobre o processo de obsolescência de uma prática cultural: a prova dos nove. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), 3, 2006, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2006.

OLIVEIRA, A; LUTOSA, L. A prova dos nove. **Caderno dá licença**. Universidade Federal Fluminense. vol 1. Ano 1. Dez/1998. Disponível em:

<http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume1/a_prova_dos_nove.pdf.> Acesso em 11 de julho de 2015.

PINHEIRO, C. **Arithmetica** Primaria. *2* ed. Pará: Livraria Moderna, 1902. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134440>. Acesso 06 de nov. 2015.

RIBEIRO, D. M. A preparação de aulas usando história da Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal: EDUFRN – editora da UFRN. ano 1 n. 1, jul./nov. 2006, p. 148-163.

RODRIGUES, F. W. A Prova dos nove. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 14, 1989. p.17-20.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. New York: Dover Publications, 1958, c1953. 2v.703p.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. 2008.