

## **Génesis instrumental: un estudio de la instrumentalización de la condición geométrica de la elipse**

### **Instrumental genesis: a study of the instrumentalization of the geometrical condition of the ellipse**

Jesus Victoria Flores Salazar<sup>1</sup>  
[jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)

José Carlos León<sup>2</sup>  
[a19801146@pucp.pe](mailto:a19801146@pucp.pe)

#### **Resumen**

Presentamos una investigación que trata de los procesos de instrumentalización de la condición geométrica de la elipse en estudiantes de arquitectura de una universidad particular de la ciudad de Lima. Como base metodológica, utilizamos aspectos de la Ingeniería didáctica y para el análisis de la secuencia de actividades desarrolladas por los estudiantes, utilizamos el Enfoque Instrumental. Las acciones mostradas por los estudiantes permitieron identificar posibles esquemas de utilización que construyeron y movilizaron, de manera progresiva, mientras interactuaban con el artefacto elipse. Además la secuencia de actividades permitió observar el surgimiento de la condición geométrica de la elipse como medio para la comprensión de otras propiedades de este objeto matemático.

**Palabras clave:** Génesis Instrumental; Esquemas de Utilización; Geogebra.

#### **Abstract**

We present a research dealing with the instrumentalization processes of the geometric condition of the ellipse. In this research we developed activities aimed with architecture students at a private university in Lima. As a methodological basis we used aspects of didactic engineering and to analyze the activities developed by students, we used the Instrumental Approach. Actions showed by students allowed identifying possible schemes of utilization which were built and mobilized progressively while interacting with the ellipse device. In this paper we show a sequence of activities that allows observation of the emergence of the geometric condition of the ellipse as a means for understanding other properties of this mathematical object.

**Keywords:** Instrumental Genesis; Utilization Schemes; Geogebra.

#### **Aspectos preliminares**

El presente artículo se centra en el análisis del proceso de génesis instrumental, específicamente la instrumentalización de la condición geométrica de la elipse. Para el desarrollo de la investigación se elaboró una secuencia de actividades en las que se utilizó el

---

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú. Pos-doctoranda en el Programa de Estudios Pos-graduados en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. Bolsista do CNPq – Brasil.  
[jvflores@pucp.pe](mailto:jvflores@pucp.pe)

<sup>2</sup> Universidad de Lima- Perú. [a19801146@pucp.pe](mailto:a19801146@pucp.pe)

ambiente de geometría dinámica Geogebra que fue trabajada con estudiantes de la asignatura de Matemática I en una Universidad particular de la ciudad de Lima.

Como herramienta tecnológica utilizamos el ambiente de geometría dinámica Geogebra versión 4.2.57.0 de libre disposición. Empleamos, como recursos disponibles, computadoras tanto para el profesor como para los estudiantes. Para la recolección de los datos utilizamos fichas de trabajo de las actividades propuestas, así como fichas de observaciones (tres docentes que fungieron de observadores del experimento). De igual forma, la recolección de datos fue registrada con las grabaciones de los archivos que son visualizadas con la herramienta *Protocolo* del menú Vista del Geogebra.

Como investigaciones de referencia sobre la noción de elipse, presentamos las de Santa (2011) y Fernández (2011) que muestran que en la enseñanza de la elipse, se privilegia su tratamiento algebraico y se deja de lado su tratamiento como lugar geométrico.

En ese mismo sentido, la investigación de León (2014) desarrolló un estudio de elipse mediante construcciones basadas en propiedades de algunos elementos geométricos, como la mediatriz. Además, el investigador afirma que no solo se puede comprender la noción de elipse articulándola a una ecuación algebraica con dos variables, sino que existen otros planteamientos con sus propias complejidades alrededor del proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse.

Es importante señalar que Fernández (2011) plantea una secuencia didáctica, basada en la Teoría de Situaciones Didácticas para el aprendizaje de las cónicas y afirma que ésta puede construirse, tanto de manera puntual (punto a punto), como global (representación total) y, a partir de allí, vincularla con su representación algebraica; o de manera inversa, es decir, de lo global a lo puntual de sus propiedades intrínsecas. Al respecto, el autor indica que

las investigaciones en didáctica de la geometría analítica señalan a menudo la importancia de no subestimar ni dejar de lado el sistema lógico deductivo de axiomas, postulados, definiciones que emergieron en una época anterior de Descartes y, también, recomienda tener en cuenta las construcciones geométricas de las curvas cónicas como otra competencia básica, y como un proceso importante en la actividad matemática asociada al razonamiento y comunicación de saberes matemáticos. (FERNÁNDEZ, 2011, p. 26).

Además, el investigador señala que las construcciones geométricas están asociadas al razonamiento y a la comunicación de la actividad matemática y, por lo tanto, deben contener procedimientos de tipo geométrico.

En ese mismo sentido, Santa (2011) en su investigación muestra que los estudiantes se limitan a hacer esbozos de elipses a partir de diferentes ecuaciones algebraicas sin que haya

de por medio una reflexión de la construcción de dicha curva y de la movilización de otros conceptos como mediatriz y circunferencia, desde la perspectiva del lugar geométrico. La investigadora presenta la noción de elipse por medio del uso de material concreto “geometría del doblado del papel” y, por medio de este material determina la condición geométrica de la elipse.

Por otro lado, después de estudiar los planes de estudio (mallas curriculares) de algunas universidades del país y observamos que existe una desatención gradual en la enseñanza de la geometría y en particular a las construcciones geométricas (nos referiremos en especial a la enseñanza de las secciones cónicas como lugares geométricos). Esta situación conduce al excesivo uso de tratamientos algebraicos y hace que los estudiantes dejen de lado las representaciones figurales.

En cuanto al uso de ambientes de geometría dinámica (AGD) para la enseñanza de las matemáticas coincidimos con Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006), cuando sostienen que el uso de estos ambientes permiten que las representaciones estáticas se muestren, de manera dinámica e interactiva, en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, y que las representaciones del objeto matemático en estos ambientes contribuyen a que los estudiantes vinculen la representación con sus significados geométricos. Precisamente, los autores indican que, en décadas pasadas, la carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos condujo a la confrontación entre los procesos axiomáticos deductivos y empíricos. Además, mencionan que esta confrontación llevó a otros investigadores a centrarse en el rol que juegan las representaciones proporcionadas por los ambientes de geometría dinámica.

Actualmente, observamos que el uso cada vez más frecuente en la enseñanza a nivel superior, de software de geometría dinámica como el Geogebra, contribuye a que la geometría vuelva a tomar el rol protagónico en la enseñanza de la matemática en Educación Básica Regular y a nivel universitario.

De igual forma, observamos que existe una excesiva vinculación en la enseñanza de las secciones cónicas con el sistema de coordenadas cartesianas. Esta particularidad origina que en situaciones en las que se prescinde de los ejes coordenados, los estudiantes no consideren las propiedades de estas curvas como invariantes.

Respaldados por estos argumentos, el presente artículo está centrado en el surgimiento progresivo de la condición geométrica de la elipse y en la movilización de esta condición como instrumento en la construcción de otras características de la elipse. Asimismo

utilizamos en la presente investigación, el ambiente de geometría dinámica Geogebra como herramienta tecnológica en la enseñanza y aprendizaje de la elipse y como base teórica aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) que es pertinente ya que permite realizar el análisis de las acciones de los estudiantes durante una secuencia de actividades.

En este contexto, los estudiantes movilizan nociones que les permita realizar construcciones geométricas, cada una orientada hacia tareas específicas pero que coordinadas unas con otras constituyen el enriquecimiento progresivo de la condición geométrica de la elipse.

### **Enfoque Instrumental**

Rabardel (1995) señala que en toda situación en la que un sujeto utilice explícita o implícitamente un instrumento dirigida hacia un objeto, existirá una triada de elementos: *sujeto, instrumento y objeto*.

Al respecto, el autor señala que el *sujeto*, puede entenderse como un usuario, estudiante, operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrolla una determinada acción con un instrumento. Por otro lado, el *instrumento* puede ser una herramienta, máquina, incluso una propiedad, que sirve como mediador entre el sujeto y el *objeto* a donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento. El investigador considera que cualquier medio material o simbólico fabricado por el hombre pero que no especifica un tipo de relación particular con el objeto al cual se dirige, no es un instrumento, utiliza para esta descripción el término artefacto, designación neutra que no puntualiza una conexión específica con el objeto. El investigador señala que el artefacto ha sido elaborado para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. El artefacto es visto desde distintas perspectivas, la primera como una máquina que obedece a determinadas normas y restricciones específicas; la segunda, en relación a su uso, visto como un productor de transformaciones, de lo que le sucede a los objetos; y la tercera, como un medio para la acción del sujeto, en el que el sujeto ya lo considera listo para la acción.

De acuerdo con este enfoque, el instrumento no puede ser visto ni reducido a un artefacto, el instrumento es el artefacto en acción, definido como una entidad mixta, una totalidad que abarca dos entidades, la primera, el artefacto material o simbólico, producido por el propio sujeto o por otros y la segunda, formado por esquemas que son el resultado de las acciones organizadas producto de la propia construcción del sujeto o de una apropiación

de esquemas sociales exteriores al sujeto. Es decir, el instrumento no es solo un objeto externo al sujeto sino que debe ser vinculado a la acción, producción y construcción del propio sujeto.

En las primeras actividades de la investigación que presentamos en este artículo, los estudiantes (*sujetos*) traen como repertorio esquemas preexistentes, módulos organizados como el manejo de las propiedades de la mediatriz o de la circunferencia, que logran movilizar como *instrumentos* dirigidos a construir el significado de la condición geométrica de la elipse, que es *objeto* de la actividad. Dicho objeto incluso evoluciona durante la secuencia de actividades y es posible que se transforme en instrumento, ya que es enriquecido con nuevos esquemas.

Sobre los esquemas, Rabardel (1995) indica, que están asociados a la utilización de los artefactos, los cuales denomina *esquemas de utilización*. Explica, que en el desarrollo del concepto de esquemas, es importante tener en cuenta la especificidad de los contenidos. Tomamos en esta parte, la investigación de Salazar (2009) quien señala, en el sentido de Vergnaud, que los esquemas están relacionados con las conductas en función de la naturaleza de los contenidos e indica que:

Los esquemas constituyen la organización invariante de la conducta para un tipo de situaciones, tanto en el plano de la acción como de la actividad simbólica. Los esquemas no funcionan de la misma manera en diferentes clases de situaciones. (SALAZAR, 2009, p. 71).

El esquema ya no solo es mostrado como la unidad de funcionamiento responsable de guiar la acción, sino que el accionar de la conducta está en términos de la naturaleza de los contenidos y que cada contexto requiere que el sujeto disponga de ciertos esquemas específicos, que son atribuibles de acuerdo a la situación.

Al respecto Vergnaud (1990, citado en Rabardel, 1995), indica que los esquemas de contenido científico, se construyen sobre esquemas organizadores de la conducta; es decir, administrados por elementos cognitivos que dirigen las acciones del sujeto y que están en relación a todos los tipos de conductas y de competencias matemáticas complejas que se construyen sobre ellos y dado que los esquemas están asociados a los tipos de conductas, estos tienen la misma característica que los procedimientos algorítmicos.

Tomemos un ejemplo en el campo de la matemática: el esquema de construcción de la mediatriz de un segmento. La sucesión de trazos muestra una organización invariante de la conducta del sujeto relacionada a hábitos aprendidos: el trazo del punto medio del segmento correspondiente, trazo de una recta perpendicular por el punto medio del segmento y la propiedad que anuncia que cualquier punto de la recta mediatriz equidista de los extremos del

segmento. Esta automatización de las acciones del sujeto de acuerdo a los contenidos, viene dirigida por el funcionamiento de ciertos elementos cognitivos del sujeto, lo que permite generar estas sucesiones de acciones.

De acuerdo a Rabardel (1995), los esquemas de utilización relativos a la utilización de un artefacto, son clasificados teniendo en cuenta dos dimensiones de la actividad. Así, cuando nuestras acciones gestionan características y propiedades particulares del artefacto, con metas específicas, pero secundarias respecto a la tarea principal, son actividades relativas a las *tareas segundas*. En cambio, cuando estas acciones se coordinan como unidad de funcionamiento y cuya coherencia garantiza conseguir el objeto de la actividad, son actividades relativas a las *tareas primeras o principales*. El autor llama *esquemas de uso*, a las acciones relativas a las tareas segundas, los cuales son esquemas elementales que no pueden ser descompuestas en unidades más pequeñas puesto que sus metas son específicas y están orientadas a gestionar ciertas características del artefacto. El autor llama *esquemas de acción instrumentada* a las acciones relativas a las tareas primeras. Están formados por los esquemas de uso, el sujeto los incorpora como constituyentes, logrando una coordinación recíproca entre ellos y además con otros esquemas que traen de su repertorio de esquemas, con el fin de operar transformaciones sobre el objeto de la actividad, por ejemplo, en una determinada situación los estudiantes movilizan la noción de mediatriz y de circunferencia para determinar la condición geométrica de la elipse.

Ambas, tanto la noción de mediatriz como la de circunferencia, obran como esquemas de uso, cada una con objetivos específicos: trazar una recta perpendicular a un segmento dado y determinar puntos equidistantes a un punto fijo llamado centro. De acuerdo a la situación o secuencia de aprendizaje, dichos esquemas podrán ser abarcados por otro esquema, la condición geométrica de la elipse, el cual es un esquema de acción instrumentada porque está constituida por los esquemas mediatriz y circunferencia, que como esquemas de uso se hallan subordinados y en concordancia probablemente con otros esquemas, que como acto global conforman el esquema condición geométrica de la elipse.

El autor indica acerca de los esquemas de uso (EU) que:

Los esquemas de uso relativos a las tareas segundas. Estos pueden situarse en el nivel de esquemas elementales (en el sentido de que no pueden descomponerse en unidades más pequeñas susceptibles de responder a una meta identificable); pero, esto no es necesario: pueden ellos mismos estar constituidos por totalidades que se articulan en un conjunto de esquemas elementales. (RABARDEL, 1995, p. 172).

Por ejemplo, la condición geométrica de la elipse, propuesta en el ejemplo anterior

como un esquema de acción instrumentada, construida sobre la base de otros esquemas como la mediatriz y la circunferencia, puede ser considerada en otra situación, un EU que responde a una meta específica, es decir que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante, igual a la longitud del eje mayor* ; dicho esquema en concordancia con otros EU como el teorema de Pitágoras: *en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la suma de los catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa* , podrían determinar la longitud del lado recto de la elipse, a la que el enfoque instrumental identificaría como un esquema de acción instrumentada. En el caso de los esquemas de acción instrumentada (EAI) Rabardel (1995) afirma que:

Los esquemas de acción instrumentada que consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Estos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel (esquemas de uso). Lo que les caracteriza es que son relativos a las tareas primeras. Los esquemas de primer nivel (esquemas de uso) constituyen, según Cellerier, módulos especializados que se coordinan unos con otros y también con otros esquemas, se asimilan y se acomodan recíprocamente para constituir los esquemas de acción instrumentada. (RABARDEL, 1995, p. 172).

Si consideramos la longitud del lado recto de la elipse un EAI, este esquema incorporará como componentes otros esquemas de uso, como la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros y la relación pitagórica, todos estos subordinados a una organización general, que en forma conjunta coordinan entre sí para formar una totalidad que la teoría identifica como el esquema de acción instrumentada lado recto de la elipse.

Además, el autor señala que dado el sujeto construye esquemas de manera propia o de una apropiación de esquemas sociales exteriores al sujeto, es importante considerar el esquema de actividad colectiva instrumentada (en adelante, EACI), el cual es incorporado a los EU y a los EAI. Estos esquemas de actividad colectiva instrumentada corresponden a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios. Asimismo, que tanto el esquema como el artefacto conservan su independencia a pesar de mantenerse vinculados entre sí.

Nos referimos a que un esquema de utilización puede aplicarse en situaciones similares o distintas a la de la situación inicial. Por ejemplo, las acciones o esquemas de utilización que un sujeto moviliza para la elipse pueden ser empleadas en una situación similar para la noción de hipérbola; es decir, un mismo esquema de utilización adaptado a una multiplicidad de artefactos de una misma clase, aunque también puede ser aplicado a otras clases distintas, lo cual, sin embargo, podría traer inconvenientes como cuando los estudiantes que quieren representar una hipérbola, lo hacen con dos ramas parabólicas. De

igual forma, un artefacto puede ser insertado en otras situaciones, como instrumento; por ejemplo, en la construcción de superficies cuádricas tales como el elipsoide, paraboloides elíptico, hiperboloides de una hoja, de dos hojas, en donde algunas secciones transversales a estas superficies, en ciertos planos, son elipses.

Respecto al proceso de *génesis instrumental*, Rabardel (1995) explica que el instrumento no está dado, es el sujeto quien lo elabora, y que tanto el sujeto como el artefacto intervienen en este proceso de elaboración instrumental, que se inicia incluso en el diseño mismo de los artefactos. De esta forma, las actividades relacionadas al surgimiento o evolución de las componentes artefactuales, en el cual el sujeto se dirige para modificar la organización de sus elementos, agrupándolos, reconfigurándolos, atribuyéndole funciones y características es denominado *instrumentalización*. El proceso, mediante el cual surgen y evolucionan los esquemas de acción instrumentada, por acomodación, coordinación, asimilación de artefactos nuevos, es denominado *instrumentación*.

En otros términos, nos encontramos en un proceso de instrumentalización, si la actividad del sujeto está orientada hacia las componentes del artefacto con la finalidad de atribuirle funciones y enriquecerlas de manera momentánea o durable, dependiendo si es una acción singular, por circunstancias de su desarrollo o producto de una clase de acciones o situaciones; mientras que en el proceso correlativo, si la actividad del sujeto está dirigida hacia el propio sujeto, ocurre la asimilación de nuevas componentes artefactuales y como resultado la acomodación de sus esquemas y de cambios de significados de los instrumentos, que son justamente las actividades atribuidas a los procesos de instrumentación.

De manera puntual, ambos procesos: instrumentalización e instrumentación, indica el autor, actúan de manera solidaria para que surjan y evolucionen los instrumentos, ya que el descubrimiento progresivo que realizan los sujetos de las propiedades del artefacto viene acompañado del surgimiento y acomodación de esquemas por la asimilación de estas componentes artefactuales. La orientación de la actividad del sujeto, es en todo caso, la única señal distintiva de ambos procesos.

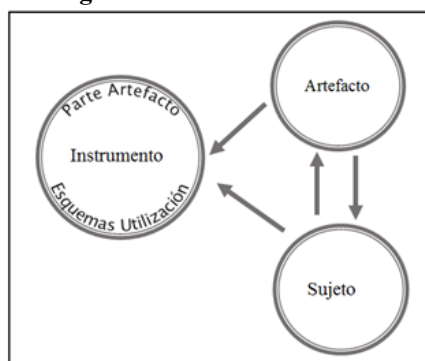
Es importante destacar, sobre dichos procesos instrumentales, que todo sujeto maneja desde ya, un repertorio de esquemas y que estos son acomodados o generalizados al nuevo artefacto para atribuirle un cambio de significado. Por ejemplo, en nuestra investigación, los esquemas como mediatriz y circunferencia, son parte del repertorio que movilizan los estudiantes para atribuirle un significado a la elipse en el proceso instrumental.

En la figura 1, mostramos la transformación del artefacto a instrumento es decir, el



proceso de génesis instrumental. La dirección que nos indican las flechas nos muestran las interacciones entre el sujeto con el artefacto: el sujeto dirigiéndose al artefacto y este es asimilado en los esquemas del sujeto. Como resultas, se obtiene un ente mixto, llamado instrumento.

**Figura 1:** Proceso instrumental



**Fuente:** Elaborado por el autor

Además, el descubrimiento progresivo de las componentes artefactuales son incorporadas a los esquemas del sujeto, dicha asimilación artefactual en el sujeto provoca el surgimiento y acomodación de los esquemas de utilización y por tanto, un cambio en el significado del instrumento.

En realidad, sea por el lado del artefacto o del sujeto, el proceso de génesis instrumental no se inicia sin tener en cuenta que el sujeto ya tiene un repertorio de esquemas y que incluso el artefacto tiene funciones que fueron previamente definidas por el diseñador, que son sus propiedades intrínsecas o funciones constituyentes; pero, a medida que se desarrolla el proceso de instrumentalización, el sujeto provoca el surgimiento de nuevas funciones, momentáneas o durables, que son consideradas funciones constituidas.

Finalmente, Rabardel (1995) enfatiza que el artefacto solamente pasará al estado de instrumento cuando el sujeto le asigne esquemas de utilización. De allí que el instrumento es una entidad mixta, que asocia al artefacto y a los esquemas o los modos cómo se usan los artefactos. Justamente, el sujeto moviliza sus esquemas sobre los artefactos pues los convierte en medios y, por otro lado, los esquemas vinculados a los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de la asociación del artefacto a la acción del sujeto cuya característica principal es la de adaptarse al sujeto y al objeto. Además, señala que el término “instrumento” designa al artefacto en situación de uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto y el objeto sobre el cual se actúa.

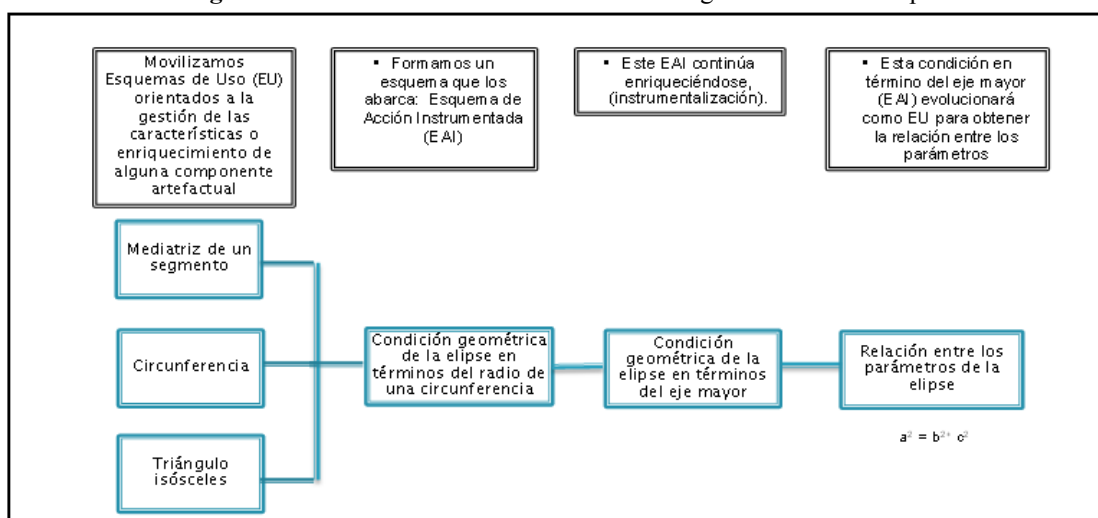
### **Proceso de Génesis Instrumental: condición geométrica de la elipse**

La investigación que presentamos en este artículo, como mencionamos antes, muestra cómo estudiantes de primer año arquitectura se apropiaron de la condición geométrica de la elipse que indica que: *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante, igual a la longitud del eje mayor*, y además muestra cómo esta condición es movilizadora como esquema de uso para alcanzar la comprensión de otras propiedades de este objeto matemático.

Acercas de los sujetos de investigación, establecimos posibles esquemas preexistentes que movilizaron los estudiantes. De acuerdo a ello, mencionamos que existen indicios para señalar que estaban *instrumentados* en relación a la noción de mediatriz de un segmento, pues durante el desarrollo de la secuencia de actividades, movilizaron la propiedad que indica que *si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento, entonces equidista de los extremos del segmento*, además mostraron evidencias de estar instrumentados con la circunferencia en tanto *sus puntos equidistan de otro punto fijo llamado centro* y con las propiedades de un triángulo isósceles, los cuales fueron movilizadores como esquemas de uso en la secuencia.

De acuerdo al enfoque instrumental, todos estos EU (la mediatriz, circunferencia, triángulo isósceles), son módulos especializados que se coordinan unos con otros con la finalidad de determinar la condición geométrica de la elipse en términos del radio de la circunferencia. Dicho esquema emerge como un EAI que abarca y subordina a los EU (mediatriz, circunferencia, triángulo isósceles) los cuales fueron movilizadores inicialmente con las propiedades específicas que cada elemento geométrico proporciona. Ya constituida la condición geométrica de la elipse (EAI), es enriquecida con una característica adicional (proceso de instrumentalización) a través de una secuencia de actividades orientadas a gestionar y hacer surgir otra característica en dicha condición: expresarla en términos del eje mayor de la curva, lo que significa que los estudiantes prescindieron del radio de la circunferencia para la descripción de dicha curva. Precisamente dicho EAI (la condición geométrica en términos del eje mayor de la curva) evoluciona como un EU ya que fue movilizador como instrumento junto a otros esquemas que los estudiantes tenían preconcebidos, como el teorema de Pitágoras, logrando determinar otra propiedad intrínseca (la relación entre los parámetros de la elipse). En la figura 2, hemos diseñado un diagrama que esquematiza el proceso de la génesis instrumental de la condición geométrica de la elipse.

**Figura 2:** Génesis Instrumental de la condición geométrica de la elipse



**Fuente:** Elaborado por el autor

La condición geométrica de la elipse (EAI) al inscribirse en el seno de una secuencia de actividades, evoluciona y puede ser movilizada junto a otros esquemas como un EU, resultando un medio para determinar alguna propiedad intrínseca de la elipse, en este caso *el cuadrado del semieje mayor (a) igual a la suma de los cuadrados del semieje menor (b) y de la semidistancia focal (c), la relación que indica que  $a^2 = b^2 + c^2$ .*

### Desarrollo de la investigación

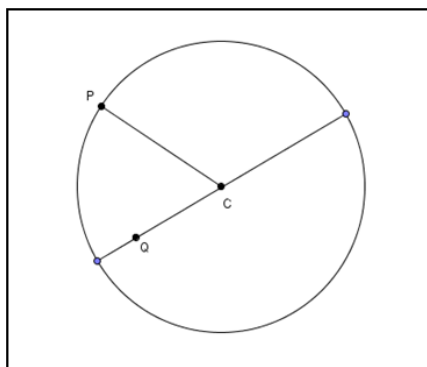
Para el desarrollo de la investigación utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual se distingue por su naturaleza experimental basada en las realizaciones didácticas. Justamente, esta parte experimental (secuencia de cuatro actividades) fue elaborada con la participación de seis estudiantes cuyas edades oscilan de 16 a 18 años de edad, matriculados en la asignatura de Matemática I en una Universidad particular y agrupados en equipos de a dos (se formaron tres equipos a los que denominamos equipo A, B y C respectivamente).

En el presente artículo mostramos el análisis del equipo A, pues al analizar sus acciones evidenciamos que los estudiantes movilizaron sus esquemas previos, como las propiedades de las mediatrices y circunferencias pero, además que construyeron y descubrieron nuevos esquemas de utilización.

En la **primera actividad** (ver figura 3), presentamos en el Geogebra la representación de una circunferencia que pasa por cualquier punto **P** con centro fijo en **C**, la cual contiene el

punto interior fijo  $Q$ , por donde se traza el diámetro de la circunferencia. En la actividad se pide determinar un punto  $A$  sobre el radio  $PC$  que equidiste de los puntos  $P$  y  $Q$  luego, clasificar el triángulo  $APQ$  de acuerdo a la longitud de los lados.

**Figura 3:** Actividad 1



**Fuente:** Elaborado por el autor

A *priori* consideramos que, existen indicios para señalar que los estudiantes ya estaban instrumentados en las nociones de circunferencia y mediatriz como lugar geométrico, así como con la construcción de triángulo isósceles, y, por lo tanto, no tendrían problema para movilizarlas como EU en tareas secundarias, orientadas a lo específicamente establecido por las propiedades de cada uno de estos EU.

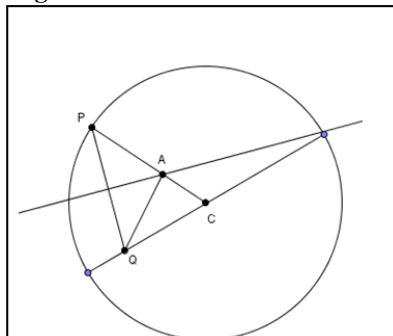
Pensamos que por ejemplo, los estudiantes trazarán sin dificultad la mediatriz del segmento  $PQ$  basados en una de las propiedades que indica que *es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento* y que determinarán el punto  $A$ , basados en la propiedad de la mediatriz que señala que *cualquier punto que pertenece a una mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento*.

De acuerdo a lo previsto, a *posteriori*, los estudiantes del equipo A movilizaron como EU la propiedad de la mediatriz del segmento  $PQ$  la noción de cuerda de una circunferencia como el *segmento cuyos extremos pertenecen a la circunferencia*, el uso de algunas herramientas del Geogebra, como la intersección de objetos, el trazo de segmentos, y de la recta mediatriz, de acuerdo a lo previsto a *priori*.

En la figura 4 mostramos el punto  $A$ , que fue determinado por el equipo A como se había previsto a *priori*. Luego pensamos que los miembros de este equipo movilizaron sus EU

preexistentes de triángulo y clasificaron al triángulo  $APQ$  como triángulo isósceles; pues movilizaron la propiedad de la mediatriz que indica *cualquier punto que pertenece a una mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento*.

**Figura 4:** Construcción Actividad 1

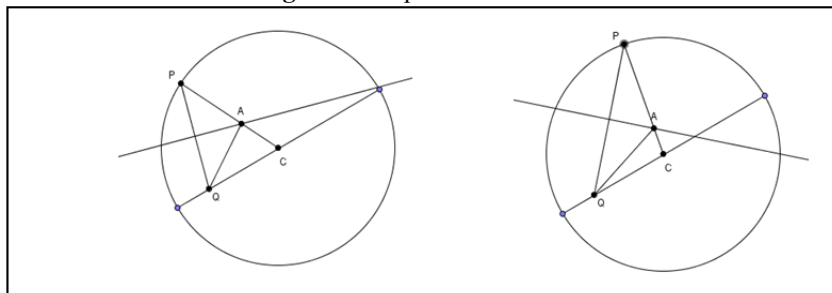


**Fuente:** Elaborado por el autor

En la *segunda actividad*, y basados en la figura de la actividad anterior, pedimos desplazar el punto  $P$  sobre la circunferencia (por medio el arrastre del Geogebra), indicando los elementos geométricos que mantienen invariantes sus propiedades y expresando el radio  $\overline{CP}$  de dicha circunferencia como la suma de la medida de dos segmentos no colineales.

Tal como mostramos en la figura 5, *a priori*, consideramos que, luego de arrastrar el punto  $P$  sobre la circunferencia los estudiantes señalarán cómo elementos invariantes al radio de la circunferencia y al triángulo isósceles  $APQ$  esto porque pensamos que se encuentran instrumentados con las nociones de circunferencia y mediatriz como lugares geométricos, este último en relación a la construcción de un triángulo isósceles, es decir el punto  $A$  equidista de los extremos  $P$  y  $Q$ .

**Figura 5.**Desplazamiento Punto P



**Fuente:** Elaborado por el autor

Conjeturamos que inicialmente los estudiantes podrían tener problemas para determinar el radio de la circunferencia como la suma de la medida de dos segmentos no colineales debido a que no disponen con certeza de la definición *segmentos colineales*, los cuales *deben pertenecer a una misma recta*. A partir de la precisión de dicho término, los estudiantes podrían explorar y movilizar sus esquemas sociales en grupo (EACI), para expresar el radio de la circunferencia en términos de dos segmentos no colineales. Pensamos que posiblemente justificarán su procedimiento movilizándolo como EU la propiedad de la mediatriz: *si el punto  $A$  pertenece a la mediatriz del segmento  $PQ$ , entonces la medida de los segmentos  $AQ$  y  $AP$  son iguales*, por lo que el radio de la circunferencia, podrá ser expresado no solo como la suma de la medida de los segmentos  $AC$  y  $AP$ , sino también como la suma de la medida de los segmentos  $AC$  y  $AQ$ .

*A posteriori*, de acuerdo a lo previsto, los estudiantes del equipo A presentan muestras de estar instrumentados en la noción de circunferencia como en la de mediatriz, ya que luego de arrastrar el punto  $P$  por la circunferencia, describieron al radio como un elemento invariante y al triángulo  $APQ$  como un triángulo isósceles, este último porque el punto  $A$ , contenido en la recta mediatriz del segmento  $PQ$ , cumple con la propiedad que indica que *cualquier punto que pertenece a una mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*, específicamente el punto  $A$ .

De igual forma, como señalamos *a priori*, se les brindó información en relación a la definición de segmentos no colineales, posibilitando la movilización de sus esquemas colectivos (EACI), los cuales determinaron que el radio de una circunferencia pueda ser expresado como la suma de dos segmentos no colineales. Notamos *a posteriori* que los integrantes del equipo A se encuentran instrumentalizados en la noción de circunferencia dado que sus acciones mostraron que movilizaron sus EU (la mediatriz de un segmento, circunferencia y segmentos no colineales).

Destacamos también, que el desarrollo de EACI de los estudiantes fue producto del trabajo en equipo y que fueron ejemplificados cuando los integrantes del equipo A desarrollaron la actividad, es decir que movilizaron sus esquemas de utilización.

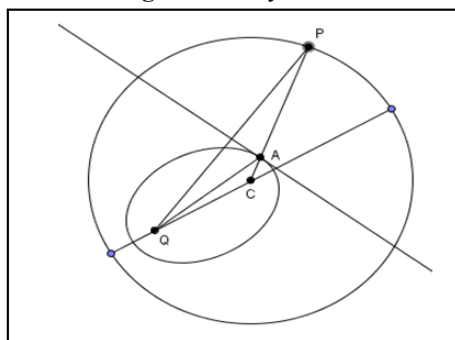
En la *tercera actividad*, pedimos a los estudiantes desplazar nuevamente el punto  $P$  sobre la circunferencia de la construcción de la actividad anterior, con el uso de la herramienta “active

rastros” indicando además, la condición geométrica que representa el rastro que va dejando la trayectoria del punto *A*.

En esta actividad *a priori*, pensamos que los estudiantes no tendrán problemas en determinar el trazo casi claro, similar a la marca que va dejando un punto a medida que es desplazado a través de la curva y que describirán como una trayectoria elíptica que cumple determinada condición geométrica, que determinarán al observar que el desplazamiento del punto *A* está relacionada a su posible EAI que indica que *la suma de las medidas de los segmentos no colineales AC y AQ corresponde a la longitud del radio de la circunferencia*.

De esa forma los estudiantes podrían señalar que dicha propiedad es la que mejor expresa la condición geométrica de la curva representada por el trazo determinado por la trayectoria del punto *A*, generada por la herramienta “activa rastro” y que mostramos en la figura 6.

**Figura 6:** Trayectoria



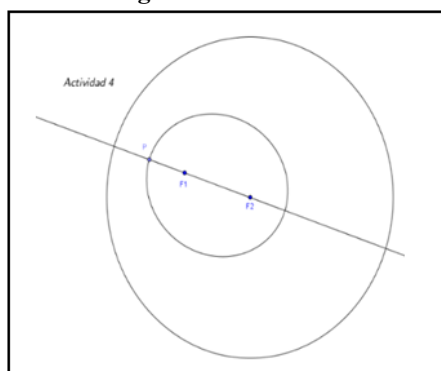
**Fuente:** Elaborado por el autor

De acuerdo al enfoque instrumental, *a posteriori*, podemos decir que para el equipo A, la curva dejó de ser un artefacto abstracto, pues reconocieron que la suma de las distancias de los segmentos *AC y AQ* es una constante igual al radio de la circunferencia, lo que de acuerdo al enfoque instrumental, sería una posible asimilación artefactual en el sujeto, que provoca el surgimiento de su EAI y por tanto, un primer acercamiento en el significado de instrumento, produciéndose la génesis instrumental de la condición geométrica de la elipse. Además, pensamos que en cuanto a la noción de circunferencia ésta continúa su proceso de instrumentalización en los estudiantes, pues se la sigue enriqueciendo con otros atributos, ya no solo expresando su radio como la suma de las medidas de dos segmentos no colineales sino que además es factible de construir una elipse a partir de un extremo de uno de los segmentos no colineales.

Pero la tarea principal, la constitución del EAI condición geométrica de la elipse, emergió en los estudiantes, como resultado de la movilización de sus EU es decir, como producto de las tareas secundarias en el proceso de instrumentalización de la circunferencia, los cuales fueron asociándose para originar la génesis de los esquemas, la asimilación de dichos artefactos y la acomodación de la elipse como lugar geométrico.

En la **cuarta y última actividad** (ver figura 7), definimos al eje focal como la recta que contiene a los focos **F1 y F2** y al eje mayor como la porción del eje focal que corta a la elipse en los puntos **V1 y V2** llamados vértices. La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro **C** del segmento que une los focos se llama eje normal, el cual corta a la elipse en dos puntos, la porción del eje normal comprendida entre estos puntos se llama eje menor.

**Figura 7:** Actividad 4



**Fuente:** Elaborado por el autor

Pedimos determinar la longitud del radio de la circunferencia de centro  $F_2$ , haciendo uso de la condición geométrica de la elipse. Luego, reescribir la condición geométrica de la elipse en términos del eje mayor.

De acuerdo al análisis *a priori*, pensamos que debido a los trazos que los estudiantes realizarán, relativos al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor, por medio de las herramientas del Geogebra, la noción de la elipse continuará siendo instrumentalizada por los estudiantes, también creemos que los estudiantes están instrumentados con la condición geométrica de la elipse como EAI pues determinarán que dado un *punto P de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, igual a **10** unidades, la cual

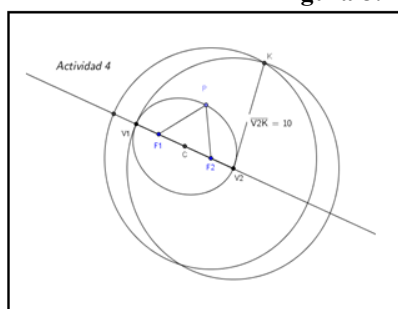


calcularon con la herramienta “distancia” del Geogebra y que corresponde al radio de la circunferencia.

Además, pensamos que la condición geométrica de la elipse seguirá siendo instrumentalizada por los estudiantes (grupo A) porque entendemos que lograrán determinar que la longitud del radio de la circunferencia es la longitud del eje mayor. Para indicar dicha afirmación creemos que harán uso de la herramienta “distancia” y calcularán la longitud del eje mayor y del radio de la circunferencia, sin elaborar trazos geométricos.

Así, en la figura 8, mostramos una de las posibles soluciones que podría realizar el equipo A para determinar que la longitud del eje mayor es igual al radio de la circunferencia. Para ello, deberían trazar una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje mayor y de radio la medida del eje mayor, dicha longitud coincide con el radio de la circunferencia de longitud 10 unidades.

**Figura 8:** Posible solución de la actividad 4



**Fuente:** Elaborado por el autor

De acuerdo a lo señalado *a priori*, el equipo A muestra estar instrumentalizado con algunas propiedades de la elipse debido a los trazos referidos al eje mayor, menor, focal y normal que realizaron en el Geogebra. Mientras que la condición geométrica de la elipse en términos del radio de la circunferencia (EAI), fue enriquecida con una propiedad adicional, es decir instrumentalizada en términos de la longitud del eje mayor. Además, dicho esquema evolucionó como EU ya que fue movilizada como instrumento, para determinar que dado un punto  $P$  de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante igual a **10 unidades**, que corresponde a la longitud del eje mayor y que calcularon, de acuerdo a lo previsto, con la herramienta “distancia”.

Al respecto y de acuerdo al enfoque instrumental de Rabardel (1995), el proceso de instrumentalización de la condición geométrica de la elipse (enriquecida ahora en términos de la longitud del eje mayor de la elipse) y el proceso de instrumentación (movilizada como

instrumento para modificar el propio instrumento elipse), caracterizan el proceso de génesis instrumental de la condición geométrica de la elipse. Observamos que los estudiantes (equipo A) lograron caracterizar la condición geométrica de la elipse en términos de la longitud del eje mayor de la elipse, prescindiendo del radio de la circunferencia.

### **Consideraciones finales**

Por medio de la secuencia de actividades, basados en el enfoque Instrumental, logramos analizar las acciones de los estudiantes del equipo A. Básicamente, logramos identificar los posibles esquemas de utilización (EU) que los estudiantes poseían y que fueron movilizados específicamente para ciertas tareas propias de dichos esquemas (tareas segundas) y en función del contexto de cada situación. De este modo, estas acciones, de acuerdo al enfoque instrumental se coordinaron y agruparon, logrando el surgimiento de la condición geométrica de la elipse (EAI) que era la tarea principal. El artefacto elipse dejó de ser abstracto y convertido en medio para modificar un objeto, incluso la misma elipse.

Por medio de las acciones de los estudiantes, percibimos que los estudiantes del equipo A movilizaron sus EU previos como la mediatriz de un segmento y la circunferencia vistos como lugares geométricos, así como las propiedades de un triángulo isósceles. A partir de dichos esquemas, se logró en los estudiantes, el surgimiento de la condición geométrica de la elipse (EAI) en términos del radio de una circunferencia, produciéndose la génesis instrumental ya que dicha curva deja de ser abstracta para los estudiantes. Dicho EAI, (condición geométrica en términos del radio de la circunferencia) continuó siendo instrumentalizado, ya que se le atribuyeron nuevas funciones en el que la condición geométrica se expresó en términos del eje mayor, incluso esta condición ( en términos del radio de la circunferencia) fue usada como instrumento para modificar su propio significado (en términos de su eje mayor). Este nuevo EAI, *la suma de sus distancias desde un punto de la elipse, a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual a la longitud del eje mayor*, evolucionó como EU para identificar una de las propiedades intrínsecas de dicha curva, es decir la relación entre los parámetros de la elipse.

Es importante señalar que los estudiantes movilizaron EACI, los mismos que fueron construidos sobre la base de los esquemas de utilización que compartieron de manera simultánea. Así, pudimos observar la convergencia de diversos esquemas de utilización cuando debieron expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de otros segmentos no colineales, la cual explicaron haciendo uso de la noción de triángulo isósceles como EU. Algo similar ocurrió con sus esquemas colectivos (EACI) cuando los estudiantes debieron expresar la condición geométrica de la elipse en términos de la longitud del eje

mayor de dicha curva. Mencionamos además, que el Geogebra es un programa de AGD que nos sirvió como herramienta en la enseñanza y aprendizaje de la elipse.

Reconocemos también que las herramientas del Geogebra facilitaron realizar las construcciones geométricas. Por ejemplo, el rastro que deja un conjunto de puntos, vista como lugar geométrico y que cumple con la condición geométrica de la elipse.

Finalmente, queremos indicar que aunque algunas de las funciones señaladas en la elipse fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar dicho nivel de instrumentalización.

## Referencias

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. & GÓMEZ, P. (1995). Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

BOYER, C. (1987). Historia de la matemática. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España.

FERNÁNDEZ, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Gèometre II Plus. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali.

LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K. and STRASSER, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers. Disponible en: <<https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf>> recuperado en: 10 de feb. 2014.

LEÓN, J. (2014). Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú.

RABARDEL, P. (1995). Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

SANTA, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada.

SALAZAR, J. V. F. (2009). Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo das transformações geométricas no espaço. Tesis de doctorado en Educación Matemática, Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. Pontificia Universidade Católica de São Paulo.