http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n1p194

O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação

Proportional reasoning and strategies to solve problems of missing value and comparison

Odalea Aparecida Viana
odalea@pontal.ufu.br

Juliene Azevedo Miranda
professorajulienemiranda@gmail.com

Resumo

O trabalho analisa as estratégias empregadas por alunos na solução de problemas envolvendo o raciocínio proporcional. Participaram do estudo 20 estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma escola particular de uma cidade de Minas Gerais, que responderam às questões de uma prova do tipo lápis e papel. Praticamente todos os alunos acertaram os problemas de valor omisso, sendo que a grande maioria valeu-se da relação de covariação entre as grandezas envolvidas; os problemas de comparação mais simples foram respondidos acertadamente pelo estabelecimento de relações parte-parte. Houve muita dificuldade nos problemas mais complexos de comparação, sendo que apenas quatro alunos valeram-se do referencial metade e um deles utilizou a relação de covariação. Os resultados indicam que não houve paralelo entre as estratégias para os dois tipos de problema e o trabalho sugere que devam ser oferecidas situações diferenciadas para ampliar o campo conceitual que se refere à proporcionalidade.

Palavras-chave: Raciocínio Proporcional; Campos Conceituais; Proporcionalidade.

Abstract

This paper analyses strategies used by students in problem solving related to proportional reasoning. Twenty students from sixth degree of elementary school from a city of the state of Minas Gerais participated in the study and answered to questions in a pencil-and-paper test. The students answered correctly the missing value problems, and the vast majority employed covariaton relationship between the quantities involved; problems of simpler comparison were correctly answered through the settling of part-part relationships. There was great difficulty in more complex problems of comparison, considering that only four of them used the referential of half and only one used covariaton relationship. The results indicate that there was no parallel between strategies to the two kinds of problem, and the work suggests that differentiated situations should be offered to broaden conceptual field related to proportionality.

Keywords: Proportional Reasoning; Conceptual Fields; Proportionality.

.

O raciocínio proporcional e a problemática investigada

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), alunos do terceiro ciclo do ensino fundamental (6º e 7º anos) deveriam explorar situações-problema que envolvem proporcionalidade – conteúdo constante do tema variação de grandezas.

Silvestre e Ponte (2009) afirmam que o termo proporcionalidade é usado de forma ambígua para designar proporções, razões, proporcionalidade direta e raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional tem sido tratado por vários autores nacionais e internacionais da área de Educação Matemática, conforme pode ser visto em Behr et al (1992), Costa e Ponte (2008), Lamon (1993, 2005), Lesh et al (1988), Maranhão e Machado (2011), Morton (2014), Ponte e Marques (2011), Spinillo (1992, 1993, 2002), Torre et al (2013), entre muitos outros.

Boa parte dos autores enfatiza que o raciocínio proporcional é fundamental na resolução de problemas de muitas áreas do saber e trata-se de um tópico que permite estabelecer conexões com o cotidiano dos alunos, com outros tópicos matemáticos e com outras disciplinas, e que constitui um elemento importante da iniciação dos alunos ao pensamento algébrico (COSTA&PONTE, 2008). Os autores também consideram que o raciocínio proporcional vai além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar conscientemente as relações entre quantidades; esta capacidade é evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Lesh et al (1988) apontam que o raciocínio proporcional está ligado com inferência e com predição – envolvendo o pensamento qualitativo e quantitativo – e implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (a invariância) e na noção de que estas grandezas variam em conjunto (a covariância).

Vários trabalhos interpretam os conceitos de razão e de proporção como constituintes das chamadas estruturas multiplicativas – que dizem respeito às operações de multiplicação e de divisão – conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Esta perspectiva teórica cognitivista sustenta que o conceito é definido como sendo uma terna de conjuntos: o conjunto das situações que dão sentido ao conceito; o de invariantes, ou seja, uma organização invariante de operações mentais para uma determinada classe de situações e que constitui as diferentes propriedades do conceito, e o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas para o conceito.

Segundo Vergnaud (1990), para quem o saber forma-se a partir de situações a dominar, problema é qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução. As representações simbólicas, além da função de comunicação, podem ser consideradas como suporte do pensamento, pois podem levar a um planejamento e controle de uma série de ações dominadas. Mas, é nos esquemas mentais – que nem sempre são evocados pelas representações simbólicas – que devem ser pesquisados os conhecimentos-em-ação do sujeito (os conceitos-em-ação e as teorias-em-ação) no processo de aprendizagem.

Nesta perspectiva, considera-se que o raciocínio proporcional dos estudantes pode ser investigado por meio das estratégias adotadas por eles – e representadas simbolicamente por palavras, desenhos ou símbolos matemáticos – quando resolvem problemas que avaliam o tema.

Spinillo (2002) agrupa as tarefas que avaliam o conceito de proporção em duas classes: tarefas de incógnita e tarefas de comparação. Já Lesh et al (1988) destacam sete tipos de tarefa para investigar o raciocínio proporcional do estudante: (a) problemas de valor omisso; (b) problemas de comparação; (c) problemas de transformação; (d) problemas de valor médio; (e) proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações e (f) problemas de conversão entre sistemas de representação para a proporcionalidade.

Na pesquisa relatada neste texto, serão enfocados dois tipos de problemas: os de valor omisso e os de comparação, já que a literatura aponta que são os mais utilizados para avaliar o raciocínio proporcional de estudantes.

Problemas de valor omisso e as estratégias empregadas por alunos

Nos problemas de valor omisso (ou tarefas de incógnita) são dados A, B e C da proporção A:B = C:X e é solicitado o valor do termo desconhecido "X". Spinillo (1992) propõe que a solução requer que se determine a relação de primeira ordem no primeiro par (A:B) e infira a outra relação de primeira ordem (C:X), sendo necessário, então, o estabelecimento de uma relação de segunda ordem (relação de relações). Questões desse tipo geralmente são resolvidas pelos alunos ao final do ensino fundamental pela chamada regra de três simples. No entanto, as estratégias próprias empregadas por alunos na resolução de problemas desse tipo têm sido investigadas como forma de se avaliar o raciocínio proporcional, conforme pode ser visto em Costa e Ponte (2008), Cramer e Post (1993), Lesh et al (1988), Silvestre e Ponte (2009) e Spinillo (1992, 1993, 2002), entre outros.

Por exemplo, uma das estratégias para resolver o problema de valor omisso “se três caixas iguais de bombons custam R$ 12,00, quanto pagarei por 6 dessas caixas?” seria determinar o preço de uma caixa (por divisão) e a seguir o preço das seis caixas (por multiplicação). Esta estratégia foi chamada de “razão unitária” por vários autores citados e indica a relação de “um para muitos”, conforme resumo feito por Magina et al. (2014) acerca da estrutura multiplicativa proposta por Vergnaud.

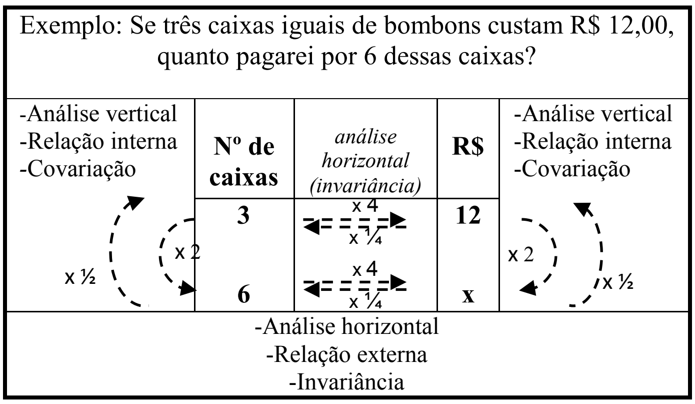
Para o mesmo tipo de problema, vários autores, entre eles, Costa e Ponte (2008), identificaram estratégias aditivas e multiplicativas. As aditivas consistem no processo de adições e subtrações sucessivas em que se utilizam resoluções numéricas e/ou pictóricas e constituem o chamado “pensamento aditivo”, conforme denominação de Magina et al. (2014) e Torre et al (2013). Foi identificado ainda um nível intermediário, ou seja, uma transição do pensamento aditivo para o multiplicativo: a estratégia utilizada foi formar grupos de uma mesma quantidade, por meio de ícones agrupados (IIII IIII IIII = 12), ou numericamente (4 + 4 + 4 = 12), conforme visto em Magina et al. (2014).

Entre as estratégias multiplicativas, destacam-se o procedimento escalar e o funcional, identificados por Costa e Ponte (2008), Pittalis, Christou e Papageorgiou (2003) e Silvestre e Ponte (2009), entre outros. No primeiro procedimento, é estabelecida uma relação interna (*within relation*) dentro do mesmo espaço de medida, ou seja, entre os elementos da mesma grandeza, e utiliza-se o raciocínio escalar. Por exemplo, no problema apresentado, o aluno percebe que 6 caixas referem-se ao dobro de 3 caixas e então aplica o escalar 2 para determinar o dobro de R$12,00, ou seja, R$ 24,00. Esta relação foi chamada por vários pesquisadores – entre eles, Silvestre e Ponte (2009) – de covariação de grandezas (refere-se às relações multiplicativas dentro das variáveis). Já Vergnaud (2009) denomina de análise vertical: ao dispor os dados do problema (classificado como isomorfismo de medidas e que envolve uma relação quaternária) na forma de linhas e colunas, a relação permite passar de uma linha a outra em uma mesma grandeza, aplicando-se um operador escalar.

Já o procedimento funcional envolve elementos de grandezas diferentes e a relação é chamada de externa (*between relation*), em que se recorre ao raciocínio funcional. Ainda utilizando o mesmo problema apresentado, o aluno percebe que de 3 para se chegar a 12 é necessário multiplicar por 4 e isso o leva a obter 6 vezes 4 (o que equivale a 6 caixas x R$ 4,00 por caixa), obtendo R$ 24,00. Vergnaud (2009) esclarece que se trata da chamada análise horizontal ou funcional – centrada na ideia de um operador-função, isto é, uma relação invariável (R$ 4,00 por caixa) que permite passar de uma grandeza a outra. Silvestre e Ponte (2009) denominam o procedimento descrito de esquema de invariância.

As estratégias multiplicativas, com as diferentes nomeações são ilustradas na Figura 1.

Figura 1: Exemplos de estratégias multiplicativas em um problema de valor omisso



Fonte: Elaboração das autoras

Os problemas de comparação e as estratégias empregadas por alunos

Tarefas de comparação de razões são menos comuns de serem tratadas na escola antes do ensino formal de razão e proporção. Problemas clássicos[1] como: "Júlia misturou 2 copos de suco concentrado em 4 copos de água e Paula misturou 3 copos de suco em 5 de água. Qual suco é mais forte?" geralmente são resolvidos por meio de técnicas para verificar equivalência de razões (aplicando a propriedade fundamental das proporções), por redução a mesmo denominador ou por transformação em números decimais ou porcentagem.

Para resolver problemas desse tipo, o indivíduo deve identificar duas grandezas e quatro valores, A, B, C e D e definir se as razões A:B e C:D são equivalentes e, em caso contrário, qual é maior ou menor. Novamente, para solucionar a questão é necessário estabelecer uma relação de primeira ordem no primeiro par de valores (A:B) e uma outra relação de primeira ordem no segundo par (C:D); a comparação entre elas consiste na relação de segunda ordem.

Para o tipo de problema apresentado anteriormente, será feita uma adaptação do esquema encontrado por Spinillo (1993) em tarefas de comparação para dimensões contínuas e complementares[2]. Assim, no problema proposto – que envolve dimensões discretas e complementares[3], ter-se-iam os elementos A (nº de copos de suco de Júlia), B (nº de copos de água de Júlia), A' (nº de copos de suco de Paula), B' (nº de copos de água de Paula) em quatro possíveis comparações parte-parte (razão) de inteiros discretos, simbolizadas por >, < ou =, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Tipos de problemas de comparação conforme relações de primeira ordem envolvendo inteiros discretos

Tipos de problema de comparação	Exemplo: Qual dos dois sucos (de Júlia e de Paula) é mais forte?	
(1) A>B e A'<B'	■■□□□□ A< B	■■■■□□ A > B
(2) A>B (ou A<B) e A'=B'	■■■■□□□ A >B	■■ □□ A= B
(3) A>B e A'>B'	■■■□□ A > B	■■■■□□ □ A' > B'
(4) A<B e A'<B'	■ □□ A< B	■■□□□ A'< B'

Fonte: Elaboração das autoras

[1] Essas tarefas foram propostas por Noelting (1980) para estudar o raciocínio proporcional.

[2] A situação descrita por Spinillo (2002) é uma tarefa de proporção utilizando retângulos com partes pintadas em azul.

[3] Dimensões complementares referem-se a quantidades (contínuas ou discretas) que são partes que, juntas, formam um mesmo todo; enquanto dimensões não complementares são quantidades que não constituem um mesmo todo, pois referem-se a unidades diferentes.

Segundo Spinillo (1993, 2002), comparações do tipo (1) e (2) – que envolvem relações de primeira ordem diferentes – são mais fáceis de serem estabelecidas que as (3) e (4). A autora conclui que há diferentes níveis de complexidade quanto ao estabelecimento de relações de segunda ordem, mesmo quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte e que os limites do referencial de "metade" são utilizados pelas crianças como estratégia para estabelecer julgamentos proporcionais.

Problemas de comparação parte-todo são mais comuns de serem encontrados no contexto do ensino de frações que do de proporções. Mesmo neste caso, as razões parte-todo aparecem mais em problemas de valor omisso em que a razão é explicitada (por exemplo, "numa turma de 40 alunos, sabe-se que de cada 4 crianças, 3 são meninos; determine o número de meninos") que em problemas de comparação.

Spinillo (1992, 1993), com base na teoria piagetiana sobre inclusão de classes, aponta que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações parte-todo. Questões nas quais era necessário decidir qual copo estava mais "cheio" de água (copos de dimensões distintas) eram resolvidas por crianças a partir de 11 anos utilizando o referencial "metade" e a autora conclui que isso favorecia o estabelecimento de relações de segunda ordem nestas tarefas de proporção com dimensões contínuas. O mesmo referencial foi utilizado na pesquisa de Jeong et al (2011) em tarefas exitosas de raciocínio proporcional no contexto de um jogo que envolvia noções de probabilidade (tiro ao alvo) com quantidades discretas; no entanto, os autores encontraram que muitos alunos fracassaram porque contavam o número de chances (tiros) ou o número de acertos no alvo, mas não estabeleciam relações de segunda ordem. Já Boyer e Huttenlocher (2008) concluíram que, apesar de resolverem problemas de comparação com quantidades contínuas a partir de 6 anos, crianças de 10 a 12 anos apresentavam muita dificuldade em resolver problemas de raciocínio proporcional envolvendo unidades discretas e que esta situação pode ser devida ao fato de não se articular o ensino de frações com o de razões.

Assim, a revisão bibliográfica indica que ainda há aspectos do raciocínio proporcional que merecem ser investigados; por exemplo, não se conhece se existe paralelo entre as estratégias para cada um dos dois tipos de problemas (de valor omisso e de comparação) empregadas por alunos dos anos finais do ensino fundamental, que ainda não receberam instrução formal acerca do tema.

Tomando a resolução de problemas como o ponto de partida da atividade matemática – conforme indicam os PCN (BRASIL, 1998) – e considerando que a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de situações variadas, concorda-se com Vergnaud

(1990) quando este afirma que os pesquisadores deveriam analisar uma variedade de esquemas e comportamentos para entender, a partir do ponto de vista cognitivo, a formação de um conceito. Assim, acredita-se que avançar na investigação sobre como as crianças aplicam estratégias próprias de resolução de problemas de proporção pode colaborar na definição de objetivos específicos para o currículo a partir do sexto ano.

Dessa forma, reconhecendo a importância do estabelecimento de relações no desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes, buscou-se conhecer os tipos de relação que são estabelecidas em problemas de valor omisso e em problemas de comparação envolvendo parte-parte e parte-todo com quantidades discretas – visto serem estas as que apresentam maior dificuldade, de acordo com a literatura – por alunos do sexto ano do ensino fundamental.

Método

Teve-se por objetivo analisar as estratégias utilizadas por estudantes do sexto ano na solução de problemas (a) de valor omisso e (b) de comparação, que requerem raciocínio proporcional.

Optou-se por analisar qualitativamente as respostas, os procedimentos e as justificativas apresentados por escrito para os dois tipos de problemas. Assim, o presente trabalho insere-se na chamada pesquisa em psicologia da educação matemática, pois visa à caracterização de um fenômeno por meio de um processo analítico de descrição qualitativa, conforme definição proposta por Moro (2015) acerca das investigações nesse campo científico.

Participaram da pesquisa 20 alunos de uma turma do sexto ano do ensino fundamental de uma escola particular de uma cidade mineira e a Prova de Conhecimentos foi aplicada individualmente pela professora e pesquisadora, em horário de aula, sendo atendidos os procedimentos éticos de pesquisa. Optou-se por esta série, considerada como uma amostra de conveniência, pois o assunto razões e proporções só é tratado formalmente na série seguinte.

A Prova de Conhecimentos, do tipo lápis e papel, continha quatro questões que avaliavam o raciocínio proporcional, sendo dois problemas de valor omisso e dois de comparação, ambos envolvendo variáveis discretas. Após cada problema de valor omisso, havia um espaço na folha para que colocassem a resposta e também como haviam pensado para resolver o problema. Nos problemas de comparação, deveriam escrever a resposta e a justificativa.

As respostas foram analisadas de modo a se vislumbrar as categorias apontadas na literatura: estratégias aditivas e multiplicativas, em especial aquelas que evidenciassem relações de covariação, além do referencial metade e das relações parte-parte e parte-todo.

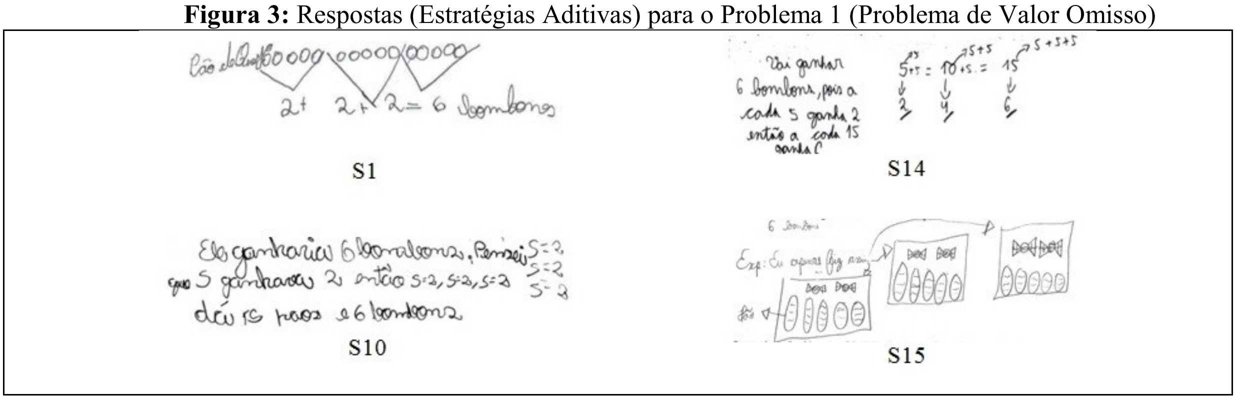
Resultados e análises

Serão apresentadas as estratégias identificadas para cada problema e, a seguir, a análise paralela para cada participante.

> **Problema 1:** O barzinho da escola está fazendo uma promoção: a cada 5 pães de queijo comprados eles dão 2 bombons de brinde. Se eu comprar 15 pães de queijo, quantos bombons eu vou ganhar? Explique como você pensou.

Foram identificados dois grupos de estratégias: aditivas e multiplicativas. As estratégias aditivas compreenderam representações pictóricas, que pareciam indicar contagem, e/ou indicativas de operações e de algoritmos de cálculos. A Figura 3 mostra algumas estratégias de participantes (chamados de S1, S2 etc.) para ilustrar essa categoria.

Figura 3: Respostas (Estratégias Aditivas) para o Problema 1 (Problema de Valor Omisso)

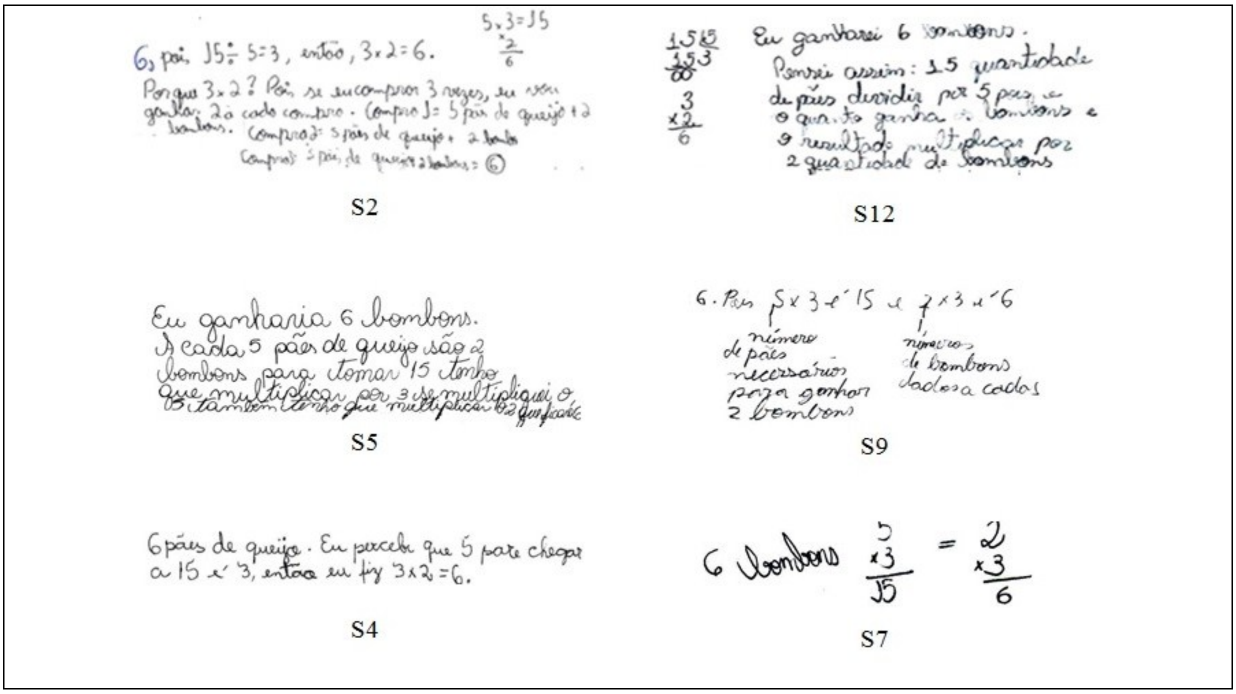


Fonte: Elaboração das autoras

Nota-se (Figura 3) que, apesar do pensamento aditivo demonstrado, S14 parece relacionar cada número da sequência obtida 2, 4, 6 ao número de vezes em que a parcela 5 é escrita, como se estabelecesse a relação de covariação, ou seja, modificasse os elementos de mesma grandeza utilizando o raciocínio escalar.

A maioria dos participantes utilizou estratégias multiplicativas, ou seja, realizou operações de multiplicação e divisão, conforme pode ser visto na Figura 4.

Figura 4: Respostas (Covariação) para o Problema 1 (Problema de Valor Omisso)



Fonte: Elaboração das autoras

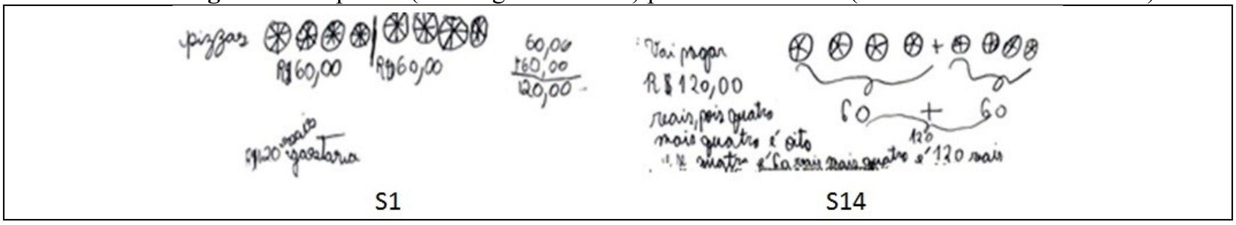
Notou-se que vários alunos dividiram 15 por 5, o que poderia ser interpretado como determinação da taxa unitária. Na verdade, a operação indica o estabelecimento de uma relação ternária entre os elementos dados 15 (número de pães a serem comprados) e 5 (número de pães ao qual se tem a referência para os bombons) e o elemento encontrado 3 (que é a relação encontrada entre os outros dois elementos). Esse número, sendo um escalar, é aplicado à outra grandeza (2 bombons) por meio da multiplicação 3x2 = 6. Na Figura 4, note-se que S12 teve dificuldade para explicar o que significaria o número 3 obtido; já S2 parece se apoiar em pensamento multiplicativo (quando se refere a "comprar 3 vezes"). Outros participantes encontraram a relação "triplo" sem apresentar a divisão – alguns usam a expressão "para chegar a" (S4). Aplicaram, então, a relação x3 em ambas as grandezas – utilizando o argumento "também tenho que multiplicar", demonstrando que haviam estabelecido a relação de covariação (S5).

Estratégias aditivas e multiplicativas também foram utilizadas para o Problema 2:

> **Problema 2:** Quatro pizzas (iguais) custam R$ 60,00. Quanto pagaria por 8 dessas pizzas? Explique como você pensou.

Apenas dois participantes se valeram de estratégias aditivas com representações pictóricas; como demonstram S1 e S14 (Figura 5).

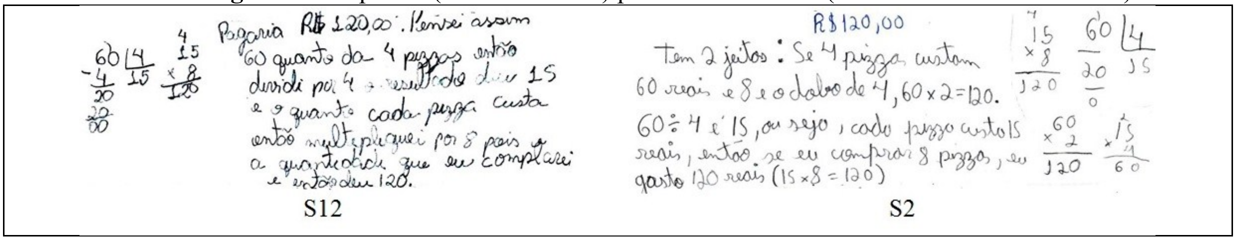
Figura 5: Respostas (Estratégias Aditivas) para o Problema 2 (Problema de Valor Omisso)



Fonte: Elaboração das autoras

Foi encontrado apenas um participante (S12) que calculou o preço de uma pizza, o que indica a estratégia de determinação da razão unitária, mostrada na Figura 6. Já S2 usa esta estratégia apenas como exemplificação de "jeitos" de resolver o problema – o que leva a crer que a opção pela estratégia da razão única pode não estar relacionada a níveis de desenvolvimento do raciocínio proporcional.

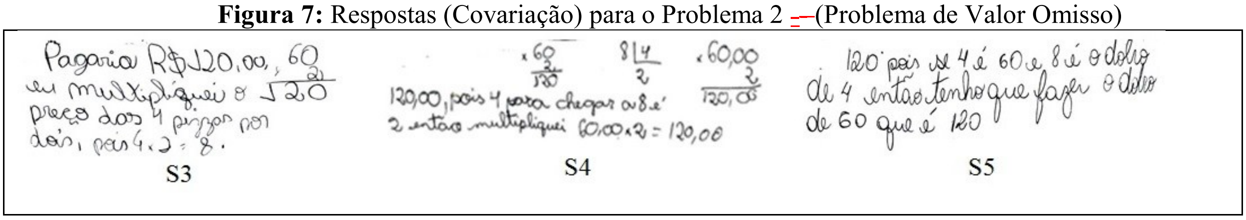
Figura 6: Respostas (Razão Unitária) para o Problema 2 (Problema de Valor Omisso)



Fonte: Elaboração das autoras

A relação de covariação pareceu ser mais bem explicitada na solução do Problema 2, quando vários alunos se valem das expressões lógicas "se é o dobro..."; "então tenho que fazer", "tem que pagar o dobro" etc., conforme pode ser visto na Figura 7.

Figura 7: Respostas (Covariação) para o Problema 2 (Problema de Valor Omisso)



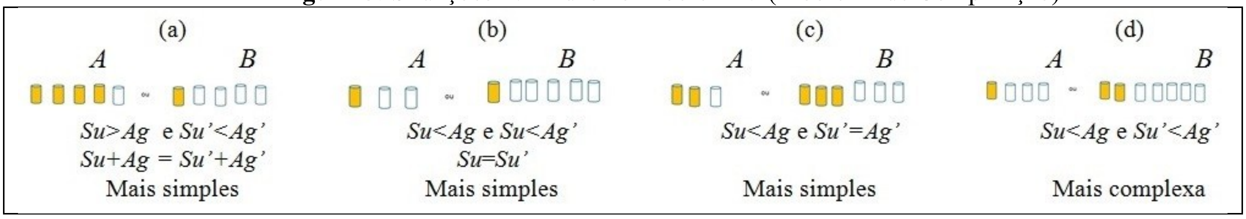
Fonte: Elaboração das autoras

Já os problemas de comparação requereram outros tipos de procedimentos, conforme é mostrado a seguir.

> **Problema 3:** Em cada situação temos água (copo branco) e suco concentrado (copo amarelo), já adoçado. Ao misturarmos os dois, indique qual suco (suco *A* ou suco *B*) ficará mais forte. Explique como você pensou.

Convém esclarecer que as situações (a) e (c) assemelham-se àquelas denominadas por (1) e (2) e constantes na Figura 2, conforme proposição feita por Spinillo (1993) e seriam, de acordo com a autora, mais simples. Na situação (a) *A* e *B* têm o mesmo número total de copos, sendo que *A* tem mais suco concentrado (*Su*) que água (*Ag*) e em *B* dá-se o contrário; em (c) *B* tem igualdade entre o número de copos de água e o de suco concentrado, o que ajudaria a concluir que *A* – em que não há igualdade – seria mais forte porque haveria menos água que suco concentrado. A situação (b) foi proposta porque leva a comparar a mesma quantidade de copos (1 copo) de suco concentrado em *A* e *B*, o que levaria à conclusão que, com menos água, *A* seria mais forte. As situações (a), (b) e (c) foram consideradas, por hipótese, como sendo mais simples; a situação (d), mais complexa, já requeria alguma estratégia para a comparação dos sucos *A* e *B*. A Figura 8 resume a explicação dada.

Figura 8: Situações avaliadas no Problema 3 (Problema de Comparação)



Fonte: Elaboração das autoras

A maioria dos alunos acertou as situações propostas (a), (b) e (c), apesar de não apresentarem justificativa que indicassem, de fato, as relações estabelecidas: estas respostas foram denominadas de “mal definidas”. Entre aqueles que apresentaram explicação mais consistente, alguns compararam os copos de água (ou os de suco concentrado) nas duas situações A e B, o que implica no estabelecimento da “relação parte-parte”; poucos se referiram ao total de copos, ou seja, estabeleceram relação “parte-todo”. Verificou-se também alternativa correta com explicação equivocada além de alternativa incorreta, conforme mostra a Figura 9.

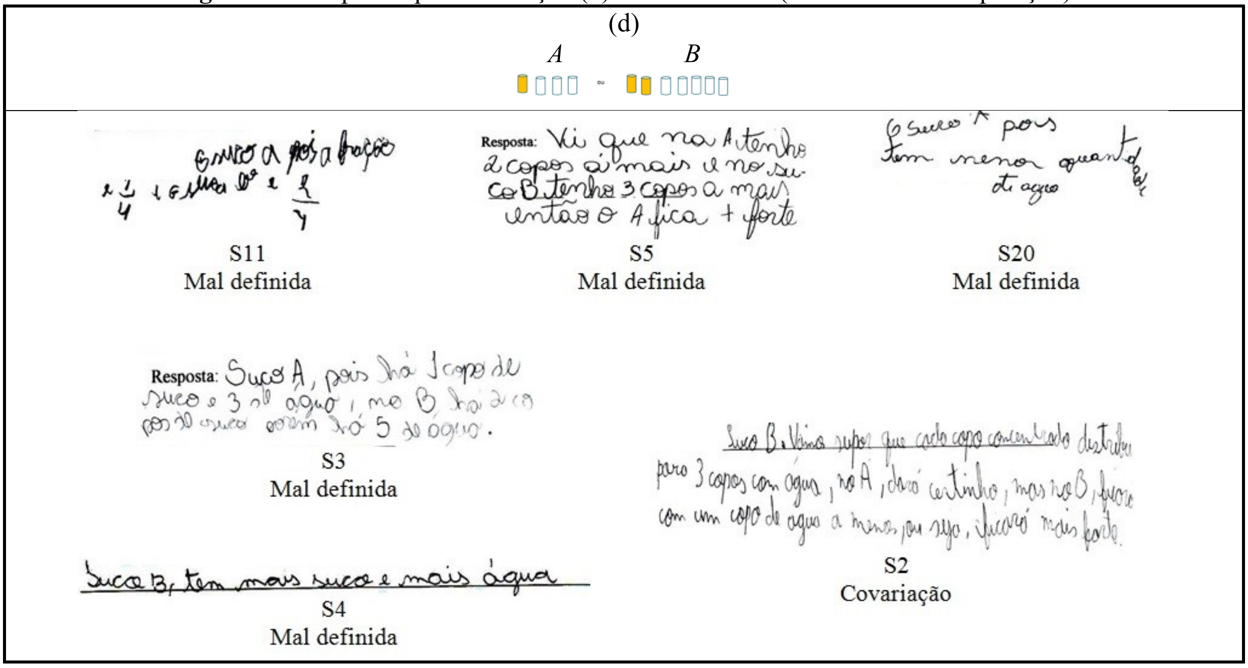
Figura 9: Respostas para as situações (a), (b) e (c) do Problema 3
(Problema de Comparação)

Fonte: Elaboração das autoras

Na Figura 9, S4(a) e S15(c) não estabelecem comparação entre *A* e *B*; o participante S2 apresenta maior clareza em S2(b) do que em S2(c). Aliás, para a situação (c), notou-se que nenhum participante refere-se à metade do total de copos em *B*, apesar de se valer da igualdade de copos como forma de realizar a comparação, conforme pode ser visto em S3(c) e S5(c). Aparentemente simples, alguns alunos se atrapalham na escolha do suco mais forte *A* nas situações analisadas, como em S15(c), que verifica a igualdade em *B*, mas não se convence que *A* seria mais forte; S11(c) até se vale da representação na forma de razões, o que caracterizaria a relação parte-todo, mas erra a alternativa porque não consegue estabelecer relação de ordem entre elas.

A situação (d) mereceu destaque especial, pois requer relações mais complexas, de acordo com o apontado na literatura. Independentemente de acertar ou errar a alternativa, verificou-se que os alunos não apresentaram explicações em que se evidenciaria raciocínio proporcional, conforme mostra a Figura 10.

Figura 10: Respostas para a situação (d) do Problema 3 (Problema de Comparação)



Fonte: Elaboração das autoras

Nota-se, na Figura 10, que S11 tenta utilizar fração para fazer a comparação; soluções erradas também podem ser vistas em S20 e S3 e S4, em que a justificativa apresentada não esclarece a escolha da alternativa. S5 parece tentar determinar uma relação invariante nos dois sucos, pois afirma que em *A* "tenho 2 copos a mais", talvez se referindo à razão 1 copo de suco para 1 de água e observando os copos de água supostamente restantes (restariam, pelo raciocínio do estudante, 2 de água em *A* e 3 de água em *B* – o que justificaria, equivocadamente, que *A* era mais forte). O único participante que pareceu demonstrar a relação de covariação – característica do raciocínio proporcional – foi S2: ele identifica a relação 1:3 em *A* (apesar de não representá-la desta forma) e utiliza o escalar 2 (dobrando) as quantidades de água e de suco para obter um suco equivalente; compara este com *B* e percebe que faltaria 1 copo.

O estabelecimento de relações que indicam o raciocínio proporcional foi investigado nas justificações apresentadas à quarta questão, também um problema de comparação:

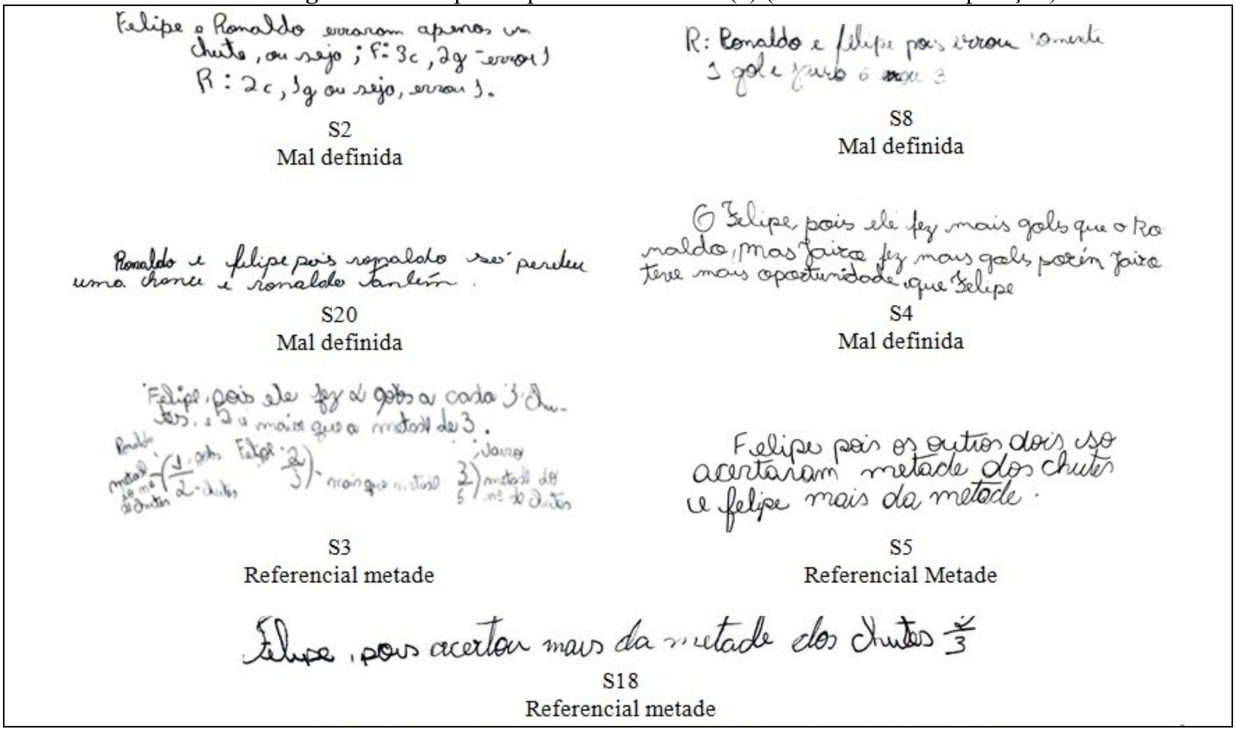
Problema 4: Quatro meninos, Ronaldo, Felipe, Eder e Jairo, estavam treinando chutes a gol. Veja o que aconteceu:

Ronaldo: de cada 2 chutes, fazia 1 gol.
Felipe: de cada 3 chutes, fazia 2 gols.
Jairo: de cada 6 chutes, fazia 3 gols.

Observando as informações abaixo, responda:
a) Qual menino se saiu melhor no treino, isto é, qual deles teve o melhor desempenho?
b) Houve desempenhos iguais? Explique como você pensou.

Algumas respostas para o problema são mostradas na Figura 11.

Figura 11: Respostas para o Problema 4 (a) (Problema de Comparação)

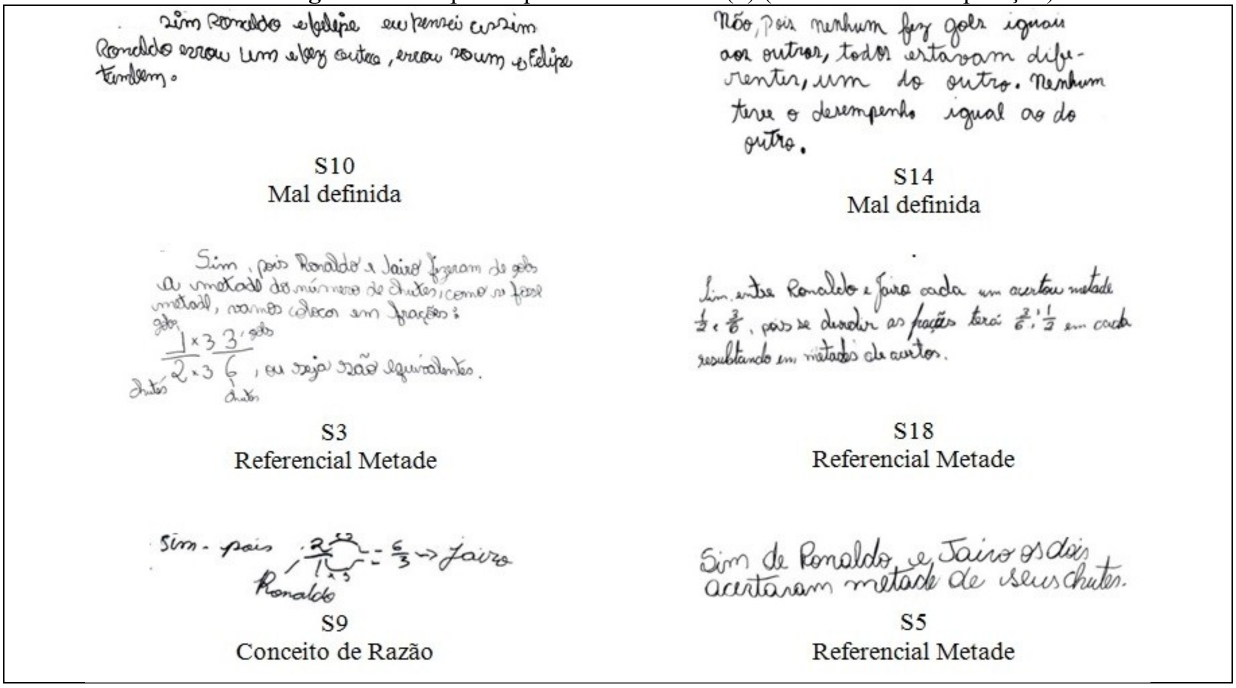


Fonte: Elaboração das autoras

Verificou-se que a maioria dos participantes demonstrou dificuldade em estabelecer as relações necessárias para realizar a comparação solicitada. Na Figura 11, nota-se que alguns participantes colocam foco no número de chutes errados (S2, S8, S20). S4 tenta estabelecer relação entre os chutes de Felipe e de Jairo, alegando que este teve "mais chances", mas não consegue justificativa consistente para sua resposta. Apenas três respostas estavam apoiadas no referencial metade (S3, S5 e S18), e nota-se que S3 escreve as frações para cada jogador.

As mesmas dificuldades verificadas para responder ao item (a) também foram identificadas no item (b) do Problema 4, em que se perguntava se teria havido desempenhos iguais. Algumas respostas são mostradas na Figura 12. A maioria dos participantes apresentou respostas parecidas com S10, ou seja, consideram equivalentes os desempenhos de Ronaldo e de Felipe, alegando que ambos erraram 1 gol. Já S14 considera que os desempenhos foram diferentes, apesar de não apresentar explicação para a resposta.

Figura 12: Respostas para o Problema 4 (b) (Problema de Comparação)

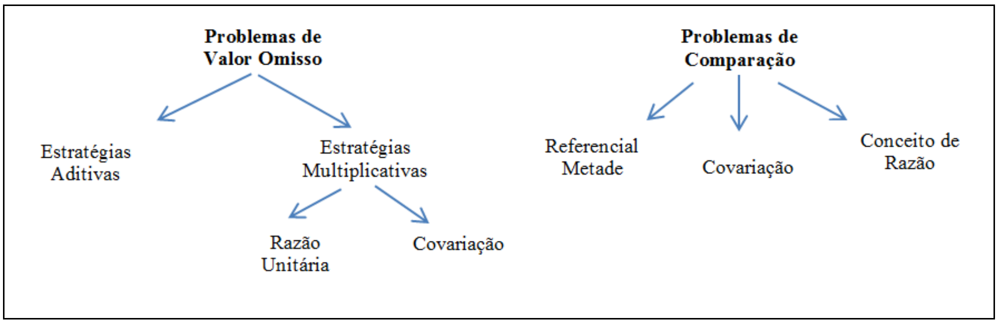


Fonte: Elaboração das autoras

Ainda na Figura 12 podem ser encontradas justificativas mais consistentes apoiadas no Referencial Metade (S3, S5e S18) e apenas um aluno (S9) faz uso correto do Conceito de Razão, estabelecendo a relação de equivalência entre as razões que comparam o número de chutes com o de gols.

No geral, as estratégias utilizadas pelos participantes, bem como as relações estabelecidas por eles na solução dos problemas foram resumidas na Figura 13.

Figura 13: Resumo das estratégias e relações identificadas na solução dos problemas



Fonte: Elaboração das autoras

O Quadro 1 apresenta o desempenho dos participantes nos problemas resolvidos. Tentou-se estabelecer uma organização, de modo que os sujeitos com melhor desempenho ficassem na parte superior do quadro.

Quadro 1: Desempenho geral dos participantes por problema resolvido

Part.	Problemas de Valor Omisso		Problemas de Comparação					
			Mais simples			Mais complexos		
	1	2	3a	3b	3c	3d	4a	4b
S3	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Parte-Parte		Ref. Metade	Ref. Metade
S5	Covariação	Covariação	Mal definida	Mal definida	Parte-Parte		Ref. Metade	Ref. Metade
S9	Covariação	Covariação	Mal definida	Mal definida	Mal definida		Covariação	Conceito de razão
S16	Covariação	Covariação			Mal definida	Mal definida	Mal definida	Ref. Metade
S18	Covariação		Parte-Todo	Parte-Todo	Parte-Todo		Ref. Metade	Ref. Metade
S14	Aditivas	Est.Aditivas	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida	
S6	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Mal definida	Mal definida	Mal definida	
S2	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Mal definida	Covariação		
S13	Aditivas	Covariação	Parte-Parte	Parte-Parte	Parte-Parte	Mal definida		
S10	Aditivas	Covariação	Mal definida	Mal definida	Mal definida	Mal definida		
S17	Covariação	Aditivas	Parte-Parte	Mal definida	Mal definida			
S1	Aditivas	Aditivas	Mal definida	Mal definida	Mal definida			
S20	Covariação	Covariação	Parte-Parte	Mal definida	Parte-Parte			
S4	Covariação	Covariação	Mal definida			Mal definida	Mal definida	
S8	Aditivas	Mal definida	Parte-Parte	Mal definida	Mal definida			
S12	Covariação	R.Unitária	Parte-Parte	Parte-Parte				
S15	Aditivas		Parte-Parte	Mal definida		Mal definida		
S7	Covariação	Covariação					Mal definida	
S11	Covariação	Covariação	Parte-Todo	Parte-Todo				
S19	Covariação	Covariação						

Fonte: Elaboração das autoras

No Quadro 1 estão destacadas em cinza escuro as questões que foram respondidas corretamente e que continham estratégias e relações identificáveis. Em cinza claro, aquelas que, apesar de a resposta ou a alternativa estar correta, as justificativas não estavam suficientemente definidas, não mostrando clareza acerca das relações estabelecidas. Em branco estão as respostas erradas.

Algumas observações finais podem ser feitas: (a) praticamente todos os alunos acertaram os problemas de valor omisso, sendo que a grande maioria valeu-se da relação de covariação entre as grandezas envolvidas; (b) os problemas de comparação mais simples foram respondidos acertadamente pela maioria dos participantes que estabeleceram relações parte-parte, apesar de muitos não conseguirem justificar suas respostas; (c) mais da metade errou a comparação requerida no problema 3(c) e apenas um aluno estabeleceu a relação de covariação; (d) apenas cinco alunos acertaram os dois itens do último problema de comparação: entre eles, quatro utilizaram o referencial metade e um aluno valeu-se do conceito de razão e da relação de covariação.

Discussão

A presente pesquisa mostrou que os problemas de valor omisso não apresentaram grandes dificuldades para os participantes. O fato de a maioria ter utilizado estratégias multiplicativas que demonstravam o estabelecimento da relação de covariação parecia indicar certo desenvolvimento do raciocínio proporcional, já que, conforme apontam Costa e Ponte (2008), este está associado à capacidade de analisar conscientemente as relações entre quantidades; esta capacidade é evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais – o que pareceu bastante evidente nas justificativas apresentadas para os problemas de valor omisso. Apesar de, evidentemente, não apresentar a palavra covariação, os argumentos "tem que multiplicar" ou "também dobrei" pareciam indicar inferência e predição e implicar na compreensão de que as grandezas envolvidas nos problemas variavam em conjunto (LESH et al, 1988).

No entanto, os erros e as justificativas mal formuladas oriundas dos problemas de comparação levam a uma análise mais cuidadosa.

Apesar da dificuldade em explicar as relações, a maioria dos participantes acertou as questões mais simples de comparação, estabelecendo relações parte-parte. Conforme estudo de Spinillo (1992, 1993), realizado com quantidades contínuas – e adequado para os valores discretos neste trabalho –, este tipo de tarefa contém quatro valores e requer dos alunos o estabelecimento de uma relação de segunda ordem entre as relações de primeira ordem estabelecida entre os pares. Aquela relação foi facilitada nos itens (a), (b) e (c) do Problema 3, pois havia elementos notáveis, conforme resumido na Figura 8.

Já no item (d) do mesmo problema as dificuldades foram bem maiores, o que corrobora os resultados obtidos por Boyer e Huttenlocher (2008). Os participantes – com exceção de S2 – não se valeram quer da ideia de covariação, quer do referencial metade, o que teria facilitado o estabelecimento da relação de segunda ordem, conforme encontrado por Spinillo (1992, 1993).

As justificativas dadas ao Problema 4 foram muito semelhantes àquelas encontradas no estudo de Jeong et al (2011) nas tarefas que requeriam o estabelecimento de relações parte-todo; ao tentar responder qual jogador havia tido melhor desempenho – ou se havia desempenhos iguais – os participantes comparavam ou o número de acertos ou o de erros, e não o total. Evidências de raciocínio proporcional foram verificadas nas respostas dos alunos que utilizaram o Referencial Metade e, em especial, na do sujeito que utilizou o conceito de razão, talvez por ter aprendido fração com esta ideia.

Algumas conclusões

A questão anunciada neste trabalho – e elaborada a partir da revisão da literatura sobre as relações estabelecidas no desenvolvimento do raciocínio proporcional – referia-se ao suposto paralelo existente entre as estratégias, para os dois tipos de problemas (de valor omisso e de comparação), empregadas por alunos dos anos finais do ensino fundamental, que ainda não haviam recebido instrução formal acerca do tema.

Mesmo considerando os limites deste estudo, os resultados mostraram que, de um modo geral – e nas condições em que se deu a pesquisa –, não parecia existir paralelo entre as relações estabelecidas pelos participantes para resolver Problemas de Valor Omisso e Problemas de Comparação. Mais especificamente, se a relação de covariação foi utilizada por quase todos os alunos para resolver o primeiro tipo de problema, a mesma não foi estabelecida para a solução do segundo.

Uma conclusão que pode ser esboçada a partir desse resultado é que, assim como encontrado por Costa e Ponte (2008), responder corretamente a problemas de valor omisso não significa que o aluno seja capaz de realizar raciocínios proporcionais em outras situações e que as estratégias utilizadas pelos alunos não parecem ser hierarquizadas a ponto de revelar ou não este tipo de raciocínio. Concorda-se com os autores que a opção de utilizar uma estratégia à outra parece depender da experiência do aluno com aquele tipo de problema, "da interpretação que ele faz do mesmo, do seu conhecimento sobre os números e das relações que consegue estabelecer de imediato" (p.68). No caso específico deste trabalho, o fato de utilizar a relação de covariação nos problemas de valor omisso pode não revelar o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

Assim, concorda-se com Magina e Campos (2004) que, com base na Teoria dos Campos Conceituais, indicam ser importante conhecer que classes de problemas os alunos entendem melhor e quais procedimentos são mais naturalmente utilizados por eles para que se possa promover, gradativamente, "novas classes de problemas que requeiram raciocínios mais sofisticados desses alunos e assim expandir o campo conceitual envolvido" (p.59).

No contexto deste trabalho, os problemas de comparação mostraram-se mais complexos do que os de valor omisso. Um dos motivos pode ser a pouca experiência dos alunos com questões que solicitam apenas uma comparação e não um valor exato como resposta. Outra suposição para a dificuldade verificada, em especial no último problema, pode ser decorrente do fato de os alunos terem certa dificuldade em estabelecer relações parte-todo.

Assim, como implicação deste estudo, sugere-se que, entre as ideias da fração – conceito que geralmente é introduzido nos anos iniciais do ensino fundamental – seja desenvolvida também a noção de razão entre duas grandezas discretas e complementares, envolvendo relações parte-parte e parte-todo. Em vez de aplicar, de forma mecanizada, técnicas de redução de frações a mesmo denominador, os alunos podem ser desafiados a solucionar problemas que requeiram a comparação de razões e, assim, descobrir relações de equivalência que podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio proporcional e também o probabilístico.

Esta seria uma das maneiras de promover situações diversificadas de modo a levar o aluno a atribuir significado aos conceitos de razão e proporção antes das representações simbólicas e das propriedades formais a serem estudadas a partir do sétimo ano do ensino fundamental.

Referências

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NY: Macmillan Publishing, p. 296-333, 1992. Disponível em < http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_1.html >. Acesso em: 17 fev.2016.

BOYER, T. W.; LEVINE, S. L. HUTTENLOCHER, J. Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. **Developmental Psychology,** V. 44, No. 5, 1478–1490, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

COSTA, S.; PONTE, J. P. O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico. **Revista da Educação**, V. XVI, nº 2, p.65-100, 2008.

CRAMER, K.; POST, T. Making connections: A Case for Proportionality. **Arithmetic Teacher**, 60(6), 342-346, 1993. Disponível em:< http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_3.html> Acesso em: 22 fev. 2016.

JEONG, Y.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. **Journal of Cognition and Development**, 8:2, 237-256, 2007.

LAMON, S. Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, 24, 41-61, 1993.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2ª ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum, 2005. Disponível em: < http://samples.sainsburysebooks.co.uk/9781136631863_sample_535985.pdf. > Acesso em: 22 fev. 2016.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 93-118. Disponível em:< http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_8.html> Acesso em: 22 fev. 2016

MAGINA, S.; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educ. Mat. Pesqui.,** São Paulo, v. 6, n. 1, pp. 53-71, 2004.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. Educ**., v. 20, n. 2, p. 517-533. Bauru, 2014.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, nº. Especial 1, p. 141-156, UFPR. Curitiba, 2011.

MORO, M. L. Metodologia da Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática: O quê? Por quê? Como? **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 8, número temático, 2015.

MORTON, C, H. An investigation into sixth grade students' understanding of ratio and proportion. **International Journal for Research in Mathematics Education,** V. 4, N.1, p.68-80, 2014.

NOELTING, G. The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept Part II: Problem-Structure at Successive Stages; Problem-Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring**. Educational Studies in Mathematics,** V. 11, N. 3, p. 331-363, 1980.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C.; PAPAGEORGIOU, E. (2003). Students' ability in solving proportional problems. Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education, Bellaria: Italy, 3, 2003. **Anais...** 2003. Disponível em: < http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings > Acesso em: 22 fev. 2016.

PONTE, J. P.; MARQUES, S. Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. International Journal for Research in Mathematics Education. **International Journal for Research in Mathematics Education**, V. 1, N.1, p.36-53, 2011.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Resolução de Problemas de Valor Omisso: Análise das Estratégias dos Alunos. Encontro de Investigação em Educação Matemática, 19, Vila Real, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. **Anais...,** Vila Real, POR, 2009.

SPINILLO, A.F. A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 8, N° 3, p.305-331, 1992.

SPINILLO, A.G. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 9, N° 2, p. 349-364, 1993.

SPINILLO, A.G. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Vol. 15, Nº 3, p. 475-487, 2002.

TORRE, J.; TJOE, H.; RHOADS, K.; LAM, D. Conceptual and Theoretical Issues in Proportional Resoning. **International Journal for Studies in Mathematics Education.** V.6 (1), p. 21-38, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Tradução: Juan D. Godino. V. 10, n. 23, p. 133-170. Grenoble, 1990.

______. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica: Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.