Solución de modelos matemáticos, utilizando el software Derive 6.1 en aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

*Jhon Franklin Espinosa Castro**

RESUMEN

Con el avance de la ciencia a través de la tecnología, se utilizan modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el fenómeno. Por tal motivo, se realizó el presente documento en el cual se explican diversas aplicaciones en diferentes áreas por medio del software Derive. Existen dos grupos; en el primero se encuentran: temperatura de un objeto al salir de un horno, crecimiento de una colonia bacteriana, carga e intensidad de corriente de un circuito RC, concentración de sal en un tanque con salmuera; y en el segundo están: el ácido valproic en el cuerpo, contaminación del lago Michigan y un fósil dotado con carbono 14.

Palabras clave: Software, modelo, ecuación diferencial, derive.

* Director del semillero de investigación matemática, Universidad Francisco de Paula Santander. UFPS. Dirección electrónica: jhon_franklin_espinosa@hotmail.com.

INTRODUCCIÓN

A medida que el mundo va evolucionando la ciencia también lo hace de manera rápida y progresiva, utilizando tecnologías que van facilitando la comprensión de cada una de las incógnitas que se presentan en los diferentes campos de acción, en especial en la matemática. Con base en lo anterior, en este escrito, se utilizó el software matemático Derive 6.1 como manipulador algebraico para realizar cálculos numéricos, optimizando tiempo en el proceso analítico y gráfico, como herramienta tecnológica en la solución de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden, en contextos especificados.

MATERIALES Y MÉTODOS

Con la finalidad de optimizar tiempo y procesos, se empleó como herramienta computacional el software matemático Derive 6.1 [5]. E igualmente se utilizaron dos tipos de metodología: aplicativa y explicativa; la primera, enfocada en el empleo del programa como un mecanismo tecnológico, y la segunda, que especifica la sintaxis de la función p (x), q (y), respectivamente, la asignación de las variables y las condiciones iniciales dadas, que se deben utilizar en la solución de los modelos matemáticos que definen la aplicación. Los ejercicios propuestos fueron extraídos de los siguientes libros: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado [1], Ecuaciones diferenciales [2] y Cálculo aplicado [3].

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se establecen los enunciados de las aplicaciones analizadas, teniendo en cuenta la siguiente sintaxis generalizada que se debe digitar en el programa para cada ejercicio. Es decir, separable (p, q, x, y, x_0, y_0) que proporciona la solución del problema de valor inicial, donde se asume y’ = p (x) * q (y) para y (x_0) = y_0 [4]. Además, para cada aplicación las variables dependientes e independiente se referencia por x e y.

a. Al sacar un pastel de un horno, su temperatura es de 300°F, en un tiempo t = 0. A una temperatura ambiente de 70°F. Luego de tres minutos, su temperatura es de 200°F. Hallar, a. La ecuación que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t, y b. La respectiva tabla y gráfica. Modelo: dT/dt = k (T - 70); Asignación de variables: x = t = 0; y = T = 300.

$$\#1:\ SEPARABLE\left(1, yk-70k, x, y, 0, 300\right)$$

$$\#2: SOLVE(SEPARABLE\left(1, yk-70k, x, y, 0, 300\right), y, Real)$$

$\#3: y=230e^{kx}+70$. Utilizando la condición, x = 3, y = 200.

$\#4: 200=230e^{3k}+70$

$\#5: SOLVE\ (200=230e^{3k}+70),k,Real)$

#6: k = - 0.1901816194. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t es: $\#7: y=230e^{-0,190181x}+70$

b. Se realizara un respectivo análisis de una colonia de bacterias, que crecen en cultivo a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 300 colonias de bacterias en el cultivo y en un tiempo de 2 horas el número ha crecido un 20%. Hallar, a. ¿La ecuación que determina la población en cualquier instante de tiempo t? y b. ¿La respectiva tabla y gráfica? Modelo:

dP/dt = kP; Asignación de variables: x = t = 0; y = p = 300.

#1: $SEPARABLE(1,yk,x,y,0,300)$

$\#2: SOLVE(SEPARABLE(1,yk,x,y,0,300),y,Real)$

$\#3: y=300e^{kx}$. Utilizando la condición, x = 2, y = 360.

$\#4: 360=300e^{2k}$

$\#5: SOLVE(360=300e^{2k}),k,Real)$

#6: k = 0.09116077839. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la población en cualquier instante de tiempo t es:

$\#7: y=360e^{0.09116077839x}$

c. Se aplica una fuerza electromotriz de 100V en circuito en serie RC, donde el valor de la resistencia es 200Ω y una capacitancia de 0,0001F. Hallar, la función $q(t)$, $i(t)$ que establece carga y la intensidad de la corriente para $q(0)=0$. Modelo: dq/dt = 0.5 - 50q; Asignación de variables: x = t = 0: y = q = 0.

#1: SEPARABLE (1, 0.5 - 50y, x, y, 0, 0)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, 0.5 - 50y, x, y, 0, 0), y, Real). Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial que determina la carga en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = \frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$. Ahora, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la intensidad de la corriente en cualquier instante de tiempo t. Se debe realizar la derivada de la función de la carga.

#4: $\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$

#5: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}\right)$

#6: $\frac{e^{-50x}}{2}$ Luego, y = y'

#7: $y = \frac{e^{-50x}}{2}$

d. Un tanque mezclador contiene 300 galones de salmuera (sal disuelta en agua). Otra solución se bombea al tanque a razón de 3 galones por minuto, la concentración de sal en este efluente es de 2 libras por galón. La solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si a $A(t)$, denota la cantidad de sal medida en libras en el tanque en un tiempo, encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante de tiempo t, si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales. Modelo: dA/dt = 6 - A/100; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = 50.

#1: SEPARABLE $\left(1,6-\frac{y}{100},x,y,0,50\right)$

#2: SOLVE $\left(SEPARABLE\left(1,6-\frac{y}{100},x,y,0,50\right),y,Real\right)$. Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = 600 - 550e^{-0.01x}$

e. El ácido valproic es un medicamento que se emplea para controlar la epilepsia; su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas. Hallar ¿A qué hora quedará 10% de la dosis original?

Modelo: dQ/dt = - KQ; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial del medicamento.

#1: SEPARABLE (1, - yk, x, y, 0, q)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, - yk, x, y, 0, q), y, Real)

#3: y = qe^{-kx}. Como la vida media es de 15 horas, sabemos que la cantidad restante Q = 0.5q cuando t = 15 horas.

#4: 0.5q = qe^{-15k}

#5: SOLVE (0.5q = qe^{-15k}, k, Real)

#6: k = 0.04620981203. Remplazando en #3

#7: y = $qe^{-0.04620981203x}$. Utilizando la condición, y = 0.10q. Es decir, 10% de la dosis original.

#8: 0.1q = $qe^{-0.04620981203x}$

#9: SOLVE (0.1q = $qe^{-0.04620981203x}$, x, Real)

#10: x = 49.82892142. Aproximadamente, en un tiempo de 50 horas.

f. ¿Cuánto tiempo tardara para que el 90% de la contaminación sea eliminada del lago Michigan? Suponiendo que no se viertan más contaminantes. Modelo: dQ/dt = - rQ/v; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial de contaminación

r/v = 0.03224489796

#1: SEPARABLE $\left(1, -\frac{ry}{v}, x, y, 0, q\right)$

#2: SOLVE $\left(SEPARABLE\left(1, -\frac{ry}{v}, x, y, 0, q\right), y, real\right)$

#3: $y = qe^{-\frac{r.x}{v}}$. Remplazando el valor de r/v = 0.0322 en #3

#4: $y = qe^{-0.0322x}$.Cuando el 90% de la contaminación se haya eliminado del lago, resta un 10% de contaminación. Es decir, y = 0.1q.

#5: $0.1q = qe^{-0.0322x}$

#6: SOLVE $(0.1q = qe^{-0.0322x}, x, real)$

#7: x = 71.50885381. Solución: aproximadamente: 72 años

g. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C - 14. Determine la edad del fósil. Modelo: dA/dt = kA; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = a. Donde a representa la cantidad inicial de C^{14}.

#1: SEPARABLE (1, yk, x, y, 0, a)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, yk, x, y, 0, a), y, Real)

#3: $y = ae^{kx}$. Para calcular el valor de la constante de decaimiento, se debe tener en cuenta la siguiente condición, de que 0.5a = A (5600). Porque, la vida media es el valor que corresponde en tiempo t, A (t) = 0.5 a, para una cantidad inicial.

#4: $0.5a = ae^{5600k}$

#5: SOLVE ($0.5a = ae^{5600k}$, k, Real)

#6: k = - 0.0001237762822. Remplazando en #3

#7: $y = ae^{-0{,}000123x}$. Utilizando la condición, y = 0,001a que representa la milésima parte de la cantidad original de C – 14.

#8: $0.001a = ae^{-0{,}000123x}$

#9: SOLVE ($0.001a = ae^{-0{,}000123x}$, x, Real)

#10: x = 56160,61201. Aproximadamente, 56000 años

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes del semillero de investigación Matematic y directora del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Francisco de Paula Santander.

CONCLUSIONES

El aprendizaje que proporciona la utilización de esta herramienta en los estudiantes universitarios es innovador, debido a que se puede determinar si su proceso analítico es correcto o no, y visual, por la sintaxis y las modificaciones que se pueden hacer en él. Por lo tanto, la incorporación de nuevas tecnologías en la matemática (ecuaciones diferenciales) enriquece los ambientes de aprendizaje de los alumnos, la transformación de las prácticas educativas, las estructuras curriculares y la capacidad para investigar, crear y adaptarse a nuevos requerimientos, como también el desarrollo de habilidades en el avance técnico, tecnológico y científico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] G. ZILL, Dennis. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 7 ª edición. Internacional Thomson Learning. México, DF. 2002. p. 22, 98, 99 – 101, 106.

[2] COSTA, Bronson. Ecuaciones diferenciales. 3ª edición. McGraw-Hill Interamericana. México, DF. 2008. p. 68.

[3] H. HALLETT, Deborah. M. GLEASON, Andrew. Cálculo aplicado. 1ª edición. Compañía editorial continental. México, DF. 1999. p. 464 – 467.

[4] SÁNCHEZ RUIZ, Luis M. LEGUA FERNÁNDEZ, Matilde P., MORAÑO, José Antonio. Matemáticas con Derive. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de matemáticas aplicada. 1ª edición. Pdf. p. 225 – 226, 233 – 234.

[5] Derive. Disponible en http: //es.wikipedia.org/wiki/Derive. Consulta 01/09/2011