http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11nespp204

Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador

A study about mathematical demonstration by/with computer

Rosemeire de Fatima Batistela
rosebatistela@hotmail.com

Taís Alves Moreira Barbariz
taisbarbariz@gmail.com

Henrique Lazari
hlazzari@uol.com.br

Resumo

O tema *demonstrações matemáticas por/com computador* surge do interesse em conhecermos o que um computador fomenta no trabalho do matemático. Isso nos levou à pergunta geradora desse estudo: *como o computador pode ser utilizado pelos matemáticos na atividade de demonstrar?* A partir daí, empenhou-se em conhecer acerca do significado de demonstração, do que é um computador e como ambas se interceptam na produção do matemático. Nesta busca compreendemos que o computador é aliado do matemático e muitas vezes em tarefas que não são diretamente demonstrar, quais sejam, em decomposição de problemas em casos específicos, verificação e teste de conjecturas, cálculos numéricos, simulações, processos de iteração, imagens gráficas, abordagens experimentais, entre outras. Além disso, compreendemos que o computador junto ao matemático no processo demonstrativo pode promover uma dinâmica de iniciar e reiniciar, no jogo de conjecturar e avançar. Desse modo, ele tem possibilitado a compreensão e a formulação de novos problemas e conjecturas, principalmente em casos com grande quantidade de cálculo. No entanto, mesmo realizando algumas tarefas, o computador nunca exime a presença criativa e a intuição do matemático no processo de demonstração.

Palavras-chave: Educação Matemática; Demonstração; Computador; Matemática.

Abstract

The subject mathematical demonstrations by/with computer arise of interest in knowing what a computer fosters the mathematical work. This led us to generating question of this study: how the computer can be used by mathematicians in the activity of demonstrate? Since then we has endeavored to know about the demonstration meaning of what a computer is and how these two pathways intersect in mathematical production. In this research we understand that the computer is allied with the mathematician and often in jobs that are not directly demonstrate, namely, decomposing problems in specific cases, verification and test conjectures, numerical calculations, simulations, iteration processes, graphics, experimentals approaches, among others. Furthermore, we understand that the computer next to the mathematical statement process can promote a dynamic start and restart, the game guess and move on. Thus, it has enabled the understanding and the formulation of new problems and conjectures, especially in cases with large amount of calculation. However, even performing some tasks, the computer never absolve the creative and intuitive presence of the mathematical demonstration process.

Keywords: Mathematical Education; Demonstration; Computer; Mathematics.

Apresentação

Desde a Grécia antiga que é comum falar em demonstração quando se fala em Matemática. Demonstração tem relação direta com verdade nesta ciência. A busca pela verdade é a essência da atividade científica, e a busca da verdade matemática é a tarefa primordial do matemático, já que esse profissional assume essa tarefa como essencial em seu trabalho. Estabelecer uma verdade matemática, nesse contexto, significa proferir afirmação *verdadeira* para uma proposição no âmbito de alguma teoria. Tal afirmação é exposta na forma de demonstração, a qual se elabora por meio de investigação e por meio do método axiomático dedutivo. Entendemos a Matemática como uma ciência que opera produzindo decisões que versam sobre a verdade de suas proposições no âmbito de uma teoria específica.

Irineu Bicudo pontua que "o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: definir seus conceitos e demonstrar as propriedades desses conceitos", e complementa que o ato de demonstrar uma proposição "... (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas" (BICUDO, 2002, p. 66). Assim, uma demonstração em Matemática pode ser entendida então como um encadeamento lógico de verdades explícitas e aceitas que se sustentam no encadeamento sucessivo, desde a primeira afirmação até a última.

Colocamos em questão a viabilidade de uma demonstração por computador, e, a partir disso, perguntamos: como o computador pode ser utilizado pelos matemáticos, hoje, na atividade de demonstrar? A nossa interrogação refere-se à compreensão do modo pelo qual as demonstrações matemáticas podem ser realizadas atualmente no mundo-vida[1] em que as tecnologias estão presentes, focando no computador.

Foi feita uma investigação bibliográfica e será explicitado o estudo realizado visando articular compreensões sobre demonstrações matemáticas e sobre os modos pelos quais o computador pode ser utilizado na Matemática na tarefa de demonstrar. Ambientamos o trabalho de um matemático profissional, expondo que a criatividade e a intuição estão presentes em sua criação cotidiana. Também, apresentamos a possível presença que um computador pode ter nessa criação, realizando algumas tarefas, mas, nunca eximindo a presença criativa e intuitiva do matemático. Ainda, argumentamos que o computador abre novas formas de fazer Matemática. Finalmente, exibimos a dinâmica do iniciar e do reiniciar,

[1]Segundo Bicudo (2010), "Mundo-vida, traduzido da palavra alemã *Lebenswelt*, ou mundo da vida, como a maioria dos autores de língua latina traduzem o termo, é entendido como a espacialidade (modos de ser no espaço) e a temporalidade (modos de ser no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividade e reconhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida em que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um de nós e a comunidade em que estamos inseridos" (BICUDO, 2010, p. 23).

no jogo de conjecturar e avançar, junto ao processo demonstrativo, que o computador pode fomentar no trabalho do matemático.

Demonstração em Matemática

As demonstrações matemáticas, construídas a partir de deduções lógicas, são responsáveis pelo alicerce da Matemática. O verdadeiro e o falso se distinguem por ligações primárias entre proposições. Esse processo de dedução tem como pontos de partida as afirmações aceitas como verdadeiras sem demonstração, os axiomas. As teorias matemáticas, coleções de teoremas imantados pelos axiomas, permanecem para sempre. Novas teorias que venham a surgir são suportadas por essa estrutura que é o seu alicerce, e, consequentemente, parte do alicerce da Matemática. Este aspecto torna a Matemática diferente da Biologia ou da Física, por exemplo, pois nessas ciências, novas teorias surgem e muitas vezes derrubam as anteriores, embasadas em evidências empiricamente observadas.

Entende-se por proposição toda sentença declarativa que satisfaz: i) é verdadeira ou falsa; e ii) não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa. A origem desse modo de compreender está em Aristóteles (384-322 a.C.), em particular na obra *Organon*[2]. Contudo, é quando o simbolismo algébrico de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), do século XVII, é estendido à Lógica de Aristóteles, em *As leis do pensamento*[3] de George Boole (1815-1864) que, segundo Lima (2010, p. 65), "a lógica da filosofia passa a ser a lógica da matemática, nesse momento em que se pronunciou "seja p uma proposição" não importando sua semântica, mas sua sintaxe".

A Matemática é uma região de inquérito onde há problemas resolvidos e problemas não resolvidos. Os resolvidos são verdades matemáticas: os teoremas das teorias matemáticas. Os demais demandam solução. Alguns, porém, demandam também uma extensão da teoria na qual possam ser resolvidos. Resolvidos, neste caso, significa: provados como verdadeiros ou falsos nessa teoria. Ainda, além dos problemas resolvidos (teoremas) e dos problemas não resolvidos (conjecturas), há também as proposições as quais Kurt Gödel (1906 – 1978) provou em seu teorema da incompletude, que não podem e não poderão ser demonstradas por meio do método axiomático e do sistema formal.

O resultado da incompletude de Gödel de 1931, Gödel (1977), força uma modificação da concepção de Matemática que perdurava desde 1900 defendida por David Hilbert (1862-

---

[2] ARISTÓTELES. **Órganon.** Traduzido por José Veríssimo Teixeira da Mata. São Paulo: editora UNESP, 2013.
[3] BOOLE, George. **An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.** London: Macmillan, 1854.

1943), de que toda e qualquer sentença formalizada teria uma prova. O teorema da incompletude conclui que a Matemática conviveria com a certeira presença de proposições indecidíveis em toda teoria que contenha os axiomas da Aritmética de Peano em sua formalização. No entanto, a compreensão dos matemáticos a respeito desse resultado, pode ser resumida na compreensão de Bourbaki (1950), de que a Matemática continuaria sendo produzida da mesma forma, porém conscientes da característica da incompletude dessas teorias que perfazem grande parte da Matemática.

O computador e a Matemática

O computador pode servir ao matemático na verificação de passagens em demonstrações matemáticas. Ele é capaz de oferecer ferramentas de cálculos, resoluções, simulações, explorações e esboços, por exemplo. Ele, o computador, é importante para o trabalho do matemático se tomado como ferramenta que pode ser utilizada nesse processo de demonstração, no entanto, para ser utilizado precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração.

Voltemo-nos para a afirmação que de que o computador 'pode servir' num processo de demonstração, e expliquemos: o computador, dada sua funcionalidade é uma máquina que permite ao matemático, frente a um problema, testar suas hipóteses iniciais obtendo resultados lógicos/numéricos que constituem novas evidências. Esses resultados podem satisfazer ou não o objetivo do matemático. No caso de satisfazerem, a tarefa demonstrativa avança. Em caso negativo, a partir dos resultados obtidos, o matemático reelabora suas conjecturas e a dinâmica de criação e verificação de hipóteses se reinicia na procura de vias de demonstração. Assim, computador e matemático, juntos, constituem um sistema que produz resultados que seriam inviáveis de se obter se não houvesse essa parceria.

Entre 1642 e 1645 Blaise Pascal (1623 - 1662) trouxe ao conhecimento da sociedade uma invenção, a qual chamou de "Pascaline". Idealizada e construída com objetivo definido de operar adições e subtrações com maior rapidez. Contudo, essa calculadora, cujo fundamento foram conhecimentos da Mecânica[4], não oferecia resultados além dos planejados e solicitados por seu operador.

[4] Mecânica, de acordo com o "Dicionário do Aurélio" online, pode, no nosso contexto de estudo, ser definida como a "combinação de órgãos próprios para produzir ou para transmitir movimentos" ou, ainda, como o "estudo das máquinas, da sua construção e funcionamento". Esta definição nos esclarece sobre a influência direta da utilização de cálculos matemáticos para a construção de uma máquina de calcular. Pascal, Babbage e Turing, portanto, se valeram da Matemática para idealizar e concretizar seus inventos.

É amplamente divulgado em livros que historiam sobre tecnologia da informação, que Charles Babbage (1791 - 1871)[5], por volta de 1832, propôs uma máquina computacional digital para a produção de tabelas numéricas, que se destinavam às atividades de matemáticos e astrônomos. Suas realizações foram a "Máquina Analítica" e a "Máquina Diferencial". Essa última apresentava unidades de memória e processamento, e funcionava a partir de um programa, tal qual os computadores atuais, embora o meio de incluir dados e comandos nas máquinas fossem os cartões perfurados.

Alan Turing (1912 - 1954), por sua vez, idealizou uma máquina, também fundamentada na Mecânica, capaz de efetuar cálculos, assim como as anteriormente citadas. Turing (1936) descreve, em seu artigo de 1936 "Sobre Números computáveis, com uma aplicação ao problema da decisão", sua teoria para a construção de uma máquina de estado finito, apta a computar tudo que fosse computável[6], posteriomente chamada de "Máquina de Turing".

De maneira bastante geral, o funcionamento de um computador pode ser explicado como uma seqüência de operações que dependem de três elementos principais: unidades de entrada de dados, unidade de processamento e unidades de saída. As unidades de entrada podem ser entendidas como as vias das quais o computador se vale para fornecer ao mecanismo de cálculo as informações primárias (*inputs*) às operações que desejamos obter. Ou seja, é o meio pelo qual a máquina recebe os dados a serem computados, de onde partimos para alcançar os resultados desejados. Unidade de processamento é uma denominação que se dá ao complexo conjunto de elementos eletrônicos que, ligados de maneira específica, têm a capacidade de executar os comandos, desde que instruídos por programas, que são conjuntos de proposições lógicas. Os resultados dos *inputs,* depois de processados, são acessíveis por meio das unidades de saída.

É importante ressaltar que esta descrição é uma forma bastante simplória e absolutamente genérica do que entendemos como computador, aproximando-se da descrição de uma Máquina de Turing. Além desses aspectos gerais, poderíamos seguir expondo outras funções como a de memória, falar sobre as linguagens de programação, a lógica a partir da qual o processamento propriamente dito se baseia, entre outras. Neste artigo objetivamos associar as funcionalidades de um computador à atividade produtiva do matemático. Entendemos que esta ideia geral aqui nos basta, pois, Turing (1936) nos auxilia a compreender que o processo desempenhado por um computador – ou por uma Máquina de Turing – não seria possível sem a intervenção humana. É o Homem que seleciona os dados de

[5] O site do Instituto Charles Babbage pode ser acessado em: http://www.cbi.umn.edu/index.html.
[6] De acordo com as condições estabelecidas por ele.

entrada, a seqüência lógica do processamento dos cálculos – numéricos ou lógicos – e a maneira como o resultado será expresso, se numericamente ou por meio de uma função que decorre do encadeamento lógico "ensinado" ao equipamento, e que pode, inclusive, considerar teoremas e axiomas como regras.

Notamos que o computador e a Matemática possuem uma relação de proximidade e, além disso, de cooperação e contribuição mútua: a Matemática utiliza-se do computador e a Computação utiliza-se da Matemática. Entre inúmeros exemplos das potencialidades e de referências a situações amplamente conhecidas na Matemática, nas quais o computador esteve presente, Ponte e Canavarro elucidam o caso do teorema de Fermat e do teorema das quatro cores, e anunciam, baseados em Ulam (1974):

> O computador também pode ser utilizado para realizar demonstrações. Ele é capaz de operar com os símbolos correspondentes às operações lógicas da álgebra de Boole (e, ou, não). Deste modo, com uma sequência de instruções, o computador executa um conjunto pré-definido de passos, escolhendo entre todas as alternativas possíveis aquelas que satisfazem, em cada momento, o resultado dos passos anteriores. Através deste processo, é possível programar um computador para demonstrar teoremas elementares de geometria. (ULAM, 1974 apud PONTE; CANAVARRO, 1997, p. 84-85).

Entendemos que entre o computador e a Matemática há doações nos dois sentidos. A Matemática contribuiu sobremaneira para o surgimento e intensos aperfeiçoamentos dos computadores e da Ciência da computação, e esta também tem sido fortemente influenciada pelo advento do computador tanto no que se refere ao seu ensino e aprendizagem quanto aos métodos usados na sua própria investigação e resolução de seus problemas.

O computador na produção matemática

A atividade do matemático profissional é buscar solução para os problemas da Matemática. Novos contornos são testados, novas teorias são formuladas, nessa atividade dinâmica que se utiliza do método axiomático e regras lógicas para a produção matemática. Nessa busca e para verificação de alguma proposição, o computador, tomado como verificador de exaustivos cálculos matemáticos (numéricos/lógicos), passou a participar como ferramenta de algumas etapas de produção de verdades matemáticas.

Ponte e Canavarro (1997, p. 84) a respeito das potencialidades do computador em tarefas de investigação do matemático, atenta que eles "servem como instrumentos de cálculo numérico, cálculo simbólico, geradores de gráficos e meio de comunicação".

Nesse âmbito, de tarefas que um computador pode realizar em Matemática, Ponte e Canavarro (1997) atentam que o computador "tem sido utilizado junto à trabalhos investigativos em diferentes áreas da Matemática, tais como análise numérica, a matemática discreta, os sistemas dinâmicos, a investigação operacional, a lógica e a ciência da computação" (p. 84). Além disso, estes autores afirmam que em teoria dos números, a análise combinatória, sistemas dinâmicos não lineares e fractais "os computadores têm participado de processos de decomposição de problemas, em testes de conjecturas, na realização de cálculos numéricos e representações gráficas", Ponte e Canavarro (1997, p. 84), por exemplo, permitindo ao matemático conhecerem comportamentos de funções, observação de outros aspectos desses objetos.

Ainda, Ponte e Canavarro (1997) colocam em relevo a influência do computador no desenvolvimento de áreas da Matemática, tais como análise tensorial, teoria da gravitação, teoria de grupos e análise numérica, apontando que este aliado do matemático possibilitou um revigoramento de investigação em teorias, estimulou desenvolvimentos em outras e conduziu a ampliações de novas áreas de estudo.

Este destaque, muito embora não se relacione exatamente às tarefas dos computadores em situações de demonstração, dão um vislumbre de sua utilidade e potencialidades e sustentam a afirmação que "um novo paradigma de investigação foi providenciado quando do encontro entre matemática e computador, o paradigma da matemática experimental", que valoriza as áreas da Matemática que seguem plasmadas em processos construtivos, "relegando para plano secundário os domínios que vivem, sobretudo, de demonstrações de existência" (PONTE; CANAVARRO, 1997, p. 78).

No programa Marilia Gabriela Entrevista, que foi ao ar no dia 12/04/2015 no canal GNT, o matemático profissional Artur Ávila explica que a sua própria atividade como matemático é um trabalho de matemática criativa, que busca por modelos abstratos que possam representar alguma teoria, para resolver os problemas que investiga. E completa, que há partes de uma resolução de um problema que um computador pode fazer muito melhor que um matemático, porém, que a intuição de um matemático é essencial e não substituível por nenhum programa de computador (ÁVILA, 2015).

A Matemática, o computador e a intuição do matemático no processo de demonstrar

Bourbaki (1950) afirma que "é exceção entre matemáticos aquele que consegue transitar por diferentes domínios sem que se sinta perdido nas diversas regiões da Matemática", Bourbaki (1950, p. 222, tradução nossa). A partir disso, refletimos que nesse sentido, o computador tem se mostrado importante para o trabalho dos matemáticos na averiguação de provas que levam anos para serem verificadas depois de terem sido provadas. É o caso da prova do teorema de Kepler[7] sobre a melhor forma para o empacotamento de esferas, o qual levou desde que foi formulado mais de quatrocentos anos para ser provado e depois de provado ficou sendo verificado exaustivamente por 12 matemáticos durante 4 anos, e ainda assim a demonstração não foi verificada em sua totalidade. O mesmo matemático que havia provado o teorema em 300 páginas traduziu a prova para a forma computacional e submeteu à verificação por meio de softwares que finalmente puderam dar resposta conclusiva ao problema, que então fora provado com a ajuda de um computador.

Outro exemplo que mostra bem possibilidades do papel do computador em demonstrações, é o caso do teorema das quatro cores[8] que estava em aberto desde 1852 e foi feita através da computação eletrônica em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, para a qual não faltaram objeções, porém até hoje, ninguém conseguiu outra prova que não recorra ao computador.

Tais objeções tendem a não vingar, dado que cada vez mais a ciências dependem do computador. Contudo, o papel do matemático frente à prova desse teorema com o computador passa a ser questionado: "a verdade é que os métodos matemáticos por mais que sejam apurados parecem não poder tudo e, portanto, deixam vazios que precisam ser preenchidos pela argúria dos matemáticos e por métodos mais amplos de busca da verdade" (DOMINGUES, 2003, p. 55).

Vejamos o que Bourbaki (1950) expõe sobre o trabalho do matemático antes de sua proposta de organização dos objetos matemáticos por estruturas[9]:

> Anteriormente, por outro lado, ele (o matemático) era obrigado a forjar para si mesmo os meios de ataque a seus problemas; seu poder dependia de seus talentos pessoais e muitas vezes eles foram carregados de hipóteses restritivas, decorrentes das peculiaridades dos problemas que estavam sendo estudados. (BOURBAKI, 1950, p. 226, tradução nossa).

Um dos aspectos que julgamos mais relevantes nesse nosso estudo sobre demonstrações matemáticas por/com computador é o ponto em que o computador nada pode fazer pelo matemático se não for comandado a fazer, aquele ponto em que a criatividade, da qual falou

---

[7] Ver mais em: http://olhardigital.uol.com.br/noticia/computador-prova-teoria-matematica-de-400-anos/43563

[8] Formulação do teorema das quatro cores: Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. Detalhe: as regiões que só se tocam num ponto não são consideradas vizinhas.

[9] A ideia de estrutura de Bourbaki pode ser aplicada a conjuntos de elementos cuja natureza não é especificada; para definir a estrutura, toma-se como dado uma ou várias relações entre esses elementos; em seguida, postula-se uma determinada relação ou relações para satisfazer os axiomas da estrutura em causa; para configurar a teoria axiomática de uma determinada estrutura eleva-se os axiomas da estrutura às consequências da dedução da lógica desconsiderando toda e qualquer hipóteses sobre os elementos do conjunto em causa bem como quanto à sua própria natureza.

Artur Ávila, acima mencionado, é o que dá o amálgama para a resolução do problema. Bourbaki (1950) nos conta que:

> O matemático não trabalha como uma máquina, nem como o operário na esteira de produção; não podemos exagerar o papel fundamental desempenhado em sua pesquisa por uma intuição especial, que não é o sentido popular de intuição, mas sim um tipo de adivinhação direta (a frente de todo raciocínio) do comportamento normal, que ele parece ter o direito de esperar dos seres matemáticos, com quem uma longa convivência o tornou tão familiar quanto com os seres do mundo real. (BOURBAKI, 1950, p. 226, tradução nossa).

Bourbaki (1950, p. 227) também pontua que "cada estrutura traz consigo sua própria linguagem carregada de referências intuitivas especiais derivadas das teorias de que a análise axiomática descrita acima tem derivadas da estrutura" e que nessa proposta os matemáticos

> Mas, a partir de agora ela possui as poderosas ferramentas fornecidas pela teoria dos grandes tipos de estrutura; numa visão singular, ela varre imensos domínios, agora unificados pelo método axiomático, mas que estavam anteriormente num estado completamente caótico. (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).

E enfatiza que o que isso significa mesmo é que "a matemática nunca foi reduzida para um jogo puramente mecânico de fórmulas isoladas; mais do que nunca que a intuição domina na gênese das descobertas", (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).

É comum encontrarmos associada à ideia de intuição com o episódio da maça que caiu na cabeça de Newton (e de Einstein! Pela teoria da relatividade restrita), provida por um fator externo, porém, nossa crença pessoal é que a intuição é constituída de muito estudo.

Em relação aos computadores, Turing enfatiza o que ele chama de "intuição" como aspecto do raciocínio matemático, como vemos a seguir:

> Na época pré-Gödel era pensamento de alguns que … todos os pensamentos intuitivos da matemática poderiam ser substituídos por um número finito de … regras [formais] … Em conseqüência da impossibilidade de encontrar uma lógica formal a qual eliminasse totalmente a necessidade de se usar a intuição, nós naturalmente recorremos a sistemas "não-construtivos" da lógica com os quais nem todos os passos em uma prova são mecânicos, sendo alguns intuitivos (TURING, 1939, p. 192-193 apud COOPLAND; POSY; SHAGRIR, 2013, p. 4, tradução nossa).]

Turing escreveu cartas a Max Newman, por volta do ano de 1940, explicando o que ele entendia sobre "intuição" conforme podemos ver no seguinte trecho:

> Eu penso que você toma muito mais radicalmente a atitude de Hilbert sobre a matemática do que eu. Você diz "Se toda essa roupagem completamente formal não diz respeito a encontrar provas, as quais possam ser checadas por uma máquina é difícil saber sobre o que é." Quando você diz "por uma máquina" você tem em mente que ela é (ou deveria ser ou poderia ser, mas não foi realmente descrita em nenhum lugar) alguma máquina fixa na qual provas são checadas, e que a roupagem formal é tal qual o foi sobre esta máquina. Se você toma essa atitude (e esta é que me parece tão extremamente Hilbertiana [*sic*]) há muito pouco a mais para dizer: nós simplesmente temos que nos acostumar à técnica dessa máquina e nos resignar ao fato de que há alguns problemas para os quais nós nunca chegaremos à resposta. Nessas linhas minha lógica ordinal não faz sentido. Entretanto eu não penso que você realmente está seguro esta atitude porque você admite que no caso do exemplo

de Gödel pode-se decidir que a fórmula é verdadeira, isto é você admite que há uma ideia bastante definitiva de uma fórmula verdadeira a qual é bem diferente da ideia de uma [fórmula] provável. Em todo o meu artigo sobre lógica ordinal eu tenho assumido isso também...Se você pensa em várias máquinas eu não vejo a sua dificuldade. Imagina-se diferentes máquinas permitindo diferentes conjuntos de provas, e pela escolha de uma máquina adequada pode-se aproximar "verdade" pela "provabilidade" melhor do que com uma máquina menos adequada, e pode em algum sentido aproximá-la tão bem quanto lhe agrade. A escolha de uma … máquina envolve intuição... (TURING PARA NEWMAN, 1940, p. 215 apud COPELAND; SHAGRIR, 2013, p. 4, tradução nossa).

De acordo com Copland e Shagrir (2013) a citação acima descreve o que foi denominado "Turing's Multi-Machine picture of mathematics". E explicam:

Nesse quadro o todo da intuição é localizado de maneira muito precisa. Intuição é responsável pela seleção da apropriada máquina theorem-proving (a máquina de Turing apropriada), e o resto é mecânico. A intuição envolvida na seleção da máquina de "prova-por-teorema" é, diz Turing, "intercambiável" com a intuição envolvida em encontrar a prova do teorema. (COPLAND; SHAGRIR, 2013, p. 5, tradução nossa).

Desse modo, compreendemos que o que o computador pode fazer pelo matemático no processo de demonstração é somente o que o matemático programa para que ele faça. Para isso, o matemático se vale de seu conhecimento científico, de sua intuição e de sua criatividade. A partir desses elementos ele descreve, por meio de encadeamentos de proposições lógicas, o processo que deseja percorrer para alcançar resultados parciais ou finais. Esses encadeamentos poderão, à escolha do matemático em sua produção, ser traduzidos em linguagem de programação e inseridos numa máquina – computador – que vai lhe auxiliar nesta etapa. Esta rotina se repete sempre que o matemático intuir que o aparato eletrônico pode auxiliá-lo com seus resultados apropriados à sua reflexão sobre a proposição que deseja demonstrar.

Seja numa simulação, numa abordagem experimental, numa iteração, na realização de cálculos, em plotagens, entre outros, tais como apresentados em Ponte e Canavarro (1997), é a intuição que diferencia o computador de um matemático.

Considerações finais

Acreditamos que fazer matemática é mais do que fazer demonstrações e definir elementos. Muito embora seja isso que se apresenta quando se expõe uma teoria ou uma extensão dessa. Fazer matemática é um processo que envolve um método, como nos diz Bourbaki

O método de raciocínio por meio de cadeias de silogismos é um mecanismo de transformação, aplicável a conjuntos de premissas, [...] é a forma externa que o

> matemático dá ao seu pensamento, o veículo que o torna acessível para os outros. Bourbaki (1950, p. 223, tradução nossa).

Ocorre-nos que é dessa forma que é apresentada. Contudo, fazer matemática é um processo que não é matemático, que envolve julgamentos do que é interessante, do que é útil.

Compreendemos a intuição, nesse caso em que focamos o fazer matemático em demonstrações, como uma capacidade de ajustar coisas aos padrões que estão dados, a partir do reconhecimento de semelhança entre aspectos de problemas e/ou ideias. A criatividade, a qual se referiu Artur Ávila, compreendemos que é o modo como se faz esse ajuste. A intuição é uma centelha que clareia por um instante e oferece um vislumbre de uma possibilidade de ajuste e a criatividade é responsável pela abordagem que se dá ao ajuste. A experiência é responsável pelo *know-how* que por sua vez ilumina articulações teóricas. E o computador em contrapartida traz oportunidades à Matemática, intensificando sua eficácia e juntos constituem um sistema forte e poderoso que reflete nos resultados obtidos em parceria.

Por fim, inferimos que a criatividade e a intuição estão presentes na produção cotidiana de um matemático. O computador abre novas formas de se fazer matemática, contudo no que tange à tarefa de demonstrar, ele pode estar presente nessa atividade, no entanto isso não exime a presença da criatividade e intuição do matemático. O computador fomenta o processo demonstrativo, que envolve uma dinâmica de iniciar e do reiniciar, num jogo de conjecturar e avançar. Na investigação do binômio computador/demonstração sinalizamos a importância de se filosofar sobre o encontro da Matemática com o computador, evidenciado pelo episódio do impasse na aceitação da demonstração por exaustão problema das quatro cores e do teorema de Euler, por exemplo.

Referências

ÁVILA, Artur. **Entrevista com Artur Ávila.** Entrevistadora: Marília Gabriela. Rio de Janeiro. 1 arquivo de vídeo. Entrevista concedida ao programa Marília Gabriela Entrevista do canal GNT, programa exibido em 12 de abril de 2015. 2015.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **Bolema**, Ano 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org). **Filosofia da Educação Matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: editora UNESP, 2010.

BOURBAKI, Nicolas. The Architecture of Mathematics. **The American Mathematical Monthly.** Whashington, US. v. 57, n. 4, p. 221-232. apr. 1950.

COPELAND, Brian Jack; SHAGRIR, Oron. Turing versus Gödel on computability and the mind. In: COPELAND, Brian Jack; POSY, Carl J.; SHAGRIR, Oron. (Orgs). **Computability:** Turing, Gödel, Church and Beyond. London: The MIT Press, p. 1-33, 2013.

DOMINGUES, Higino H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema**. Ano 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

GÖDEL, Kurt. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, Manuel. (org.). **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977. p. 245-290.

LIMA, Arlete Cerqueira. **Lógica formal:** origens e aplicações. Salvador: Quarteto, 2010.

PONTE, João Pedro; CANAVARRO, Ana Paula. **Matemática e novas tecnologias**. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

TURING, Alan. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. In: **Proceedings of the London Mathematical Society.** Oxford, Inglaterra, GB. Series 2, 42, p. 230-265, 1936.