http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11nespp232

Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico

Philosophical Understandings for An Alternative to Geometric Thinking

Adlai Ralph Detoni
adlai.detoni@ufjf.edu.br

José Milton Lopes Pinheiro
jmilton.ufjf@gmail.com

Resumo

Buscamos aqui abrir em compreensões o cenário que comporta diversidade de geometrias, dizendo de suas origens junto à Geometria das Transformações. Tomada a geometria euclidiana como *elementar*, outras geometrias com base nela, ou nas que a sucederam, foram se constituindo mediante estudo de *movimentos* - dentre os quais o deslocamento e a projeção - que compreendem novas formas de conceber significados geométricos e, com efeito, novas geometrias. O *movimento* nessas constituições fez-se significativo, e, com base em suas potencialidades epistemológicas, articulamos, também, um ensaio para compreender a chamada *Geometria Dinâmica*, assim descrita por ser concebida em *software* que potencializam o movimento. Questionamos: *há tratamentos geométricos mais afins que outros para ganhar ambiente em telas computacionais para software gráficos abertos?* Valemo-nos da literatura para compreender as geometrias institucionalizadas; entendemo-las como potencialmente geradoras de outras geometrias. Essa busca permitiu-nos articulações que sustentam compreensões em torno de nossa pesquisa: o dinamismo potencialmente transformador que subjaz geometrias também pode transformar os modos de estar com elas, bem como o de tratá-las em sala de aula. Isso sugere variações epistemológicas e metodológicas na pedagogia escolar, o que permite, também, a projeção de múltiplas pedagogias geométricas, tais quais as que contemplam os *software,* abrindo possibilidades aos currículos escolares.

Palavras-chave: Filosofia; Geometria; Transformações Geométricas; Geometria Dinâmica.

Abstract

Our goal here is to openly understand the scenario that comforts a variety of geometries, telling their origins along the Geometric Transformations. Considering the Euclidean geometry to be *elementary geometry*, other geometries based on this or in the succeeding ones were constituted by study of *movements* - among which the displacement and the projection- which underlie new ways of designing geometric meanings and, as effect, new geometries. The *movement* in these constitutions made itself significant and, based on its epistemological potentialities we articulate, as well, an essay to understand the so-called *Dynamic Geometry* , so described due to its design for movement-enhancing software. We question: *Are there any geometrical treatments more likely than others to conquer terrain in computer screens for open graphics software?* We have used the bibliography to understand the institutionalized geometries; these are understood potential generators of other geometries. This search allowed us the joints that support understandings around our survey; the potentially transformative dynamics that underlies geometries can also transform the ways of being with them as well as the way to treat them inside the classroom. This suggests epistemological and methodological variations in school pedagogy, which also allows the projection of multiple geometric pedagogies, such as those concerning software, opening possibilities to school curricula.

Keywords: Philosophy; Geometry; Geometric Transformations; Dynamic Geometry.

Introdução

Este texto está redigido dentro da intenção dos autores em realizar um ensaio inicial sobre compreensões da geometria. Trabalhando em um estudo que foca a produção geométrica no ambiente de *software* gráficos abertos e uma consequente geometria comumente chamada dinâmica, queremos compreender esse caráter dinâmico, estando junto a alternativas de estruturações geométricas diferenciadas em relação ao que chamaremos aqui de geometria elementar. Essa expressão, presente em alguns textos desde Klein (1984), aqui virá para caracterizar o usual tratamento euclidiano, com seus objetos e sua metodologia correlata.

Para o início de nossos estudos, pusemos em estado de crítica a conveniência das práticas geométricas curriculares mais tradicionais com a tela aberta de um *software*. O tratamento usual se abstém de propostas que requerem mais investigações por parte dos alunos, bastando-se no aporte de propriedades já conhecidas, estaticamente trazidas para se resolver situações que são colocadas didaticamente como problemas.

Privilegiamos, aqui, um olhar sobre a nomeada geometria das transformações, uma vez que leituras de vários autores contribuintes apontam para a sua importância histórica como um veio revolucionário de como se produzir geometria. Essa geometria se encontra nascendo, como articulação mais formalizada, junto com os esforços não euclidianos, sendo, para nós também, um modo de ser deles, e é celebrada por grandes matemáticos e educadores matemáticos como um revigoramento científico do pensamento geométrico, desde o século XIX.

Nosso proposto ensaio recupera parte da contribuição desses autores, já que todos os apontamentos deles falam em procedimentos geométricos que premiam o movimento e o dinamismo das relações. É o que queremos compreender em uma pesquisa que vai se articular nesse entorno, indo ao encontro do sentido do dinâmico de um *software* gráfico. Como abertura temática, perguntamos: há tratamentos geométricos com mais afinidade que outros para ganhar ambiente em telas computacionais para *software* gráficos abertos?

Com essas contribuições, nos encontramos num viés epistemológico: novas geometrias significam novas concepções. Também, entendemos que compreendê-las não só é um caminho da compreensão geral do que desenhamos mas resulta em indicações pedagógicas decorrentes disso, o que nos interessa para nosso trabalho como educadores matemáticos.

Cenário histórico-epistemológico para grupos de transformação

A virada do século XIX para o XX é tempo para importantes realizações e reflexões no campo da matemática. Vários matemáticos de significativa produção científica vão, além disso, tentar compreender o todo que vinha se constituindo para essa ciência. Entre outros, focamos o trabalho de Félix Klein, que, ao lidar com as tarefas acima, preocupou-se em desenhar o que seria um currículo escolar que comportasse novas descobertas que estavam ocorrendo, entre as quais a ideia de grupo de transformações.

A noção de grupo revoluciona o que é o fazer da geometria, uma vez que propriedades de objetos geométricos não estão neles mesmos, mas estão num conjunto com outros. Um dos grupos recorrentes a serem mais imediatos é o de deslocamentos. Deslocamentos, simplesmente, não geram novas figuras distintas das originais em termos de propriedades métricas lineares ou angulares; portanto, há grupos de deslocamento ditos de isometrias. Isometrias são comumente bem consideradas quando se pensa na geometria que se quer fazer sobre o nosso dito mundo físico, o convencionado de três dimensões. Desse modo os deslocamentos dão bem conta do espaço posto subjacente, mas implicam novos objetivos de estudo, novos valores epistemológicos. Essa implicância move nossos estudos.

Nas isometrias, as propriedades geométricas euclidianas – igualdades de medidas lineares e angulares, notadamente - não se alteram pela posição que os objetos possam assumir no espaço, nem mesmo pelas orientações de sentido. Essa condição ajuda Klein (1984, p.7) a definir *grupo principal*, aquele em cujas transformações há invariâncias dessas propriedades. Interessante observar essa construção de Klein, que mostra novas visões sobre o euclidianismo, mas toma seu estatuto como forte referência.

Em *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009), para evidenciar a igualdade de figuras planas, Euclides trabalha a ideia de *ajustamento* de uma figura sobre a outra, sendo que figuras iguais podem ser justapostas sem que haja diferenças entre as medidas dos objetos que as constituem. Euclides sugere o que entendemos ser um *movimento de sobreposição*, o qual se inicia ajustando os primeiros elementos de uma figura sobre seus iguais que pertencem à outra figura. Os demais elementos das figuras contempladas, em consequência, ajustam-se, como no caso de triângulos iguais: quando têm ajustados um a um dois de seus lados, o terceiro lado de um dos triângulos consequentemente se ajustará ao terceiro lado do outro. Euclides traz a ideia de ajustamento entre figuras atentando para a igualdade de segmentos e também para a igualdade de ângulos. Mas, esse matemático grego não sistematiza esse ajustamento e suas implicações geométricas, bastando servir-se dele para o resultado que intenciona.

As indicações de Euclides, conforme sabemos, tornaram-se aceitas e assentadas na tradição que praticamos, mas, como procuramos evidenciar, fazem um apelo tácito sensualista, sem metodizar as possibilidades de movimentos. Obviamente, nos milênios que se seguiram, os esforços axiomáticos diluíram, de certo modo, esse apelo tácito.

A simplificação euclidiana é questionada por Poincaré, que, aproveitando o advento das geometrias não euclidianas, vai considerar que a ideia clássica de movimentos que deixam inalteradas propriedades de objetos é relativizada:

> Mas, com que direito consideramos iguais essas duas figuras que os geômetras euclidianos chamam de dois círculos de mesmo raio? É porque, ao transportar uma delas sem deformá-la podemos fazer coincidir com a outra. E porque dizemos que esse transporte se efetuou sem deformação? É impossível dar a isso uma boa razão. [...] quando dizemos que os movimentos euclidianos são os verdadeiros movimentos sem deformação [...] queremos dizer que eles são mais notáveis do que os outros; [...] Porque certos corpos naturais notáveis [...] sofrem movimentos mais ou menos parecidos. (POINCARÉ, 1995, p. 43)

O pensamento matemático-filosófico de Poincaré se estende - assim compreendemos - para abrir afirmações que jazem implícitas na tradição, mesmo porque ele acaba considerando, em um convencionalismo, que a geometria euclidiana é conveniente para abordarmos os fenômenos mais comuns em nossas relações com nosso mundo físico. Essa tarefa de explicitação comporta a organização matemática das noções de deslocamentos.

Ao nos convidar para sermos articuladores de novas livres geometrias, Klein nomeia como elementar a geometria tomada e praticada dentro da tradição euclidiana. Numa tarefa empreendida quando se arbitram transformações sobre uma variedade multidimensional – um certo objeto geométrico, por exemplo –, ele enuncia o problema geral: "é dada uma variedade e, nesta, um grupo de transformação: desenvolver a teoria dos invariantes relativos a esse grupo" (KLEIN, 1984, p. 8). Ao fazer isso, mostra valores epistemológicos distintos da tradição milenar geométrica que focava a variedade, o objeto; agora, o foco é a constância pertinente a um grupo, que as transformações seguidamente erigem.

Nesse novo fazer geométrico, surgem as ideias de grupo mais restrito e grupo mais amplo, sempre em termos de invariâncias. Um quadrado, num grupo de transformação, pode apenas mover-se rigidamente e a figura transformada será o mesmo quadrado, e isso seria restrito; um grupo mais amplo admitiria que o transformado dele pudesse mesmo ser uma figura arredondada. Assim, nesse segundo caso, "as propriedades geométricas se conservam somente em parte. O restante aparece como propriedade não mais dos próprios entes, mas como propriedades do sistema resultante do acréscimo de um ente especial aos entes originais" (KLEIN, 1984, p. 11). Interessa-nos, para os fins de nossas reflexões neste texto, perceber o potencial pedagógico que se abre para uma geometria, uma vez que há uma dinâmica de relações mais ampla que a geometria elementar e que pode ser trabalhada.

Klein situa a geometria projetiva como um grupo de transformações específico, e ela, mesmo que não a aprofundemos aqui, pode ajudar a colocar questões junto ao que queremos refletir. A geometria projetiva tem características que revelam uma potencialidade também distinta do que se observa no trabalho com a geometria elementar. Enfoquemos tanto o não-paralelismo (pois o paralelismo não se mantém em projeção) como seus elementos no infinito; suponhamos estar com uma situação gráfico-geométrica posta num *software* gráfico que permite uma livre dinâmica de movimentos dos objetos desenhados: a liberdade de carrear feixes de retas é mais compatível nessa geometria, pois transformações pontuais mais amplas são permitidas ainda dentro de um grupo de invariâncias mais amplo. Além disso, certas situações limite atingidas em alguns deslocamentos gráficos feitos, que seriam como singularidades para uma geometria elementar, para o caso projetivo, teriam significados comportados. Obviamente, observamos isso a partir do que permite a estrutura funcional da programação de um programa gráfico.

Fernandes (1984), nas observações finais que faz como organizador da tradução de Klein que utilizamos, diz que a importância filosófica deste é a de interpretarmos que o espaço não é mais o receptáculo inerte das figuras nele contidas, e sim parte integrante da própria ciência geométrica. Nossa preocupação pedagógica nos leva a estender isso dizendo que o espaço passa a ser um horizonte de atribuição de significados, em qualquer momento escolar, que poderiam favorecer a retomada de seu estatuto como habitação humana, e não apenas como constructo já realizado tanto no senso comum quanto nas ciências.

Valores epistemológicos de novas geometrias em Bachelard

Em um dos capítulos de sua obra *O Novo Espírito Científico*, Bachelard (1968) posiciona sua dialética do realismo/racionalismo na filosofia geométrica. A princípio, ao racionalismo corresponderia o trabalho de compreensão de seus objetos, tencionando conhecê-los em sua essência - as propriedades que o tornam um objeto entre os demais; ao realismo corresponderia a compreensão das possibilidades de um objeto ser com os outros em situação e, por meio de transformações de posição, a compreensão das relações entre objetos e até de um objeto para com ele mesmo. Mas, adianta o filósofo, o realismo e o racionalismo trocam conselhos, especialmente com a contribuição da física à matemática desde os fins do século XIX.

O filósofo diz que um diferencial para a compreensão epistemológica das novas geometrias é o entendimento da ideia de grupo. Sendo este um grupo de invariantes que se manifestam dada uma transformação, promove-se, epistemologicamente, uma grande guinada na definição do que é (são) geometria (s), quando os invariantes físicos é que dariam valor racional aos princípios da permanência. A presença do termo "físicos" nessa asserção pode até causar desconforto a uma tradição matemática, mas Bachelard lembra que a física foi uma mola propulsora de novas axiomáticas e o quanto seu cientista vai tornar a matemática um campo experimental seu, criando um laboratório de conceitos matemáticos.

A ideia de grupo em Bachelard (1968) traz as condições que vão determinando sua própria delimitação. O grupo não é de objetos em si, mas das relações (e operações) que ´deixam´ o objeto na circunscrição conceitual daquele grupo, reproduzindo a criterização pela qual a matemática, como um todo, passa a se realizar em uma disciplina mais estruturalmente formada.

A tradição geométrica ocidental é a euclidiana. De tão antiga e praticada, ela pode-se cercar de noções acabadas. Cada objeto achou seu conceito. Ele pode ser posto como um objeto entre objetos, nessa visão de geometria acabada. A relativização dessa tradição que ocorre com o advento de pensamentos geométricos não euclidianos se põe em tarefa de reconstituir conceitos. Por exemplo, uma reta, que euclidianamente tem um estatuto próprio, não-euclidianamente é conceituada *em relação à* superfície que a acolhe e em relação ao papel geométrico que ela descreve nessa superfície. Por exemplo, seja reta a interseção de um plano ortogonal à superfície que vem a ser o ´plano´ de uma geometria: essa interseção é uma ´reta´, nesta geometria.

O advento das novas geometrias abre novas perspectivas de geometrização, quando o " papel das entidades precede sua natureza e [...] a essência é contemporânea da relação" (BACHELARD, 1968, p. 27). Das qualidades intrínsecas, conforme é busca da geometria euclidiana, passamos a observar as extrínsecas e relativas e falamos, como Bachelard, num desdobramento da personalidade geométrica. Essas perspectivas revelam-se em novos valores epistemológicos para a interpretação de um realismo matemático quando passamos a buscar a extensão das noções – o quanto elas se desdobram junto a outras - em detrimento de sua compreensão ontológica mais pura, e o "pensamento matemático progride com a aparição das ideias de transformação, de correspondência, de aplicação variada" (BACHELARD, 1968, p. 29).

É importante frisarmos a questão epistemológica que Bachelard traz, uma vez que ela implica discutir como uma geometria – ou certo modo de fazer geometria – realiza-se também desrealizando outra, pondo outra em crítica. Levada para o campo do pedagógico, essa questão se põe abrindo diferenças entre as práticas mais tradicionais do ensino - quando *seguimos* uma geometria já consolidada-, e uma prática que vai propor geometrizar-se de outro modo possível. Essa abertura pode fazer recuperar-se sentidos humanos do espacializar, de se pensar mais originalmente o espaço.

Diversos modos de geometrizar virão se praticarmos as possibilidades de uma forma se *transformar*. Bachelard lembra que axiomáticas alternativas à clássica euclidiana, como a de Hilbert, vão ser escritas, frisando definições isentas de conteúdos substanciais e atinentes a abarcar transformações, sendo basicamente relacionais. O filósofo observa que, em um novo pensamento não tradicional, os objetos geométricos vão buscar realidade não mais ingenuamente num real imediato ao seu ser, nem em relações isoladas e estáticas, mas em relações tão numerosas que vão reclamar uma organização complementar; esta se faz na ideia de grupo, que realiza o objeto.

Desse modo, "cada geometria [...] é caracterizada por um grupo especial de transformações" (BACHELARD, 1968, p. 33). O forte caráter de presença dessas no mundo físico faz-nos retornar de uma tradição e reavaliar o que é verdade entre o experimental e a razão. Como reflete Bachelard, as revoluções geométricas nunca trataram de desautorizar a geometria euclidiana, mas, de seu trono de ser a geometria, ela passa a ocupar uma nova concepção: é um grupo. Como tal, ela se abre para se redefinir, especialmente pelo caráter operativo de um grupo. A geometria euclidiana é um grupo de deslocamentos, o que permite à experiência e à razão estabelecer a igualdade de duas figuras.

Não se trata de uma simples roupagem nova para a geometria euclidiana; os deslocamentos, antes admitidos e postos tácita e axiomaticamente, agora são o veio epistemológico de sua estruturação como grupo de transformação. Tal redefinição científica leva Bachelard a observar que essa geometria é uma primeira física matemática. É também essa redefinição que - interpretamos junto ao filósofo - traz a tarefa de um fazer geométrico renovado em relação à tradição milenar, uma vez que uma nova dialética do real e do racional sobrevém necessária para organizarmos o "fluxo torrencial dos fenômenos, na realidade incessantemente móvel" (BACHELARD, 1968, p. 36).

Filogênese das transformações em Piaget e Garcia

Piaget e Garcia (1987) argumentam que, por um longo período – que abrange séculos –, a noção de transformação em geometria foi constantemente aplicada, no entanto ela ainda não era tematizada em seu significado e possibilidades; muitas concepções abstratas em matemática, hoje sistematizadas, foram postas em uso sem as atuais reflexões que nos permitem justificar sua utilização bem como direcionar seus sentidos a contextos matemáticos distintos.

A obra *Elementos*, de Euclides, dada sua importância, é considerada pelos autores "a contribuição mais importante da Antiguidade para a metodologia das ciências" (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 91). É no estudar e questionar a geometria euclidiana que a noção de transformação geométrica se originou e, com o tempo, foi-se constituindo como geradora de outras geometrias entre outras ciências. A geometria analítica desenvolvida no século XIX, enquanto linguagem, marcou a origem da noção de transformação e, segundo os autores, superou a "geometria antiga" ao elevar as experiências físicas da mesma ao âmbito da abstração, visto que não se limita à existência visível, positiva e absoluta dos objetos. Creditam tal superação também à universalização do que eram, na "geometria antiga", características restritas a cada objeto, ao observá-los em suas individualidades, como por exemplo, ao apresentar em uma única fórmula propriedades de uma família inteira de curvas, sem necessidade de justapô-las para observar o que varia ou não em termos de características e propriedades.

A condução do conceito de transformação, segundo os autores, deu-se ao longo dos séculos e foi marcada por um apogeu. No entanto é a partir do século XX, com os estudos de Lie e Klein, que esse conceito se tornou mais abrangente, já que as concepções desses matemáticos, baseadas na noção de grupo de transformação e as invariantes correspondentes, mostraram-se como utensílios necessários para introduzir as distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 105).

Esse percurso histórico é feito pelos autores, intuindo apresentar a convergência do mesmo aos estudos psicogenéticos, campo de pesquisa ao qual se aplicou por anos Piaget. Para melhor tratar essa relação, trazemos ao discurso os níveis de organização que se evidenciam na construção do conhecimento (PIAGET; GARCIA, 1987). Esses níveis formam a tríade *intra-inter-trans*. No que diz respeito ao nível *intra*, o sujeito, ao abordar um novo domínio, é obrigado a incorporar os dados desse domínio aos seus próprios esquemas – de ação ou corporais. Na sequência, a fase *inter* refere-se aos novos esquemas constituídos na fase *intra* que, segundo os autores, não poderiam ficar isolados: "cedo ou tarde o processo assimilador levará a incorporações recíprocas, as exigências da equilibração impondo [...] formas relativamente estáveis de coordenações e transformações" (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 189). E, por fim, o nível *trans*, que se justifica pela necessidade de equilibrar a multiplicidade de subsistemas que vão sendo construídos, de forma a integrar as diferenciações e não as submeter, o que alcançaria um sistema de interações.

Os autores se valem dessa tríade para abordar o caso particular dos conhecimentos em geometria. Os três níveis ganham nomes que se acomodam a esse contexto, constituindo os níveis: *intrafigural*, *interfigural* e *transfigural*, quando se utiliza dos conceitos correlatos acima para ilustrar a evolução do conhecimento no tratamento de figuras geométricas.

É desse modo que os autores trazem as relações do percurso histórico à psicogênese. No percurso desenhado aqui, a geometria começa em Euclides, em um período no qual se estudavam propriedades de uma figura enquanto relações internas restritas à mesma, não expandindo e não considerando as transformações dessa figura em um espaço que contempla outros objetos, tais quais outras figuras. Essa fase é chamada pelos autores de *intrafigural*.

Ao período no qual a Geometria Projetiva foi-se constituindo os autores associaram a fase *interfigural*, visto a constituição dessa geometria ter sido caracterizada pelo estabelecimento de múltiplas relações entre figuras, intuindo encontrar transformações ao ligá-las segundo diversas formas de correspondências.

E, por fim, inicia-se historicamente a fase à qual os autores destinaram o conceito de *transfigural,* "caracterizada pela preeminência das estruturas" que permitiam transformar as figuras, gerando multiplicidade delas, em uma integração de suas correlações e diferenciações, fase marcada especialmente pela expressão do *Programa de Erlangen*, de Félix Klein. A partir de Piaget e Garcia, identificamos a transfiguralidade como um estágio de compreensão metodológica, quando é possível abstrair-se dos objetos em questão e o pensamento geométrico está explicitamente praticando um método.

Neste texto, ensaiamos aproximar o sentido expresso na fase interfigural com as potencialidades dinâmicas de uma geometria em que se busca transformação de posições. O terceiro nível que os autores acima caracterizaram seria aproximado de metodização de processos, a partir de movimentações particulares. Entendemos que o trabalho com a geometria se revela tanto no domínio da linguagem quanto na compreensão das espacializações como possibilidades, isto é, não a visão estática de entes que se encerram em seus conceitos, mas que se põem à disposição de ocupar novos espaços.

A espacialização gráfica como dinâmica

Devemos lembrar, a fim de realizarmos uma filosofia da educação geométrica, o não tão antigo histórico educacional que apontava um declínio do ensino de geometria nas escolas, em alguns casos mostrando seu abandono curricular. Os últimos 20 anos, no entanto, revelaram uma retomada de sua importância para a formação de estudantes, creditando-se isso ao esforço propositor de muitos pesquisadores em Educação Matemática. Nesse período, é inegável o papel renovador que trouxe, como um todo, a matemática escolar praticada junto ao aporte de tecnologia informática, legando novos valores para a necessária presença da geometria.

Obviamente que apenas a entrada de computadores em nossas salas de aula não foi sinal de uma verdadeira renovação, sendo que, em alguns casos, *software* eram usados para agilizar propostas ainda convencionais de ensino. Pensamos, como Noss e Hoyles (1996), numa *nova geometria com novas ferramentas*. Esses autores, em pesquisa com alunos do final do ensino fundamental, mostram como a tela de um *software* gráfico permite mudanças no fazer matemático quando se pode movimentar elementos de uma situação dada *pensando* a partir de novas situações, fugindo de soluções só possíveis com aporte de outros conhecimentos já consolidados, exteriores à situação propriamente dada.

Noss e Hoyles corroboram nosso pensamento de como novos modos de procedimentos geométricos advêm quando se dispõe de ambientes que permitem o dinamismo. Argumentam que isso predispõe os aprendizes de geometria a uma prática investigativa, autônoma e produtiva, quando uma "conjectura emerge da intercalação de algum fato geométrico familiar com dados observados na interação dinâmica com objetos investigados" (NOSS; HOYLES, 1996, p. 242).

Bilac (2008) traz as referências em Piaget e Garcia para apontar a presença das noções de posição e deslocamento caracterizadas quando uma criança-aprendiz tem as atenções para além da relação da soma de ângulos nos triângulos e é posta a tarefa de ver essa invariância "na totalidade que o espaço representa" (BILAC, 2008, p. 31). Essa autora também se vale da pesquisa de lugares geométricos para discriminar os de percepção espacial mais estática, como a equidistância das crianças a um ponto gerando um círculo, daqueles de percepção necessariamente mais dinâmica, como no caso de duas crianças constituírem a noção dos pontos que estariam equidistantes delas. A pesquisadora se envolve com a perspectiva de se levar a ambientes informatizados atividades que são similares à de crianças em ação com os próprios corpos.

Compreensões iniciais

A título de articularmos nossas primeiras compreensões acerca do pensamento geométrico depois das contribuições que recolhemos acima, buscamos apontar algumas argumentações que são fundo para direções na pesquisa que vimos desenvolvendo.

Consideramos que novos modos de se pensar a geometria tem um tempo histórico de acontecimentos: sem nenhuma data crucial, aos fins do século XIX eles ocorrem estruturados, numa denominação geral de neoeuclidianismo, mas com algumas variantes de mais de uma natureza. Entre tantas outras manifestações, vimos que os autores que lemos enfatizam o grupo de deslocamentos e o projetivo. O primeiro é um exemplo de como uma geometria já estruturada, a euclidiana, é reorganizada em seus propósitos se a olhamos com um renovado espírito científico; o segundo se afasta da geometria tradicional, uma vez que o paralelismo não é um invariante para seus objetos transformados.

Afirmamos que a aproximação com filósofos, ou matemáticos que pensam filosoficamente, é importante nos momentos em que queremos compreender o pensamento diante de novas possibilidades, uma vez que a filosofia nos traz uma metodologia peculiar de investigações. Entendemos que o pensamento filosófico permitiu-nos extensões epistemológicas e pedagógicas.

Muitos pesquisadores brasileiros vêm se debruçando sobre a questão geral da implicância mútua entre a Geometria das Transformações e a Geometria Dinâmica, dos *software*, podendo se ver a ocorrência de vários referenciais teóricos comuns na pesquisa da pedagogia da matemática. Em geral, essas pesquisas apontam a inexorável mudança de prática curricular em geometria, tendo em vista que o tratamento dinâmico faz disparar novas possibilidades pedagógicas, dentro de modos epistemológicos alternativos ao tradicional.

Já conjecturamos aqui que a geometria vinculada às noções de grupo de deslocamentos implica o tratamento de propriedades não privilegiadas na usual geometria escolar elementar, e esse quê de diferença é tal que pede uma variação epistemológica, já que se pensa mais em situação do que em condições isoladas.

As propriedades relacionais de um objeto a outro, ou mesmo dele próprio em duas posições distintas após movimento, indicam uma temporalidade que não é suscitada no tratamento elementar. Na geometria que tem essas características, entendemos que um dinamismo está correlato ao seu pensar. Esse entendimento nos leva a afirmar, ainda como apontamento de direção para seguir nossa pesquisa, uma intuição de que esse dinamismo geométrico tem afinidade com as possibilidades de tratamento dinâmico de objetos geométricos quando estamos juntos a um *software* gráfico aberto.

Conjecturamos, também, a possibilidade de a uma variação epistemológica corresponder uma potencialidade pedagógica. Os autores lidos nos levam a intuir a importância de se pesquisar de que maneira modos distintos de geometrizar renovam objetos e focos, objetivos e possibilidades e esquemas conceituais e métodos, especialmente em relação à tradição científica e escolar. Isso nos permite projetar que uma pedagogia geométrica significativamente distinta da que vemos mais usualmente em nossas escolas pode tomar corpo e se tornar interessante curricularmente.

Referências

BACHELARD, G. **O novo espírito científico.** Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1968.

BILAC, C. U. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do cabri-géomètre**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

EUCLIDES. **Os elementos**. Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FERNANDES, N. C. (Trad.). **O programa de Erlangen de Félix Klein** (considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas). São Paulo: Ifusp, 1984.

KLEIN, F. O programa de Erlangen. In: FERNANDES, N. C. (Trad.). **O programa de Erlangen de Félix Klein** (considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas). São Paulo: Ifusp, 1984.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on Mathematical Meanings**: learning culture and computers. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Traduzido por Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.