http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p1

Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática[1]

Questions épistémologiques et cognitives, avant d'entrer dans une classe de mathématiques[2]

Raymond Duval[3]
duval.ray@wanadoo.fr

Tradução de Méricles Thadeu Moretti[4]
mthmoretti@gmail.com

Resumo

Há duas questões cruciais nas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de matemática: a primeira refere-se ao que caracteriza uma atividade matemática em relação aos outros tipos de atividades científicas ou intelectuais; e a segunda trata do que é compreender matemática e, desse modo, versa sobre os critérios que permitem saber se foi compreendida. As respostas que se dão a essas questões determinam as escolhas que se fazem na organização do ensino de matemática aos alunos com idade entre 6 e 16 anos, e também nas atividades em sala de aula para a aquisição de objetivos visados ao fim de um ciclo[5]. As respostas não são somente matemáticas, mas cognitivas, uma vez que os alunos, em sua grande maioria, esbarram em dificuldades de compreensão que não conseguem superar e que não existem em outros domínios do saber. Tais dificuldades têm origem no fato de que as condições epistemológicas e cognitivas de acesso aos objetos estudados em matemática são radicalmente diferentes das condições de acesso aos objetos estudados em outras disciplinas. A noção de registro de representação semiótica foi elaborada para poder analisar o desempenho cognitivo específico que a atividade matemática exige e no qual é preciso penetrar para poder compreender matemática. Neste artigo, propomo-nos a explicar, da maneira a mais completa possível, o que são os registros de representação semiótica. Para tanto, iremos responder às três questões que toda introdução de uma nova noção suscita: *O que é...? Por que...? Como utilizar...?* Para a primeira questão, partiremos da exigência epistemológica fundamental de jamais confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado, e, ainda, levar em consideração os diferentes tipos de sistemas que produzem as representações. Em relação à segunda questão, evidenciaremos o afastamento que existe entre as abordagens didáticas que não levam em conta a singularidade das condições epistemológicas e cognitivas de acesso à matemática e uma abordagem da atividade matemática em termos de registros. No caso da terceira questão, partiremos do fato de que em matemática não são as representações semióticas as importantes, mas as suas transformações. Distinguiremos, assim, dois princípios de análise: um que se funda na comparação dos conteúdos específicos das representações produzidas em dois registros diferentes; e o outro, nas possibilidades de transformações específicas em cada registro. A análise cognitiva, em termos de registro do que é compreender matemática, trata da face oculta da atividade matemática, e não da face exposta da matemática, que é a única realmente considerada na organização dos programas e das atividades em sala de aula. Essa análise nos conduziu ao que chamamos de patamares cognitivos de compreensão na aprendizagem da matemática, que permitem definir os fatores e as tarefas para fazer com que os alunos possam ultrapassar tais patamares. A noção de registro suscita uma questão: trata da maneira como as representações, semióticas e não semióticas, icônicas e não icônicas, simbólicas e verbais, remetem aos objetos que representam. Para responder a isso, devemos distinguir três tipos de objetos em função dos seus modos cognitivos de acesso, que são radicalmente diferentes. Além do mais, nenhum desses três tipos de objeto deve ser confundido com o que chamamos de "objetos

[1] No anexo encontra-se o texto produzido originalmente, em francês.
[2] Dans l'annexe le texte en français.
[3] Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale, França.
[4] Professor do PPGECT/UFSC e visitante da UEPG.
[5] Um ciclo no sistema de ensino francês compreende, a partir do ensino maternal, três anos. São os três ciclos de três anos para o ensino equivalente aos nove anos do ensino fundamental no Brasil.

fenomenológicos”; quer dizer, aqueles que são reconhecidos de imediato, no primeiro um quarto de segundo. Eles podem variar de um indivíduo a outro. Concluiremos com uma terceira questão, que é igualmente crucial para as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática: no que a matemática contribui para o desenvolvimento intelectual da criança e do pré-adolescente, com idades entre 6 e 16 anos?

Palavras-chave: Autonomia intelectual; Conteúdo de uma Representação; Registro; Relação de Referência; Sistema Produtor de Representação; Sistema Semiótico.

Résumé

Il y a deux questions cruciales pour toutes les recherches sur l’enseignement et sur l’apprentissage des mathématiques. La première porte sur ce qui caractérise l’activité mathématique par rapport aux autres types d’activité, scientifiques ou intellectuels. La seconde porte sur ce qu’est « comprendre » en mathématiques et, donc, sur les critères qui permettent de savoir si l’on a compris. Les réponses que l’on donne à ces deux questions déterminent les choix que l’on fait dans l’organisation d’un enseignement des mathématiques pour tous les élèves de 6 à 16 ans, aussi bien à l’échelle des activités en classe qu’à celle des objectifs d’acquisition visés en fin de cycle. Les réponses ne sont pas seulement mathématiques, mais aussi cognitives. Car les élèves, dans leur grande majorité, se heurtent à des difficultés de compréhension qu’ils ne parviennent pas à surmonter, et qui n’existent pas dans les autres domaines du savoir. Ces difficultés viennent de ce que les conditions épistémologiques et cognitives d’accès aux objets étudiés en mathématiques sont radicalement différentes de conditions d’accès aux objets étudiés dans les autres disciplines. La notion de registre de représentation sémiotique » a été élaborée pour pouvoir analyser le fonctionnement cognitif spécifique que toute activité mathématique exige et dans lequel il faut entrer pour pouvoir comprendre les mathématiques. Dans cet article, nous nous proposons d’expliquer de la manière la plus complète et la plus précise possible ce que sont les registres de représentation sémiotique. Pour cela nous nous allons répondre aux trois questions que toute introduction d’une nouvelle notion soulève : *Qu’est-ce que… ? Pourquoi… ? Comment l’utiliser... ?* Pour la première question, nous partirons de l’exigence épistémologique fondamentale de ne jamais confondre le contenu d’une représentation avec l’objet représenté et il nous faudra aussi prendre en compte les différents types de systèmes qui produisent des représentations. Pour la seconde question, nous mettrons en évidence le clivage entre les approches didactiques qui ne prennent pas en compte la singularité des conditions épistémologiques et cognitives d’accès aux mathématiques et une approche de l’activité mathématique en termes de registres. Pour la troisième question, nous partirons du fait qu’en mathématiques ce ne sont pas les représentations sémiotiques qui sont importantes, mais leurs transformations. Nous distinguerons alors deux principes d’analyse, l’un qui se fonde sur la comparaison des contenus respectifs de représentations produites dans deux registres différents, et l’autre sur les possibilités de transformations spécifiques à chaque registre. L’analyse cognitive, en termes de registres, de ce qu’est « comprendre » en mathématiques porte sur la face cachée de l’activité mathématique, et non pas sur la face exposée des mathématiques qui est la seule réellement prise en compte dans l’organisation des programmes et dans celle des activités en classe. Elle conduit à distinguer deux seuils cognitifs de compréhension dans l’apprentissage des mathématiques. Elle permet aussi de définir les facteurs et les tâches pour faire franchir ces seuils aux élèves. La notion de registre soulève une question corollaire. Elle porte sur la manière dont les représentations, sémiotiques ou non sémiotiques, iconiques ou non iconiques, symboliques ou verbales, renvoient aux objets qu’elles représentent. Pour répondre, nous devrons distinguer trois types d’objets en fonction de leurs modes cognitifs d’accès qui sont radicalement différents. Et, surtout, aucun de ces trois types d’objet ne doit être confondu avec ce que nous appellerons les « objets phénoménologiques », c’est-à-dire ceux qui sont reconnus d’emblée au premier quart de seconde. Ils peuvent varier considérablement d’un individu à l’autre. Nous conclurons en posant une troisième question, qui est également cruciale pour toutes les recherches sur l’enseignement et sur l’apprentissage des mathématiques. Qu’apportent les mathématiques au développement intellectuel de chaque enfant et préadolescent entre 6 et 16 ans ?

Mots clés: Autonomie intellectuelle ; Contenu d’une Représentation ; Registre ; Relation de Référence ; Système Producteur de Représentations ; Système Sémiotique.

Introdução

Duas questões orientam as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática:

Q.1 O que significa “fazer matemática”?

Q.2 O que significa “compreender matemática”?

Essas questões não estão, de fato, na ordem do dia das pesquisas em educação matemática, uma vez que, do ponto de vista matemático, as respostas são inerentes à prática e ao pensamento matemático. Só que seria unicamente do ponto de vista matemático que essas duas questões poderiam ser respondidas, com outros pontos de vista sendo-lhes subordinados. Em particular, o recurso ao ponto de vista cognitivo irá limitar-se às condições gerais de aquisição de conhecimentos a ser considerados na organização de atividades de aprendizagem em sala de aula.

No entanto, essas duas questões impõem-se como questões cruciais no ensino de matemática para os alunos com idade entre 6 e 16 anos, uma vez que esse ensino encerra dificuldades de compreensão não observadas em outras disciplinas. E isso nos leva a formular estas duas questões, não mais do ponto de vista matemático, mas do ponto de vista cognitivo:

Q.1’ Quais são os processos cognitivos necessários para se “fazer matemática”?

A atividade matemática mobiliza processos cognitivos não operados em outras disciplinas. Dizer que “fazer matemática é o mesmo que resolver problemas” é falacioso; omite-se uma palavra importante, resolver *matematicamente*! Ora, a maioria dos alunos, quando estão diante de um problema, não sabe o que fazer. Dito de outro modo, fazer matemática requer compreensão em matemática, caso contrário não se pode pesquisar nem mesmo controlar, por si mesmo, a pertinência do que se faz.

Q.2’ Quais são os fatores cognitivos no desenvolvimento da compreensão em matemática?

Toda teoria em “Educação Matemática” deve ser traduzida em termos de variáveis didáticas para a organização de situações de aprendizagem, para conduzir verdadeiramente a maioria dos alunos a compreender matemática e para que, desse modo, eles possam utilizar por si mesmos conhecimentos matemáticos.

Com o objetivo de responder às questões Q.1 e Q.2 do ponto de vista cognitivo, e não somente do ponto de vista matemático, é que introduzimos a noção de “registro”, ou, mais precisamente, a noção de **registro de representação semiótica** (DUVAL, 1995).

Essa noção manifestou-se quando procuramos descrever os processos cognitivos utilizados na atividade matemática (**Q.1’**) a partir da maneira matemática de formular e de resolver problemas, e em relação à observação regular de alunos quando da resolução de problemas. De fato, para analisar do ponto de vista cognitivo a atividade e o pensamento matemático, tais e quais se podem observar na diversidade de condutas de pesquisa, de definição e de prova, *tivemos de considerar três características*. Todas essas produções são *semióticas*, *representações de objetos* que não são acessíveis perceptivamente, mas apenas semioticamente. Entretanto, essas duas características, evidentes, não são suficientes para descrever o funcionamento cognitivo do pensamento matemático, nem a maneira de trabalhar em matemática. Temos de introduzir a noção de "registro", um sistema semiótico cujo poder para criar novas representações semióticas é ilimitado. O pensamento e a atividade matemática dependem totalmente da sinergia entre registros, que têm possibilidades cognitivas heterogêneas. Querer descrevê-los recorrendo à noção clássica, mas equivocada, de conceito e às noções conexas de "conceitualização", "abstração" ou "representação mental" leva a um impasse. Do mesmo modo, fundamentando inteiramente a análise das representações semióticas na noção de "sistema semiótico", e não sobre signo, fomos levados a rejeitar as oposições dualistas entre material e mental, entre externo e interno, entre significante e significado para caracterizar e analisar a produção das representações semióticas: elas não permitem que se considere o caráter fundamental semiótico do trabalho matemático. A noção de registro permitiu-nos identificar os fatores decisivos que levam a ultrapassar o que chamamos de os dois patamares de compreensão em matemática (**Q.2'**), os quais permitem que se organizem atividades específicas independentes da aquisição e da aplicação de conhecimentos matemáticos. Essas atividades dependem, de fato, do patamar de compreensão a ser transposto. As atividades relativas ao primeiro patamar visam desenvolver a sinergia entre dois registros de tal modo que desapareçam as dificuldades de compreensão que têm origem no não reconhecimento de um mesmo objeto em duas representações semióticas distintas. As atividades relativas ao segundo patamar visam à conscientização do funcionamento cognitivo próprio de cada um dos registros, uma vez que esses registros podem não permitir que se efetuem os mesmos tratamentos matemáticos, ou seja, os procedimentos matemáticos de exploração heurística, de modelização dos dados, de prova ou de cálculo. Isso, evidentemente, exigiu buscas específicas para cada um dos registros, em particular para os registros que chamamos de multifuncionais. Assim, a noção de registro é um instrumento de observação e de análise dos fenômenos de compreensão e de incompreensão na aprendizagem de matemática, qualquer que seja o domínio de matemática ensinado. Isso quer dizer também que é um instrumento de avaliação não das produções dos alunos, mas dos problemas de aprendizagem atribuídos aos alunos e de questões propostas em enquetes de avaliação. A análise da atividade matemática em termos de registros é uma análise cognitiva, e não semiótica. Isso significa que a análise trata dos objetos do conhecimento que são estudados em uma disciplina. Três questões são então essenciais: quais são os meios de acesso aos objetos estudados? Quais são os meios de exploração das suas propriedades? Quais são os critérios da prova? A importância e o papel das representações semióticas em matemática devem ser analisados em relação a essas três questões.

A importância dada às representações semióticas e à necessidade da sua diversidade na aprendizagem matemática foi incluída na noção de registro quando a introduzimos. No entanto, *a análise do funcionamento cognitivo necessário, que a noção de registro torna possível para a atividade matemática e para os fatores do seu desenvolvimento,* foi ignorada. Essa noção, que em geral é assimilada à noção de representação, suscitou muitas questões. Paralelamente, a relação das representações semióticas aos objetos matemáticos foi interpretada em termos das oposições dualistas entre material e mental ou entre significante e significado. Em outras palavras, *retira-se totalmente a questão da acessibilidade ao objeto matemático*, atendendo, dessa forma, a uma problemática cognitiva falsa, na qual as representações seriam entendidas a partir dos conceitos matemáticos e seriam representações mentais, e não semióticas. Essas duas inobservâncias vêm dos fatos de que as questões **Q.1** e **Q.2** não são postas nas pesquisas sobre o ensino de matemática porque são reservadas aos matemáticos e de que seria unicamente do ponto de vista matemático que se poderia respondê-las.

Neste artigo iremos retomar as noções de registro e de objeto, fundamentais para compreender do ponto de vista cognitivo, e não matemático, que as formas de pensar e trabalhar em matemática são radicalmente diferentes daquelas praticadas em outros domínios do conhecimento, uma vez que, tanto nas pesquisas sobre a aprendizagem de matemática quanto no conjunto das dificuldades intransponíveis de compreensão nas quais a maioria dos alunos se bate sistematicamente, o ponto de vista cognitivo sobre a matemática é tão fundamental quanto o ponto de vista matemático. Iremos, a seguir, responder às questões “O que é um registro?” e “Qual é a diferença entre objeto e referência?”.

A primeira questão, como qualquer questão do tipo “O que é...?” não pode ser separada de duas outras que a enquadram: “*Por que a noção* de registro se impõe*?*” e, sobretudo, “*Como utilizá-la*?”. A segunda questão, essencial na análise do conhecimento, em matemática é inseparável da questão “Como uma representação semiótica refere-se ao objeto que representa?”. Aqui nós fusionamos essas questões em “Qual é a diferença entre objeto e referência?”.

Neste artigo iremos retomar essas três indagações sobre os registros e o objeto matemático. Formulamos as respostas a essas três primeiras questões em doze proposições, destacadas no texto: as proposições P.1 a P.6 abrangem todos os sistemas semióticos; e as proposições P.5' a P.10 tratam dos registros, quer dizer, dos sistemas semióticos, e não da função social da comunicação. Fizemos essa escolha para que o leitor pudesse ter como referência interna uma visão do conjunto de diferentes distinções que são necessárias para a análise cognitiva da atividade e do pensamento em matemática. Assim, para compreender a importância do primeiro patamar de compreensão matemática e para saber como fazer que os alunos o ultrapassem, é preciso ter presentes no espírito as proposições P.1, P.3, P.4, P.7 e P.10 ou lê-las em sequência. Do mesmo modo, para compreender o que caracteriza as representações semióticas, é preciso ler juntas P.4 e P.6.

Anotamos as respostas à quarta questão em seis proposições: as três primeiras referem-se aos diferentes objetos do conhecimento e são apontadas, respectivamente, por ***OPER, OSCI, OMAT***; as três outras proposições tratam dos objetos fenomenológicos e são notadas por ***OPH.1***, ***OPH.2*** e ***OPH.3***, uma vez que é essencial não confundir o objeto do conhecimento com o objeto fenomenológico.

Cada uma dessas proposições chama, evidentemente, por um exemplo de análise para cada uma das proposições que possibilite que se vejam e se compreendam os mecanismos de análise que a conduziram. Todos esses exemplos foram publicados em trabalhos anteriores e são reunidos em um livro publicado recentemente (DUVAL, 2011a), a que faremos referência utilizando a abreviação do título da obra, "VER...". Cada uma das vinte referências que encontramos com essa abreviação remete a uma figura que é uma comparação de fotos, de desenhos, de esquemas, de figuras geométricas ou gráficas. Compreendemos que não poderíamos reproduzi-las sem transformar este artigo em um livro.

I. O que é um registro de representação semiótica

Não se pode compreender o que é um *registro* se não compreendermos o que é uma *representação* e se, em seguida, não percebermos no que as representações *semióticas* são irredutíveis às representações não semióticas.

I.1 A exigência epistemológica fundamental: não confundir representação e objeto representado

Basta trocar a palavra **representação** pela palavra **imagem** para notar os dois problemas que provocam as representações. Como as representações podem ser diferenciadas dos objetos que representam? E qual é a natureza da relação entre a representação e o objeto representado?

Para responder à primeira questão, partimos de duas observações:

- a primeira é a imagem de um objeto em um espelho ou em qualquer outra superfície perfeitamente plana que permite refletir. A imagem pode ser perfeitamente semelhante ao objeto representado e, desse modo, como há duas representações aparentemente idênticas, é difícil dizer qual é o reflexo e qual é a imagem (VER..., p. 17, Fig. 1); e
- a segunda observação é a célebre montagem fotográfica realizada por Kosuth em 1965 (VER..., p. 43, Fig. 1, e p. 44, Fig. 2). O princípio da montagem é o de justapor o objeto e as representações desse objeto: uma cadeira sobre a qual se pode sentar, uma fotografia dessa cadeira e um texto que descreve a cadeira. Podemos ainda acrescentar a isso outras representações, como o esquema que mostra como juntar as diferentes peças de uma cadeira.

Esses dois tipos de observação nos conduzem às proposições seguintes.

P.1 Existem muitas representações possíveis diferentes para um mesmo objeto, no entanto não existem muitos objetos diferentes para uma mesma representação.

P.2 Existem tantas representações diferentes possíveis de um objeto quanto há sistemas que permitem reproduzir as representações.

P.3 Duas representações DE UM MESMO OBJETO produzidas por dois sistemas distintos têm CONTEÚDOS diferentes que podem até não ter semelhança alguma com o objeto representado.

As duas primeiras proposições fornecem os critérios que permitem distinguir uma representação do objeto representado. A terceira remete à situação paradoxal que despertam todas as representações, uma vez que diferentes representações podem não ter algo perceptivamente em comum. Kosuth havia formulado o paradoxo cognitivo que as representações criam por meio da legenda "Uma ou três cadeiras?".

A segunda questão trata da natureza da relação entre uma representação ou, mais exatamente, o seu conteúdo (P.2) e o objeto que representa. Para responder a esta pergunta é preciso comparar o modo de produção da representação que é inerente ao sistema que a produziu (P.3). Essa comparação permite identificar dois tipos de relações contrárias entre si, que dependem do fato de que o sistema utilizado para produzir a representação é um sistema físico, um órgão receptor ou, ao contrário, um sistema semiótico (VER..., p. 134, Fig. 13):

- uma vez que as representações resultam da ação de um objeto sobre um sistema físico (telescópio, espectrômetro, máquina fotográfica, etc.) ou sobre um órgão sensorial (superfície refletora, captador, os diferentes sentidos), a relação entre o objeto e a representação é *uma relação de causalidade*. A produção das representações é, dessa forma, AUTOMÁTICA e sem algum uso perceptível de tempo;
- quando as representações são produzidas independentemente de qualquer ação de um objeto em um sistema físico, como é o caso de todas as representações semióticas (fala, escrita, desenho), a produção de representações é, então, INTENCIONAL e exige um trabalho de elaboração que leva um lapso de tempo mais ou menos longo. A relação entre o conteúdo da representação e o do objeto representado é invertida, sem que haja impacto de um sobre o outro. Essa relação inversa e desconectada é uma **relação de referência** (DUVAL, 2015c, p. 125-126).

Em outras palavras, a relação entre uma representação e o objeto representado é uma relação real quando o sistema que produz a representação é um sistema físico ou um receptor sensorial. Entretanto, quando o sistema utilizado é um sistema semiótico, não existe nenhuma relação real entre a representação e o objeto representado. Isso se dá pelo fato de que o conteúdo da representação é resultado de uma elaboração intencional. A relação de referência, característica das representações semióticas, provoca, desse modo, dois problemas:

- o problema epistemológico da existência do objeto representado – uma vez que a relação de referência pode ser uma relação vazia, o objeto representado pode ser, por exemplo, um objeto impossível, como os desenhos de Escher, que ilustram essa situação maravilhosamente; e
- o problema cognitivo do reconhecimento do objeto representado – esse problema impõe-se, ao menos, para todas as representações que não têm alguma semelhança perceptível com o objeto representado, como as palavras, signos escritos (letras, números, símbolos de operação), mas isso também se instala em desenhos que parecem ter semelhanças com objetos do mundo real. Daí a questão: *o que é que no conteúdo de uma representação semiótica permite reconhecer o objeto representado*?

I.2 Semiótica: não há signos sem um sistema de signos

Diferentemente da palavra “representação”, a palavra “signo” é normalmente usada para se referir ao usado para comunicar. Isso vale para todos os “sinais” emitidos para transmitir uma informação, até que se atinjam todas as marcas fixadas utilizadas para “transcrever” a linguagem: hieróglifos, alfabetos. O uso de signos é intencional, quer dizer, depende de uma escolha de certos signos, entre outros possíveis, para compor uma mensagem, um enunciado, um desenho. Nesse sentido, a definição de signo como “sendo algo que está no lugar de alguma coisa (*something that stands to somebody*)”[6] não possui a característica essencial dos signos, visto que o que está no lugar de outra coisa não são os signos, mas uma sequência de signos composta de uma lista básica de signos. Quando falamos de signos e semiótica, há três ideias centrais a ser consideradas.

A primeira ideia leva a não olhar os signos independentemente um do outro, mas na qualidade de que constituem conjuntos específicos utilizados para preencher as funções de comunicação, de organização ou de tratamento da informação, objetivação daquilo que ainda não se havia tomado consciência.

> **P.4** Os signos só são signos por suas relações de oposição a outros signos no interior de um sistema de oposição.

O sistema binário ou o código booleano é o sistema semiótico mais elementar. Para cada posição sucessiva não há mais do que duas escolhas possíveis. Em contraste, no sistema decimal há dez escolhas possíveis para cada uma das posições sucessivas. Na sequência de “11”, o “1” não é o mesmo dígito segundo o sistema de numeração utilizado. É por essa razão que todos os sistemas de numeração em base *n* são sistemas semióticos (VER..., p. 30, Fig. 7). As línguas são os sistemas semióticos mais complexos que existem. Por exemplo, mesmo o vocabulário básico assenta-se em duplas antonímias: {ganhar, perder}, {alto, baixo}, etc. (VER..., p. 126).

A segunda ideia-chave é importante tanto do ponto de vista epistemológico quanto do matemático, uma vez que permite que se compreenda o que constitui a originalidade e o modo de funcionamento do conhecimento em matemática.

> **P.5** Os sistemas de signos permitem que se efetue uma operação que se mostra cognitivamente poderosa: SUBSTITUIR SIGNOS OU AGRUPAMENTO DE

[6] Essa definição de Peirce leva a confundir o fenômeno físico e cognitivo de representação com os fenômenos relativos à comunicação (VER..., p. 32).

> SIGNOS independentemente dos objetos mencionados e UNICAMENTE EM FUNÇÃO DE REGRAS.

Em outras palavras, os sistemas de signos permitem executar um tipo de operação que não é física nem conceitual, e nem mental, que chamamos de OPERAÇÃO SEMIÓTICA (VER..., p. 26, Fig. 5). A substituição de signos ou de agrupamento de signos é uma operação matemática fundamental. Assim, as operações de cálculo são fundamentalmente operações semióticas de substituição cujo poder depende do sistema numérico utilizado (VER..., p. 45, Fig. 3).

A terceira ideia-chave refere-se ao conteúdo das representações produzidas quando da utilização de um sistema semiótico, pois que a produção de representação semiótica implica *sempre diversas escolhas entre as unidades de sentido possíveis* para constituir, por exemplo, uma expressão numérica ou uma frase que descreve um estado, uma relação ou uma operação (P.4).

> **P.6** Ao contrário das representações não semióticas, o conteúdo das representações semióticas é analisado EM UNIDADES DE SENTIDO E QUE SE ARTICULAM EM DIVERSOS PATAMARES DE ORGANIZAÇÃO, as unidades de sentido mudam de um patamar de organização a outro.

Essa proposição fornece um primeiro elemento de resposta ao problema cognitivo de reconhecimento do objeto representado pelo conteúdo de uma representação semiótica: é apenas a partir de unidades de sentido articuladas em ao menos dois patamares de organização que se pode reconhecer o objeto representado por uma representação semiótica. *De um ponto de vista cognitivo, isso requer que se consiga discriminar todas as unidades de sentido que se fundem em uma representação semiótica*. Tomemos o exemplo mais trivial de uma frase simples, que, sem proposição subordinativa, comporta:

- o nível de unidades de sentido, que são as palavras (substantivos e adjetivos) que se articulam em sintagmas;
- os sintagmas nominais e verbais, que se articulam em uma frase (uma proposição enunciada); e
- uma proposição enunciada, que se articula com outra proposição em uma progressão de descrição, de uma narração, de um raciocínio ou de uma explicação.

Essa análise pode parecer ir no sentido contrário ao da intuição, uma vez que, quando falamos, se tem a impressão de que é ao contrário do que se passa. Observa-se isso quando, por exemplo, se responde a uma pergunta ou quando uma pergunta é feita: as palavras parecem vir espontaneamente, sem que sejam percebidas, para dizer o que se quer dizer. E elas formam um todo indivisível para aquele que fala e no momento que fala. Esse todo indivisível é de uma frase que corresponde a "uma única transmissão de voz". O interlocutor, ao contrário, não retém esse todo indivisível, que percebe sucessivamente em duas ou três palavras, aquelas que despertam nele associações imediatas e que, muitas vezes, não tem relação com o que o orador quer dizer. Essa situação muda completamente quando se trata de redigir um enunciado ou um texto de descrição para explicar ou até mesmo para contar. Quando se trata de descrever um enunciado ou texto, a produção das frases resulta de um trabalho mais ou menos explícito de escolhas possíveis de palavras para designar os objetos de que se fala, os quais se pode mostrar com o dedo dizendo "isto aqui", como em uma conversação. E isso pode rapidamente se tornar um obstáculo que paralisa ou conduz ao uso de expressões ambíguas ou falsas. No ensino de matemática isso aparece cada vez que se solicita a descrição de uma mensagem de instruções para explicar a construção, mesmo muito simples, de uma figura geométrica.

I.3 Registros: os diferentes sistemas semióticos utilizados em matemática para calcular, demonstrar ou modelizar

Sistemas semióticos foram inicialmente desenvolvidos e utilizados, principalmente, para comunicar e transmitir informações. Nesse sentido, e somente nesse sentido, podem-se assimilar os códigos e linguagens. Os sistemas semióticos também foram desenvolvidos para cumprir outra função psíquica fundamental, *a objetivação*, como evidenciam as pinturas rupestres de dezenas de milhares de anos. A objetivação é uma exteriorização que permite desenvolver a significação dos objetos quando ainda não se possuía consciência antes da sua objetivação semiótica. Mas os sistemas semióticos permitem, igualmente, preencher a função de tratamento que é cognitiva e epistemologicamente fundamental para o desenvolvimento do pensamento e do conhecimento. Essa função depende inteiramente das operações semióticas de substituições possíveis de ser efetuadas, dado que permitem produzir e provar novos conhecimentos a partir de dados iniciais tomados como hipótese (P.5). *A utilização de sistemas semióticos preenche de forma exclusiva a função epistemológica e cognitiva de tratamento, e jamais a função de comunicação*. Dessa forma, os sistemas semióticos são escolhidos e desenvolvidos em relação à potencialidade e à diversidade das operações semióticas de substituição que podem ser efetuadas. Podemos dizer que os registros são sistemas semióticos que cumprem a função de tratamento, independentemente da função de comunicação.

Distinguimos quatro tipos de registros. Há, primeiramente, dois tipos que podem produzir *expressões*, ou seja, organizações lineares de unidades (palavras, letras, números, símbolos de relação, etc.) em função de regras sintáticas: as declarações em língua natural e as equações, as fórmulas escritas que combinam letras de variáveis, símbolos de operações e um símbolo relacional. Há, depois, dois tipos de registros que correspondem aos *dois tipos de visualização das relações entre conjuntos de elementos*: a visualização geométrica e a visualização analítica em sistemas de coordenadas. Opõem-se, assim, os registros que produzem representações discursivas e os que produzem a diversidade de representações visuais 2D/2D (VER..., p. 118, Fig. 6).

Podemos também olhar para essa classificação dos pontos de vista cognitivo e didático. Há, primeiramente, os dois tipos de registros que são comumente mobilizados em todas as áreas do conhecimento: a linguagem natural e a visualização que se baseia no reconhecimento perceptivo de formas enquanto contornos fechados e no reconhecimento de suas relações topológicas (VER..., p. 87, Fig. 5). São esses dois tipos que são mobilizados na matemática que é ensinada nas cinco primeiras séries do ensino fundamental. Os outros registros são, ao contrário, específicos da matemática. O desenvolvimento da matemática e a álgebra e análise nos séculos XVI e XVII mostram uma verdadeira revolução semiótica (VER..., p. 24-25). São estes registros utilizados nos últimos anos do ensino fundamental para aprender a resolver equações, para instrumentalizar a resolução de problemas e para introduzir o conceito de funções.

Essa distinção dos quatro tipos de registros que são utilizados em matemática para calcular, demonstrar ou modelizar os fenômenos observados leva à segunda ideia-chave intrínseca à noção de sistema semiótico:

> **P.5’** Cada registro oportuniza uma operação de substituição que lhe é específico e que outros registros não podem fazê-lo.

Há, dessa maneira, quatro tipos de operações semióticas de substituição. As mais evidentes são aquelas que qualificamos como “cálculo”, nas quais se substitui uma expressão por outra, seja expressão numérica, literal ou algébrica. Assim, Condillac dedicou um livro inteiro, *Le langage des calculs* (1798)[7], para explicar os limites intransponíveis da língua

[7] Publicação póstuma.

natural em termos de capacidade de memória para executar operações aritméticas, as mais elementares, e, desse modo, apontar a necessidade do uso não só de sistemas de numeração, mas da escrita literal e algébrica nos cálculos.

Para as demonstrações a língua natural foi, desde os *Elementos de Euclides*, o registro de referência e manteve-se em *Os fundamentos da geometria de Hilbert* (1899). Evidentemente não se raciocinava nem se argumentava como Voltaire fazia no *Tratado sobre a tolerância* (1763) para defender a inocência de Jean Calais (DUVAL, 1993, p. 42, 47), nem como se pode fazer em alguma discussão sobre alguma questão social. Enquanto a argumentação funciona por acumulação de argumentos e de dados, o raciocínio dedutivo funciona por substituição de proposições segundo o esquema *modus ponens*.

Os dois registros de visualização mobilizam dois tipos de substituição diferentes. A utilização heurística de figuras em geometria consiste em visualizar, na figura dada, as hipóteses do problema em outra figura, que é uma reorganização enriquecida ou não da figura inicialmente dada (VER..., p. 89, Fig. 6). A utilização mais experimental dos gráficos cartesianos é, contrariamente, um *zoom* sobre partes da curva ou de retas traçadas em um plano definido por dois eixos graduados. Consiste em substituir, em uma primeira graduação de eixos, uma graduação mais fina (VER..., p. 107, Fig. 1). Dessa maneira, a segunda graduação substitui diversos segmentos de retas ou diversos arcos de curvas, semelhantes ou diferentes ao segmento ou ao arco de curva determinado pela primeira graduação. Mas, diferentemente de outras substituições, o *zoom* exige que se retorne à equação correspondente, quer dizer, a outro registro, para calcular as novas coordenadas.

A questão da distinção das unidades de sentido que possibilita reconhecer, a partir do conteúdo de uma representação, qual é o objeto representado põe-se, de maneira diferente, para as representações produzidas por um registro ou que são produzidas por outros sistemas semióticos, uma vez que as unidades de sentido dependem de uma operação *semiótica de designação que se reporta*, indiferentemente, a um objeto ou a um grupo de signos (termos quantificados, letras de variáveis e números articulados por um símbolo de operação). Isso nos leva a reformular a terceira ideia-chave intrínseca à noção de sistema semiótico:

> **P.6’** As unidades de sentido que permitem reconhecer a que o conteúdo de uma representação se refere são aquelas resultantes das operações de designação específicas em cada registro.

Isso nos leva a distinguir nas representações discursivas o plano das *expressões* *incompletas* e das *expressões completas*, que possuem unidades de sentido radicalmente diferentes. As expressões incompletas são as unidades de sentido explicitamente construídas para designar alguma coisa. Poder-se-ia também chamá-las *unidades de sentido referencial*. No registro da língua natural elas correspondem a todos os sintagmas nominais (VER..., p. 78, Fig. 2). No registro da visualização geométrica as operações semióticas são as operações figurais (VER..., p. 87, Fig. 5). No registro da escrita simbólica de relações as expressões incompletas são designações funcionais, como, por exemplo, 2x ou x+2, e de sintagmas operatórios, como (x + 2) ou (x + 1) (x – 1). As expressões completas são proposições ou equações em que a unidade de sentido é caracterizada por um valor de verdade, de indecidibilidade, de tautologia, etc. No registro da visualização geométrica as unidades de sentido referencial são as unidades figurais, visto que o número de unidades figurais que se podem reconhecer em uma figura geométrica depende da escolha de uma das três maneiras possíveis de olhá-las (VER..., p. 87, Fig. 5). Nos registros da visualização gráfica as unidades de sentido são variáveis visuais qualitativas de um gráfico, e *estes valores só podem ser discriminados pelo jogo das oposições visuais* entre as diferentes posições e entre as orientações possíveis de uma reta ou de uma curva sobre os dois eixos (VER..., p. 111, Fig. 3).

A resposta à questão "O que é um registro" encontra-se nas proposições P.5 e P.6 em relação a todos os sistemas semióticos, e em P.5' e P.6 no caso dos registros. A diferença entre sistemas semióticos e os registros está no fato de que os primeiros são utilizados e desenvolvidos para preencher a função de comunicação, enquanto os registros são unicamente utilizados para calcular, deduzir, demonstrar e modelizar. Além disso, essa resposta pressupõe que se percebam a amplitude e a diversidade do que se chama "representação" (P.1, P.2) e que não se confundam as representações semióticas das representações não semióticas, quer dizer, dois tipos de relações contrárias entre o objeto representado e a sua representação. Essa resposta exige que duas observações sejam feitas:

- tomamos a liberdade de falar de "registros" ou da "teoria dos registros", que é uma abreviação cômoda nas discussões, mas que pode confundir, uma vez que interrompe toda a análise da amplitude da diversidade das "representações" e tende a desconhecer a diferença radical entre o conteúdo das representações e o objeto, como se os objetos matemáticos fossem acessíveis independentemente da produção das representações semióticas; e
- mesmo nos atendo a um só ponto de vista matemático, a noção de registro impõe-se para *poder descrever e analisar a maneira matemática de trabalhar*, pois que as

> análises da atividade matemática se utilizam de conceitos, de propriedades e de algoritmos, escondendo duas características fundamentais da atividade matemática: as formas de cálculo (numérico, algébrico, diferencial, lógico, etc.), que são transformações de representações semióticas em outras representações semióticas, e a modelização de fenômenos físicos, biológicos ou econômicos, que utilizam o registro de representação semiótica.

II Por que a noção de registro impõe-se?

Evidentemente levar em conta os registros e a análise da atividade matemática em termos de registros não tem interesse algum para os matemáticos, uma vez que o progresso do conhecimento matemático ocorre no momento em que novos resultados são estabelecidos, quer dizer, novos teoremas. Desse modo, considerar os registros não muda a forma de trabalhar, de fazer pesquisa em matemática. Se bem que matemáticos como Leibniz, Bolzano, Frege e Hilbert integraram reflexões sobre as representações semióticas aos seus modos de fazer matemática. Alguns, como Descartes, Leibniz e Frege, contribuíram até mesmo para o desenvolvimento de novos registros de representação.

Tudo muda quando se trata de ensinar matemática, sobretudo no caso do ensino para alunos com idade entre 6 e 16 anos. É nesse período que o aluno chega, ou deve chegar, a uma plena autonomia intelectual e, desse jeito, a uma plena confiança em suas capacidades não só de resolver problemas, mas de propô-los (DUVAL, 2013). E é o período em que o ensino não é diversificado em linhas conforme pré-orientações profissionais. A análise da atividade matemática em termos de registros mostra-se crucial para a organização de um ensino matemático que se enderece a todos os alunos com idade entre 6 e 16 anos. Três razões impõem-se. As duas primeiras relacionam-se às características da atividade matemática quando a estudamos dos pontos de vista epistemológico e cognitivo, e não somente matemático. A terceira razão diz respeito ao equívoco didático da linguagem em sala de aula.

II.1 O ponto de vista epistemológico: em matemática trabalhamos não mais do que com as representações semióticas

Lembremos que o termo "epistemologia" é um termo tardio, forjado no começo do século XX, que remonta ao primeiro trabalho de epistemologia em *Crítica da razão pura* (1789). Nesse livro Kant procurou explicar os desenvolvimentos totalmente diferentes da matemática (a geometria euclidiana e a aritmética) e a física (a física de Newton, sem nenhuma referência à física de Galileu)[8]. A epistemologia é essencialmente comparativa, mas, em uma relação mais ou menos direta com os desenvolvimentos da história da matemática e da didática, há uma epistemologia intramatemática que focaliza o desenvolvimento de algum conceito matemático particular no decorrer da história. Todos os trabalhos de epistemologia sobre os quais a educação matemática apoiou-se desde os anos 1970 revelam-se tratar de uma epistemologia intramatemática centrada na formação e na aquisição de conceitos: função, número negativo, vetores, etc. Ora, é somente comparando o que constitui uma descoberta em diferentes disciplinas, assim como os procedimentos de prova que estabelecem um novo conhecimento, que se pode ver que a matemática é o único domínio científico que opera de forma única e exclusiva com representações semióticas.

Limitemo-nos aqui ao que constitui uma descoberta nas disciplinas científicas que não seja a matemática. Pode-se afirmar que a utilização da luneta por Galileu, em 1609, para observar a Lua e o firmamento constituiu uma descoberta ao menos tão importante quanto a teoria de Newton, assim como a história das ciências, tanto em física quanto em biologia, quando da utilização do microscópio por Hook (1665), e a contínua invenção de instrumentos cada vez mais potentes para aumentar o campo perceptivo dos fenômenos e dos objetos observáveis. Em outros termos, são as representações não semióticas produzidas por instrumentos científicos a fonte de novas descobertas, que estão na base das provas em física. Evidentemente não há um instrumento científico que permita observar os objetos matemáticos, a começar pelos números.

Retomemos agora a montagem fotográfica de Kosuth. O seu princípio é justapor um objeto em suas diversas representações possíveis. Esse princípio pode servir de teste para uma análise epistemológica da atividade matemática. Podemos JUSTAPOR um objeto matemático, um número inteiro ou uma função afim, por exemplo, com as suas diferentes representações? Se olharmos os manuais escolares e, mais precisamente, os instrumentos pedagógicos, a resposta parece ser “SIM!”, porque se recorre sistematicamente à multirrepresentação justapondo sobre uma mesma página ao menos duas representações diferentes de um mesmo objeto. Então, nessa justaposição de apresentações diferentes de um mesmo objeto, qual delas corresponde ao objeto (VER..., p. 45, Fig. 3)? Na realidade, nenhuma delas, uma vez que do ponto de vista matemático o que pode ser considerado o objeto em si é o enunciado de uma definição, de um teorema, a expressão simbólica de uma relação que permite um cálculo, quer dizer, uma representação semiótica produzida em um

[8] Husserl, em seu célebre livro de 1936, *La crise des sciences européennes*, refere-se essencialmente à geometria euclidiana e à física de Galileu, e não à física de Newton.

dos dois tipos de registro discursivo. E não existe "intuição" dos objetos matemáticos em si mesmos – pode haver, talvez, para os matemáticos profissionais depois de muitos anos de experiência. Nos seus discursos o emprego da palavra "intuição" é puramente filosófico, e nem todos têm a mesma filosofia matemática! Aqui estamos em outro planeta, que não é o mesmo dos nove décimos dos alunos com idade entre 6 e 16 anos. Isso nos leva a formular a proposição epistemológica fundamental para a matemática:

> **P.7** Os objetos matemáticos são unicamente acessíveis por meio da produção de representações semióticas.

A matemática é a única disciplina em que se trabalha exclusivamente com representações semióticas, haja vista que não existe outro modelo de acesso aos objetos matemáticos. Isso põe a matemática em uma situação epistemológica que é totalmente diferente da das outras disciplinas científicas. O conhecimento matemático não se fundamenta em "a abstração", mas na mobilização de diferentes sistemas semióticos que são unicamente utilizados para preencher a função de tratamento, e não as funções de comunicação ou de objetivação.

II.2 O ponto de vista cognitivo: toda a atividade matemática mobiliza ao menos dois registros

Do ponto de vista matemático, um só registro é objetivamente necessário; as operações semióticas de substituição do registro permitirão justificar um procedimento que conduz a um resultado novo ou demonstrar uma conjectura (P.5'). Desde a revolução semiótica que se produziu em matemática nos séculos XVI e XVII, esse registro é um dos diferentes registros de cálculo: numérico, literal, algébrico, vetorial, diferencial ou integral, etc.

No entanto, existem alguns domínios que necessitam ser trabalhados em paralelo com dois registros diferentes, ou seja, fazer incessantes idas e vindas entre um registro discursivo e um registro de visualização. É o caso da geometria elementar ensinada no ensino fundamental, e também da noção de funções afins. A mobilização de um segundo registro acontece igualmente na modelização de dados, seja para colocar uma descrição verbal ou qualitativa dos dados do problema sob uma forma que permita um cálculo, seja para organizar os dados quantitativos relevantes em uma experiência. De qualquer forma, a possibilidade de mobilizar um segundo registro é necessária para que um problema possa ser resolvido, quer dizer, em qual registro a solução matemática pode ser obtida, ou para demonstrar uma conjectura. *De forma mais fundamental, os registros mobilizados não preenchem as mesmas funções cognitivas no desenvolvimento da atividade matemática.* Enquanto um permite efetuar a atividade matemática de resolução do problema, ou de demonstrar uma conjectura, os outros preenchem uma função heurística, ou permitem que se controlem intuitivamente a pertinência de resultados obtidos e a fiabilidade dos tratamentos efetuados.

A análise cognitiva da atividade matemática é a análise de todas as mudanças de registro que são constantemente requisitadas explícita ou implicitamente para que se possa compreender matemática e, mais ainda, para "fazer matemática" ou aplicar conhecimentos matemáticos. Concretamente, *mudar de registro é converter* um enunciado de um problema em uma igualdade numérica ou em uma equação (VER..., p. 127, Fig. 11), reconhecer em uma configuração geométrica qual propriedade utilizar, ou seja, qual definição ou teorema aplicar (VER..., p. 96, Fig. 12), ou reconhecer a forma de uma equação em uma representação gráfica (VER..., p. 110-111, Fig. 2 e 3). É essa mudança de registro que não é realmente levada em conta nas análises que se atêm, por um lado, a uma análise de conhecimentos matemáticos a ensinar feitos regressivamente em termos de pré-requisitos, pré-requisitos de pré-requisitos, e, por outro lado, por meio de modelos gerais de aquisição de conhecimento que seriam válidos para todos os domínios do conhecimento: modelos neoconstrutivistas, pragmatistas ou interacionistas. Ora, a mudança de registro que deve ser mais ou menos espontânea, sob pena de bloquear qualquer saída do aluno, é o primeiro grande obstáculo à compreensão em matemática, uma vez que esbarra na impossibilidade epistemológica e, em seguida, cognitiva de não confundir as representações utilizadas e o objeto matemático representado (I.1).

Não confundir o objeto representado e uma de suas diferentes representações é evidente para um objeto que se pode perceber (P.1). Isso não causa muita dificuldade quando se usa um instrumento que aumenta o campo perceptivo ao infinitamente pequeno ou ao infinitamente grande em relação à causalidade que liga a imagem obtida com instrumento ao que é emitido do próprio objeto, ao menos até certas escalas de grandeza. Assim, pode-se ver ou saber qual é o relevo da lua, parecido com o relevo da terra, com uma luneta de aumento análoga àquela utilizada por Galilei. Em contrapartida, quando os objetos matemáticos que são acessíveis por meio da produção de representações semióticas, por exemplo, como uma sequência ordenada de palavras que se pode pôr em correspondência com pequenas coleções de objetos para que se possa ter acesso aos primeiros números naturais, a situação muda radicalmente, visto que há tantas representações diferentes, quer dizer, conteúdos apresentados, quanto sistemas semióticos utilizáveis (P.3) e, portanto, tantos objetos diferentes quanto conteúdos diferentes.

A atividade de conversão é cognitivamente impossível, uma vez que só pode ser feita em relação a qualquer coisa que serve de referência invariável. Em outros termos, existe um enclausuramento entre representações possíveis de um mesmo objeto, o que exclui a possibilidade de reconhecer em um conteúdo outro que aquele que serviu inicialmente para introduzi-lo.

II.3 O duplo equívoco didático na utilização, do ensino fundamental ao médio, da linguagem natural em sala de aula

A língua natural é um registro, do mesmo modo que os sistemas de escrita simbólica que constituem os diferentes registros de cálculo, mas há um equívoco didático no seu emprego na aquisição de conhecimentos matemáticos. Essa questão é muito mais crucial que a dos anos de 1970 aos anos de 1990-2000; as posições didáticas passam de uma rejeição quase total do papel da linguagem na aprendizagem da matemática ao reconhecimento do papel motor das interações verbais em sala de aula na aquisição do conhecimento.

Há de fato duas utilizações contrárias da língua natural como registro de representação semiótica. Uma é a sua utilização comum e espontânea para fins de COMUNICAÇÃO **ORAL** entre os alunos e entre os alunos e os professores em diferentes fases de uma sequência de atividades. A outra é a sua utilização matemática para fins de TRATAMENTO nas PRODUÇÕES **ESCRITAS** para formular definições, para deduzir, a partir de propriedades dadas de outras propriedades utilizando teoremas, e também para descrever um problema aditivo, multiplicativo, de equacionamento ou de aplicação de uma propriedade geométrica. Não existe nada em comum nessas duas práticas principais da linguagem natural. Para perceber isso é preciso lembrar que a língua natural é um sistema semiótico, e não um vocabulário e regras sintáticas. Dito de outro modo, o que é essencial no domínio de uma língua natural não é o conhecimento do vocabulário, mas ter consciência das operações que permitem articular as palavras em sintagmas nominais para designar objetos, proposições, ou para efetuar uma descrição coerente (P.6). Limitando-nos aqui apenas a uma só operação de designação de um objeto, o seu poder e também a sua dificuldade estão no fato de que é preciso construir uma descrição do que se quer designar, uma vez que não há palavras suficientes para nomear tudo o que se quer dizer. Tomemos, por exemplo, a designação de um ponto ou de um segmento em uma figura geométrica sem utilizar a prática cega de utilização de uma letra. Somos sempre obrigados a construir uma descrição geométrica utilizando não um termo geométrico, mais dois. Além disso, há diversas descrições possíveis (VER..., p. 78,

Fig. 2). Para constatar isso, basta solicitar aos alunos que descrevam mensagens de construção de uma figura geométrica. Tomemos agora a situação inversa, em que os alunos não vão produzir uma sequência de instruções, mas somente ler o enunciado de um problema. A única tarefa é identificar as expressões que descrevem cada um dos dados necessários para resolver o problema. Aqui a dificuldade da operação de designação, como já se pode verificar com os problemas aditivos, vem do fato de que a operação de designação cruza dois tipos de informação semanticamente heterogêneos, um na sua sucessão de frases, e o outro no sentido positivo ou negativo da mudança (VER..., p. 129, Fig. 12). As operações de designação dos dados de um enunciado do problema quando se refere a uma situação "real" são *operações de designação cruzada*, e isso ainda é mais evidente para os problemas que exigem a obtenção de um sistema de equações. Por que ficar chocado, então, quando a maioria dos alunos tem dificuldade na "leitura" de um problema?

Independentemente da diferença entre a prática oral da língua em que a designação dos objetos de que se fala é reduzida ao mínimo, já que se tem muitas vezes sob os olhos aquilo de que estamos falando, e a prática escrita em que a sua complexidade se impõe, há uma diferença cognitiva entre uma utilização matemática da linguagem natural e o seu uso não matemático. Em situações fora do domínio da matemática, nos relatos, reportagens, testemunhos, explicações, a linguagem é quase sempre empregada por si mesma; as fotos, as caricaturas, as cartas ou os esquemas preenchem, o mais geralmente, uma função de suporte ilustrativo. Diferentemente, na matemática a linguagem natural é geralmente utilizada em sinergia cognitiva com outro registro de representação, mesmo quando as explicações e os raciocínios são encaminhados em língua natural (I.3). Isso torna qualquer explicação verbal dos resultados matemáticos tão estranhamente incompreensível para que não se possa *converter espontaneamente* essa explicação em outro registro que não seja o da língua natural.

A noção de registro impõe-se na análise da atividade matemática. Primeiramente, há o fato de que a matemática é uma forma de atividade intelectual que exige a mobilização simultânea de diversos registros de representação, e assim pode passar espontaneamente de um a outro. Há, ainda, outra razão que vai ao encontro de práticas pedagógicas e didáticas dominantes: os dois registros culturalmente comuns, o da língua natural e o do reconhecimento de formas percebidas, são utilizados em matemática de uma maneira que vai totalmente ao encontro da sua prática espontânea no âmbito externo à matemática.

A análise da atividade matemática deve ser feita em relação à análise das dificuldades sistemáticas e recorrentes de compreensão que a aprendizagem de matemática causa, de maneira intransponível, para a grande maioria dos alunos. Visto que é somente a partir do que a atividade matemática tem de cognitivamente específico em relação aos outros tipos de conhecimento, é que se podem *identificar os fatores cognitivos do desenvolvimento da compreensão em matemática*. E se queremos que todos os alunos entrem na maneira matemática de trabalhar e que eles possam realmente utilizar os conhecimentos matemáticos, é preciso que esses fatores cognitivos se traduzam em variáveis didáticas na organização de situações de aprendizagem.

III Como utilizar os registros?

Os dois patamares de compreensão, que a grande maioria dos alunos entre 6 e 16 anos de idade não consegue ultrapassar durante o período de ensino comum, são o patamar da mudança de registro (II.2) e o patamar das operações semióticas de substituição de uma representação em outra que é específica em cada um dos registros (P.5').

III.1 Uma operação fundamental para aprender a compreender matemática: a comparação dos conteúdos de representações semióticas

Compreender matemática é, desde já, não somente reconhecer os objetos matemáticos quando se muda de representação semiótica na mudança de registro, como também poder por si mesmo mudar de registro para mudar a representação dos objetos. Ora, o primeiro grande obstáculo a essa mudança é a diferença entre:

- O CONTEÚDO da representação de um objeto matemático, que depende do registro utilizado, e não do objeto representado, uma vez que a produção de representações pelos sistemas semióticos se faz independentemente do objeto representado (I.1); e
- O OBJETO matemático representado, que é inacessível perceptivamente e mesmo instrumentalmente (II.1).

Quando utilizamos dois registros culturalmente comuns para representar os objetos que são acessíveis sensorial ou instrumentalmente, quer dizer, fora e independentemente de qualquer produção de uma representação semiótica, a mudança de registro não traz dificuldade: a comparação de duas representações em que os conteúdos não possuem estritamente nada de comum entre elas é uma comparação indireta. O conteúdo de cada uma dessas representações pode ser comparado ao objeto sem a necessidade de se ocupar do conteúdo de outra representação. O acesso não semiótico ao objeto representado serve de marca estável, ou de ponto de ancoragem, para reconhecer que as representações diferentes, sejam elas semióticas ou não semióticas, representam, sim, o mesmo objeto. Dito de outro modo, *o reconhecimento dos objetos acessíveis perceptiva ou instrumentalmente repousa sobre a associação de duas comparações independentes entre si*.

Esse processo cognitivo que permite reconhecer um mesmo objeto físico por meio de representações diferentes não pode funcionar no reconhecimento de um mesmo objeto matemático em duas representações diferentes. Em matemática dispomos apenas de representações diferentes, e, já que toda atividade matemática mobiliza ao menos dois registros, como saber se as representações produzidas nesses dois registros representam um mesmo objeto ou se, ao contrário, os seus conteúdos diferentes representam dois objetos diferentes? Para responder a essa questão, a única operação possível é uma operação de comparação direta, e não indireta, dos conteúdos das duas representações. Podemos formulá-la deste modo:

> **P.8** Somente fazendo corresponder as unidades de sentido, que são próprias aos diferentes níveis de organização dos conteúdos respectivos de duas representações semióticas, é que se torna possível reconhecer se elas representam o mesmo objeto.

Diferentemente da codificação, a dificuldade dessa comparação vem do fato de que os conteúdos respectivos de duas representações semióticas fusionam as unidades de sentido que mostram níveis de organização diferentes (P.6 e P.6'). Tomemos um exemplo que poderá ser considerado como um contraexemplo para essa proposição: a descrição numérica de uma sequência quadrada de pontos ou de fichas (VER..., p. 53, Fig. 6). Os conteúdos dos dois tipos de representações parecem ter não mais do que um nível de organização, e, portanto, existem duas descrições numéricas possíveis diferentes, segundo se reconheçam as unidades de sentido que são distinguidas nas reconfigurações numéricas de partida: ou se reconhecem somente como unidade de sentido as configurações globais, e escreve-se 1, 4, 9, ... ou se reconhecem dois tipos de unidades de sentido, a configuração global precedente e semicontorno que a configuração seguinte acrescenta, e escreve-se a sequência 1, +3, +5, ... No entanto é suficiente variar a forma que a configuração seguinte acrescenta para que a variedade das unidades de sentidos possíveis surja imediatamente (VER..., p. 54-55, Fig. 7 e 8). Evidentemente a correspondência é imediatamente mais complexa, porque se trata de fazer corresponder as unidades de sentido de um enunciado de problema aditivo e as unidades de sentido de uma igualdade numérica a preencher, ou de gráfico cartesiano, ou de uma equação.

Em outras palavras, para poder comparar os conteúdos de duas representações semióticas, é preciso distinguir as diferentes unidades de sentido pertinentes que constituem os conteúdos respectivos de duas representações. Mas, para poder discriminá-las, *é preciso variar sistematicamente as unidades de sentido do conteúdo no registro de partida e observar as unidades de sentido que mudam no conteúdo da representação do registro de chegada* (DUVAL, 2011c, 2012). As variações sistemáticas feitas no registro devem incidir sobre as unidades de sentido próprias ao registro (P.6'). Assim, para a visualização gráfica das equações, as variações devem corresponder às variações visuais qualitativas, e não às variações de valores numéricos, e no registro da escrita das equações as únicas variações a ser levadas em conta são os valores de oposição (P.4) maior, menor que 1 e maior e menor que 0. Essas tarefas de variações sistemáticas são tarefas cognitivas, e há tantos tipos de tarefas cognitivas quanto há pares (registro de partida, registro de chegada), uma vez que basta inverter o sentido de uma mudança de registro para que a tarefa cognitiva seja completamente diferente e para que a inversão, fácil, em um sentido não o seja mais no outro sentido.

A utilização da língua natural como registro matemático apresenta, no entanto, uma particularidade que se pode formular assim:

> **P.9** Quando a língua natural é utilizada com registro de partida, e o registro de chegada é um registro de escrita simbólico de relações, ou quando ela é utilizada como registro de tratamento, é preciso recorrer às representações bidimensionais intermediárias.

Essas representações bidimensionais intermediárias têm por objetivo preparar para o discernimento das unidades do discurso que são matematicamente pertinentes em um enunciado de problemas aditivos (VER..., p. 129, Fig. 12) no equacionamento ou em um sistema de equações de dados de um problema (DUVAL et al., 2015); ou, em geometria, em um raciocínio que busque justificar ou provar mediante o uso de teoremas (DUVAL, 2007; EGRET; DUVAL, 1989). Elas são transicionais, quer dizer, os alunos as eliminam como um desvio inútil quando compreendem "como fazer".

Sem aprendizagem que conduza a uma conscientização dessa operação fundamental, é absolutamente impossível não confundir cada representação semiótica de um objeto matemático com o próprio objeto. Essa impossibilidade conduz a grande maioria dos alunos a um impasse no enclausuramento de registros, o qual já havíamos assinalado anteriormente, e à impossibilidade de utilizar conhecimentos matemáticos para resolver problemas. E isso conduz à seguinte consequência didática:

> **P.10** A conscientização da operação de correspondência entre as unidades de sentido específicas aos conteúdos respectivos de duas representações semióticas é o primeiro

patamar a transpor para compreender e, desse modo, poder aprender matemática.

A dificuldade para entrar na maneira de pensar e trabalhar em matemática se dá em relação à situação epistemológica, que é totalmente diferente das outras disciplinas científicas (II.1). Isso dá margem ao que chamamos de "paradoxo cognitivo" da matemática, ou seja, a impossibilidade de não confundir os objetos matemáticos e as diferentes representações que podem ser utilizadas. Nesse sentido, a dificuldade em matemática não está no fato de ela ser "abstrata", mas no fato de que se trabalha não mais do que com representações semióticas. É por isso que o recurso às representações concretas é um suporte falacioso, uma vez que conduz inteiramente à dificuldade da mudança de registro que acabamos de ver. Além disso, levanta-se o problema da pertinência e da congruência das representações concretas que são escolhidas para introduzir os registros que se pretende utilizar.

III.2 O segundo patamar de compreensão em matemática: as operações de substituição específica de cada registro

É aí que começa verdadeiramente a atividade matemática, quer dizer, o conhecimento matemático, dado que em matemática "ver", "compreender" e "conhecer" são inseparáveis. Não é possível, como ocorre em outras disciplinas, compreender o resultado de um procedimento se não se pode ver como tal procedimento ocorreu. Começa-se a fazer matemática desde quando se utilizam os primeiros números naturais. Em outras palavras, efetuar contagens e operações aditivas. Isso é o que se pode chamar de matemática oral ou espontânea, que exige não mais as fontes de denominação que oferecem uma língua natural por meio de suportes de "marcas de unidade" (dedos, seixos, ábacos). Requer, por outro lado, o recurso de instrumentos específicos (compasso e régua não graduada) para construir formas, ou seja, "idealizar" formas percebidas, e não somente desenhá-las – seria a mão de Leonardo ou de Picasso. Poderíamos parar por aí para um ensino geral aos alunos e ignorar os teoremas, os mais clássicos de Euclides. Entretanto isso não seria mais do que uma emergência. O desenvolvimento da matemática encontrou novos impulsos com o *desenvolvimento de sistemas de escrita* que permitem o símbolo "0", as operações multiplicativas e a possibilidade de não limitar-se aos números que podem ser enumerados sucessivamente. Por mais de vinte e cinco séculos esse progresso foi marcado pelo desenvolvimento e pela diversificação dos registros de representações semióticas. E o que é o mais notável é que em cada revolução nesse domínio, de Euclides a Descartes e Leibniz, em seguida, Frege e Hilbert, redefiniu-se, de certo modo, o MÉTODO MATEMÁTICO e as suas exigências no que concerne à generalização e à demonstração: do *mais geométrico* passou-se ao *mais algébrico-analítico*, em seguida, ao *mais estrutural* e, mais recentemente, ao *mais algorítmico*. Das primeiras às últimas séries do ensino fundamental exige-se que os alunos saltem muito rapidamente da matemática oral e espontânea para a prática escrita da matemática.

A atividade matemática é a transformação de representações semióticas do mesmo registro para fins de cálculo ou de demonstração por derivação dedutiva de uma proposição, ou exploração de processos de transformação, ou heurísticos na resolução de problemas, ou ainda em modelização (I.3). Essas transformações correspondem às operações de substituição semiótica que são específicas ao registro utilizado (P.5') e não devem ser somente aplicadas às unidades de sentido referencial, quer dizer, às expressões incompletas, às unidades figurais e aos valores visuais qualitativos, como no caso de mudança de registro, mas nas unidades de sentido às quais elas fundem: proposições, equações, figuras, grafos (P.6'). Tais operações constituem o funcionamento cognitivo que é específico à maneira de pensar e de trabalhar em matemática. *Utilizamos os registros tanto em pesquisa para determinar os observáveis desse funcionamento quanto como instrumento para descrever os processos*.

***

A partir de 1988 começamos as nossas pesquisas sobre os dois registros culturalmente comuns que são mobilizados em paralelo no ensino da geometria. Paradoxalmente, os registros que abrangem a língua natural foram rapidamente frutuosos. A razão por que uma demonstração não tem sentido e não contribui em nada aos olhos do aluno é *a incapacidade de levar em conta o duplo estatuto, ao mesmo tempo teórico* (definição, teorema, conjectura) *e operatório* (dados, premissas externas, conclusão a ser utilizada como dado para um passo seguinte) *na substituição de proposições*. Como havíamos indicado anteriormente, isso caminha no sentido contrário à maneira de raciocinar e argumentar em um ambiente não interno à matemática (I.3). Encontramos a representação bidimensional auxiliar que permitia aos alunos terem consciência do fato de que o estatuto das proposições era a unidade de sentido para levar em conta antes mesmo do que aquelas que são articuladas ao conteúdo das proposições (DUVAL, 1991, 2007; EGRET; DUVAL, 1989). Essa análise permite, desse modo, oportunizar o que se pode chamar de gestos intelectuais de uma demonstração matemática em língua natural. É a sua aquisição que permite que se entre em uma forma de proceder matemática de prova, de compreender o que uma demonstração contribui, e não os métodos de demonstração que são regularmente destacados quando se se atém unicamente ao ponto de vista matemático.

Em contrapartida, a análise do funcionamento cognitivo requerido para que se possa utilizar as figuras de forma heurística e para articular o vocabulário geométrico com as unidades figurais de qualquer que seja a figura foi longa e complexa. O problema era saber como caracterizar do ponto de vista cognitivo a noção de *unidade figural*, uma vez que tomar como unidades figurais elementares de base as formas 2D elementares de retângulos e retângulos, como é feito para introduzir a geometria no primário, leva a um impasse. A solução surgiu quando tomamos a noção de dimensão, e não mais da forma, como característica fundamental da visualização geométrica. Isso conduz a uma consequência didática que vai ao encontro de uma das atividades privilegiadas no ensino da geometria. Para compreender geometria, os alunos devem aprender a *desconstruir dimensionalmente* as figuras, e não a construí-las, mesmo que utilizem algum programa computacional. Eles precisam também aprender a desconfigurar uma figura para reconfigurá-la de uma outra maneira, quer dizer, independente da hipótese ou da propriedade dada. Essa análise cognitiva que se fundamenta na caracterização dimensional das unidades figurais permite não somente identificar os fatores que influenciam o desenvolvimento da maneira matemática de ver, mas de ver como os enunciados coordenam-se com a visualização matemática, uma vez que é possível mostrar que as diferentes unidades figurais possíveis podem ser colocadas em correspondência com as múltiplas denominações dos objetos e propriedades da geometria plana (DUVAL, 2005, 2015b).

Pesquisas análogas foram, em seguida, desenvolvidas sobre a análise do funcionamento cognitivo requisitado para compreender e utilizar álgebra elementar ensinada nos últimos anos do ensino fundamental (DUVAL et al., 2015).

III.3 As duas faces da atividade matemática são levadas em conta na organização de todo o ensino fundamental?

Toda atividade matemática tem duas faces, uma é a do conhecimento matemático. Esta se apresenta na forma de teoremas, definições, algoritmos de operações com números, as funções, os diferentes tipos de espaço, etc. Ela pertence a um único ponto de vista: a atividade matemática consiste em utilizar esses conhecimentos para obter novos resultados matemáticos e também para resolver problemas que encontramos em outros domínios do conhecimento e da atividade profissional. Nós a chamamos de *a face exposta*. A outra face refere-se aos gestos intelectuais, que são especificamente ligados à mobilização de registros e que caracterizam a maneira matemática de pensar e de trabalhar (P.5'). Sem a aquisição desses gestos é impossível compreender matemática e, dessa forma, adquirir conhecimentos e saber utilizá-los mesmo que se tenha obtido aprovação, localmente, em provas de avaliação. Chamamos a esta face de *a face oculta* da matemática. A sua análise expõe uma análise cognitiva da atividade matemática em termos de registros (II.1 e II.2). Essa surpreendente distinção das duas faces da atividade matemática suscita duas questões.

III.3.1 A questão da relação entre os pontos de vista matemático e cognitivo para organizar o ensino endereçado aos alunos com idade de até 16 anos

A conscientização dos gestos intelectuais ligados à mobilização de um registro de representação deve estar subordinada à aquisição dos conhecimentos matemáticos e à sua utilização? Nesse caso, pode-se pensar que os alunos vão progressivamente tomar consciência de todos os gestos seguindo as progressões didáticas estabelecidas que são postas de um ponto de vista matemático, seja nos programas em uma escala de uma dezena de anos, seja nas sequências de atividades em sala de aula em uma escala de algumas semanas. Ou, ao contrário, essa conscientização é um pré-requisito para a aquisição de conhecimentos? Neste caso, não é possível que os alunos, em sua grande maioria, possam, por eles mesmos, tomar consciência desses gestos intelectuais, e seria, então, necessário introduzir atividades cognitivas específicas. Olhando-se todos os cursos e programas que foram adotados até o presente momento, eles são organizados unicamente em função da face exposta da matemática, e é somente de maneira local que apelamos para teorias cognitivas gerais para justificar a organização de uma sequência de atividades em sala de aula centrada em um "conceito", no sentido de um tipo de operação, etc.

A superação do que chamamos de os dois patamares de compreensão em matemática se faz pela conscientização dos gestos intelectuais que permitem "fazer" matemática. O primeiro diz respeito à conversão de representações, quer dizer, acerca do conhecimento dos objetos matemáticos representados (P.3, P.8 e P.10), e o segundo se dá nos tratamentos matemáticos ligados às substituições de representações semióticas que são específicas a cada registro (P.5' e P.10).

Essas atividades devem ser organizadas independentemente da introdução de um "conceito" matemático. Por exemplo, a coordenação entre as equações e os gráficos cartesianos deve ser feita independentemente da noção de função, uma vez que irá permitir que se distinga uma grande variedade de gráficos possíveis, alguns gráficos sendo de função e outros não. Do mesmo modo, um trabalho específico sobre a visualização é necessário antes de introduzir os triângulos e os quadriláteros, uma vez que o estudo das suas propriedades geométricas pressupõe a coordenação da linguagem e do desenho das formas percebidas, com esses dois registros culturalmente comuns sendo, então, utilizados contrariamente ao seu emprego espontâneo.

Mais geralmente, toda atividade matemática pode ser decomposta em:

- um conjunto de atividades cognitivas a ser efetuado para pode levar a bom termo a atividade matemática solicitada; e
- conhecimentos matemáticos a serem aplicados para resolver o problema que leva ao sucesso da atividade.

Essas duas decomposições, cognitiva e matemática, são irredutíveis entre si.

III.3.2 A questão da gestão, em sala de aula, das atividades centradas na superação desses dois patamares de compreensão

As atividades cognitivas centradas na superação do patamar de compreensão não é nenhum desses tipos de problemas ou exercícios propostos no sentido matemático. Elas não podem ser organizadas em um modelo do tipo de engenharia didática elaborado para a aquisição de um dos diferentes conhecimentos que estão no programa de um ano escolar.

Primeiramente, o seu objetivo é a autonomia intelectual de cada aluno, quer dizer, que cada aluno adquira capacidades de iniciativa, de exploração e de controle na resolução de problemas. A compreensão em matemática não precisa de confirmação pelo professor, nem mesmo por outro aluno. O critério dessa autonomia intelectual é para o aluno *uma confiança em si mesmo* na condução de uma pesquisa e diante de novas situações que surgem. Para o professor o critério é a *rapidez das conversões* a ser operadas quando são variadas as representações de um objeto e a *pertinência das transformações de representações* que se pode efetuar na dupla de registros mobilizados. Dito de outro modo, em termos cognitivos a autonomia intelectual resulta da coordenação dos registros de representação. A atividade matemática requer, sempre, a mobilização sinérgica de dois, às vezes de três registros de representação (II.2), dependendo dos domínios matemáticos (aritmética, álgebra, geometria, análise, etc.). Após isso, o fechamento das atividades intelectuais deve ser estritamente individual. Concretamente, isso significa duas coisas: nada de passar a uma fase conhecida como “institucionalização”! Jamais responder diretamente à questão “Está certo?”, uma vez que o jogo dessas atividades não é o acerto ou a resposta correta, mas a tomada de consciência pelo aluno dos gestos intelectuais ligados à mobilização dos registros de representação, sejam esses registros culturalmente comuns, sejam registros especificamente matemáticos. Além disso, cada aluno deve ter a oportunidade de expressar-se com as próprias palavras sobre o que fez sem que lhe cortem a palavra para corrigi-lo ou para ajudá-lo. É nesse momento que a palavra, mesmo endereçada a outro, preenche primeiramente a função de objetivação, ou seja, da tomada de consciência, e não uma função de comunicação ou de tratamento (II.3). Seja na palavra ou na escrita, a linguagem tem um papel fundamental em todas as conscientizações (DUVAL, 2014).

IV Qual a diferença entre "objeto" e "referência"

Husserl propôs como princípio que toda consciência é consciência de alguma coisa (Bewusstsein von ETWAS)[9]. Podemos mesmo dizer que toda representação é representação de alguma coisa. Mas as coisas agora começam a ficar complicadas! Então, que não se confunda a nossa consciência com o que se é consciente; acontece muitas vezes que não se distingue a representação e a coisa que ela "apresenta", quer dizer, o seu conteúdo. A representação não remete a qualquer outra coisa; o seu conteúdo é simplesmente esta qualquer coisa. Dito de outro modo, fica-se aquém da exigência epistemológica de não confundir o objeto e a sua representação. É necessário criar situações de justaposição, como no caso da montagem fotográfica de Kosuth, para compreender o paradoxo da representação. Se há três cadeiras, o conteúdo de cada uma delas remete a ninguém mais do que a ela mesma, mas se há não mais do que uma cadeira, os conteúdos das três apresentações remetem a qualquer outra coisa, o que se pode chamar de cadeira real ou de objeto representado (P.2).

A análise do conhecimento começa com a identificação do que é "qualquer coisa outra" que remete ao conteúdo que uma representação apresenta. Mas, dadas a variedade e a heterogeneidade dos sistemas que produzem as representações e, desse modo, eles próprios representações, é preciso inicialmente abordar a questão do que em uma representação permite reconhecer que ela remete a qualquer outra coisa.

IV.1 Como o conteúdo de uma representação remete a uma coisa qualquer?

Para responder a essa questão, é preciso levar em conta, primeiro, os dois tipos de processos de reconhecimento de uma coisa apresentada por uma representação, e, segundo, a diferença radical que separa as representações semióticas das representações não semióticas.

Os dois tipos de processos de RECONHECIMENTO DE ALGUMA COISA, à qual a representação remete, corresponde à oposição psicológica clássica entre imagem e linguagem.

[9] *Idées directrices pour une phénoménologie* (1913, tradução de Ricœur, 1950), § 34.

As imagens justapõem ou superpõem formas. O processo de reconhecimento do que elas apresentam repousa na sua semelhança com os objetos percebidos no ambiente. Duas formas assemelham-se quando possuem o mesmo contorno fechado. E a semelhança torna-se mais evidente quanto mais elas conservam, entre seus elementos, as mesmas relações topológicas dos elementos característicos do objeto representado (VER..., p. 86, Fig. 4). Esse processo de reconhecimento não exige outra aprendizagem do que a conscientização da diferença radical que separa as imagens 2D/2D e as coisas em si (2D/3D ou 3D/3D), que se podem também tocar, pegar ou manipular.

A "linguagem"[10] é a combinação de diversas palavras na unidade de um sintagma ou de uma frase para dizer alguma coisa. A relação de referência daquilo que é dito não se faz ao nível das palavras, exceto para os nomes próprios, mas ao nível do sintagma nominal. *São os sintagmas nominais, e não as palavras, que se referem aos objetos de que se fala*. Designar verbalmente qualquer coisa exige que ao menos duas palavras sejam combinadas. Em matemática é, em geral, entre quatro e nove palavras! A REFERÊNCIA depende, então, de uma operação que deve ser intencionalmente efetuada pelo locutor ou por aquele que redige um enunciado. A compreensão da linguagem exige que se tenha consciência do sistema de oposições subjacente às palavras empregadas (P.4), da negação e das variações de sentido possíveis de uma frase apenas invertendo a sequência das mesmas palavras (P.5). É por isso, diferentemente das imagens, que a linguagem exige uma aprendizagem longa, complexa, que leva muitos anos. Essa oposição entre as imagens e a linguagem, entre o reconhecimento imediato do que uma imagem representa e o reconhecimento custoso do que é dito ou explicado em uma sequência de palavras, é, entretanto, didaticamente equivocada quando se trata de ensinar matemática. Tomemos o exemplo das figuras em geometria. Como reconhecer o que elas visualizam? Há três maneiras diferentes:

- por referência, quer dizer, pela indicação verbal de propriedades dadas a título de hipótese;
- por semelhança, quer dizer, por semelhança das formas ou das disposições espaciais que se pode perceber na realidade; e
- por desconstrução dimensional ou por decomposição mereológica, para obter outra configuração (III.2). Segundo a desconstrução ou a decomposição praticada, uma figura parece então poder referenciar outras propriedades do que aquelas dadas a

[10] Os termos "linguagem", "língua" e "discurso" qualificam uma função de comunicação como os códigos e as linguagens, o sistema linguístico que compartilha um conjunto de indivíduos (hispanofones, anglofones, etc.), e tudo o que se diz oralmente ou que se escreve em um texto. Na literatura didática o termo "linguagem" quase sempre é empregado (de forma inconveniente) no lugar de "discurso".

título de hipótese na figura inicial. Dito de outro modo, *o conteúdo de uma figura intencionalmente construída é potencialmente multirreferencial*.

A primeira maneira é a única que é válida do ponto de vista matemático. A segunda, ao contrário, apresenta a vantagem de fazer aparecer uma relação entre as propriedades geométricas e a realidade. A terceira maneira é a única que permite verdadeiramente utilizar figuras para descobrir uma solução para o problema. O equívoco didático na utilização de figuras no ensino da geometria vem do fato de que se pressupõe a possibilidade de transferir uma dessas três maneiras para as outras duas, entretanto essa possibilidade de transferência não existe. De um ponto de vista cognitivo, uma conscientização do funcionamento de cada uma dessas três maneiras e o desenvolvimento de coordenação são necessários para que se possa fazer um pouco de geometria.

A DIFERENÇA RADICAL QUE SEPARA AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS das representações não semióticas é a existência, ou a não existência, da outra coisa a que a representação endereça. A diferença dos sintagmas nominais pode ser vazia, como Russel havia objetado a Frege em seu célebre exemplo, "O atual rei do Brasil é careca", e uma imagem pode representar um objeto impossível (I.1). Contrariamente, existe sempre qualquer coisa que corresponde a uma representação não semiótica, mesmo se a interpretação do que é esta qualquer coisa possa ser difícil. Um exemplo dessa dificuldade era a interpretação dos diferentes contrastes de sombra e luz na superfície da lua que a luneta, construída por Galilei, mostrava (DUVAL, 2011b).

IV.2 Diversos tipos de objetos irredutíveis entre si

Não se pode, evidentemente, falar de "representação" sem se referir ao "objeto" representado, ou seja, ao que ela apresenta/representa, (re)produz ou substitui. Quando uma representação funciona perfeitamente como representação, ela se torna TRANSPARENTE ao objeto que ela representa: a representação não é observada, e a distinção entre a representação e o objeto representado apaga-se. É o que se passa, por exemplo, quando alguém fala na sua língua materna, é completo naquilo que quer dizer, e as palavras vêm sem que sejam notadas.

A situação muda se se falar, ou simplesmente ler, em outra língua. A representação torna-se um objeto opaco. No entanto, com um pouco de prática as palavras estrangeiras tornam-se igualmente transparentes. Mas não é desse mesmo jeito que ocorre quando tratamos do conhecimento em que há a exigência epistemológica de não confundir a representação e o objeto representado, uma vez que o seu desenvolvimento passa pela invenção de uma grande variedade de sistemas que permitem produzir *representações cada vez mais discriminantes*.

Fazemos distinção, começando por dois grandes grupos de sistemas produtores de representação, tomando como critério o modo de produção: os sistemas semióticos e os sistemas não semióticos (I.1 e II.1). Esse critério mostra-se suficiente para aproximar e para descrever os registros de representação semiótica e o seu papel na atividade matemática, mas não o é para referir-se à natureza dos objetos que cada domínio do conhecimento científico nos permite alcançar e estudar. Em particular, devemos separar os órgãos dos sentidos que são constituídos pela percepção, os instrumentos científicos que aumentam tanto o campo visual quanto o acústico, uma vez que os primeiros, diferentemente dos segundos, não são suscetíveis a modificação que aumente o poder de discriminação visual ou aditiva, ao menos, em um período de alguns séculos. Podemos, assim, distinguir três objetos irredutíveis entre si, e ainda um terceiro objeto (DUVAL, 2009).

OPER

Os objetos materiais ou concretos são aqueles cujo acesso é multissensorial, quer dizer, que se podem não somente ver, mas tocar e sentir um choque de um contra outro. Eles constituem tudo o que se pode diferenciar das outras coisas no nosso ambiente. Não se pode falar de invariância para esses objetos, mas somente de UNIDADE PERCEPTIVAMENTE INDISSOCIÁVEL de múltiplas qualidades sensíveis heterogêneas. É por isso que os objetos não podem ser definidos, mas somente descritos por uma acumulação mais ou menos longa de traços, que permitem imaginá-los tal e qual na realidade. Certos deles podem também ser "objetos" de ações de deslocamentos, de deformação, de partição.

OSCI

Os objetos das ciências exigem *a utilização de instrumentos cada vez mais potentes de observação e de medida*. Esses instrumentos produzem representações não semióticas que tornam *monossensorialmente perceptíveis* fenômenos que de outro modo não podem sê-lo. Os objetos do conhecimento científico são invariantes em relação à regularidade e à ligação de fenômenos observáveis e mensuráveis.

OMAT

Os objetos matemáticos *são unicamente acessíveis pela produção de representações semióticas*, entretanto independentes das suas representações semióticas. Entretanto, para reconhecer essa independência, é preciso poder efetuar operações semióticas que transformem as suas representações em outras representações do mesmo registro (P.5'). Eles se distinguem de todas as outras "idealidades" e de todos os conceitos não matemáticos pelo fato de que a sua representação semiótica pode, sempre, ser convertida em *uma representação semanticamente equivalente em outro registro* (P.3 e P.6').

Existe uma transição, ao mesmo tempo cognitiva e "ontológica", quando passamos dos objetos OPER e OSCI para os objetos OMAT, *uma vez que, evidentemente, não haverá confusão entre as variações de fenômenos perceptiva ou instrumentalmente observáveis com variações de representações semióticas*. Os dois primeiros tipos de objetos reportam-se à "realidade", enquanto o terceiro concerne ao que é necessário em um conjunto predefinido de possibilidades.

A palavra "objeto" é também empregada em outro sentido, para designar aquilo de que somos conscientes atualmente, ou seja, *é sobre o que a nossa atenção focaliza, o que a gente observa e, portanto, o que nos afigura de imediato*. Chamaremos de "objetos fenomenológicos" esses pontos de focalização da consciência em referência à definição husserliana de consciência. Eles apresentam três características, descritas a seguir.

OPH 1

Eles nos levam sempre a um objeto a que se tem acesso perceptivamente, por intermédio de instrumentos, ou pela produção de representações semióticas das palavras ou dos signos matemáticos. O objeto fenomenológico é a consciência do objeto ao qual se tem acesso atualmente perceptiva ou semioticamente. Dito de outro modo, *um objeto fenomenológico é a evidência imediata e subjetiva do objeto ao qual se tem acesso*.

OPH 2

São os pontos de focalização da consciência, *eles isolam qualquer coisa do seu contexto ou de onde fazem parte*. Assim, as diferentes qualidades dos objetos materiais, como forma, cor, grandeza ou textura, são objetos fenomenológicos separáveis e selecionáveis, embora sejam indissociáveis do objeto material e da sua percepção. É por essa razão que a prática da abstração foi frequentemente associada à prática da orientação seletiva da atenção.

OPH 3

Para os objetos que só são acessíveis por representações semióticas, há dois tipos de objetos fenomenológicos possíveis: seja porque o conteúdo apresentado é separado de toda a correspondência ao que representa, e, desse modo, o conteúdo é o objeto fenomenológico; seja por que a representação é transparente ao que ela representa, e o objeto fenomenológico é ele mesmo. *A atividade matemática exige a reversibilidade entre esses dois tipos de objetos fenomenológicos.* A utilização de equações como "instrumento" para resolver um problema é um exemplo desse tipo. O cálculo trata unicamente da forma das expressões algébricas, enquanto as letras que entram na composição dos sintagmas operatórios (2x, x+2, etc.) representam os dados do problema.

O impasse nas pesquisas de aprendizagem e de ensino em matemática no nível do ensino fundamental tem origem em uma dupla inobservância. Há, inicialmente, a inobservância da irredutibilidade dos objetos matemáticos aos objetos percebidos em razão da irredutibilidade das representações semióticas às representações não semióticas e à percepção dos objetos materiais. Mas há ainda, mais sutilmente, a inobservância do fato de que, para PODER SER RECONHECIDOS, *esses diferentes tipos de objetos do conhecimento devem ser reconhecidos como objetos fenomenológicos* (OPH.1). Sem isso se assimila o reconhecimento dos objetos unicamente acessíveis por representações semióticas (P.3 e P.6') aos processos de abstração por focalização, para distinguir as características dos objetos materiais (OPH.2). Desse modo, bloqueia-se a reversibilidade necessária para a atividade matemática entre os dois tipos de objetos fenomenológicos, que são a representação semiótica utilizada e o objeto que ela representa (OPH.3). Em outras palavras, faltam-nos os dois primeiros patamares de compreensão matemática (III.1 e III.2), e é sobre esses dois patamares que a grande maioria dos alunos continua a tropeçar, apesar de todas as reformas e inovações didáticas.

V. Conclusões: retorno às questões iniciais

Essas questões não comandam somente as pesquisas de ensino e de aprendizagem da matemática; elas determinam também as escolhas que são feitas na organização do ensino da matemática para os alunos com idade entre 6 e 16 anos. Como isso ocorre?

Vimos que a atividade e a compreensão em matemática apresentam faces opostas; uma é a face exposta dos conhecimentos e dos métodos de cálculo, de resolução ou de raciocínio; e a outra é a face oculta das coordenações dos pré-requisitos de, ao menos, dois registros para poder começar a compreender e poder utilizar conhecimentos matemáticos. Essas coordenações precisam ser desenvolvidas, uma vez que o pensamento matemático é a sinergia de diversos registros, e o que se chama de "conceitualização" não é nada mais do que a mobilização sinérgica de diversos registros, mesmo se se trabalha explicitamente em um patamar. É por isso que é preciso desde já superar os dois patamares de compreensão que dizem respeito à face oculta da matemática, para poder adquirir conhecimentos e dominar os métodos da face exposta da matemática.

O problema é que essa distinção entre as duas faces da atividade matemática não tem sentido do ponto de vista matemático, uma vez que não serve em nada para o caso da atividade do tipo "fazer matemática" (Q.1). Além disso, para perceber essa distinção, precisa-se, de certo modo, da matemática, da sua prática e da sua exigência específica de validação, quer dizer, da verdade e da adoção de outro ponto de vista. E é aqui que surgem os equívocos na organização do ensino e nas pesquisas sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos pelos alunos, *uma vez que este outro ponto de vista não é cognitivo, ou mesmo semiótico, mas epistemológico*.

Há dois pontos de vista epistemológicos opostos, mas complementares, em relação à matemática. Um é intramatemático, que se apoia nas etapas históricas da formação dos diferentes conceitos matemáticos e centra-se na face exposta da matemática. O outro ponto de vista é *comparativo*, trata das condições de acesso aos objetos do conhecimento matemático (OPER, OSCI, OMAT). Uma ruptura completa aparece nas condições de acesso aos objetos matemáticos e nos outros objetos do conhecimento (P.7), e isso leva a abordagens de conhecimento e de processos de compreensão que divergem radicalmente daquelas comumente praticadas em outras disciplinas científicas que não a matemática. Dito de outro modo, a questão "O que é compreender matemática?" (Q.2) não trata de conceitos matemáticos, mas de abordagens cognitivas específicas que permitem elaborá-los e apropriá-los, quer dizer, sobre a face oculta da matemática. Se a distinção das duas faces da atividade matemática não serve para os matemáticos, ela é primordial quando se trata de ensinar matemática aos alunos com idade entre 6 e 16 anos. Isso nos obriga perguntar a respeito dos fatores cognitivos do desenvolvimento da compreensão em matemática (Q.2') e tomá-los em conta na organização do ensino não somente em sala de aula, mas em âmbito curricular, uma vez que, evidentemente, ninguém poderá confundir a aquisição dos conceitos pelos alunos à razão de cinco horas de ensino por semana com a morosa formação dos conceitos matemáticos pelos matemáticos durante séculos.

O campo de pesquisa de ensino e aprendizagem de matemática se desenvolveu na base de dois postulados. O primeiro é que o único ponto de vista epistemológico intramatemático permite responder às questões Q.1 e Q.2. O ponto de vista cognitivo e os que concernem à organização institucional curricular ou às atividades em sala de aula devem estar subordinados ao ponto de vista matemático, ou seja, à face exposta da matemática. O segundo postulado trata dos processos cognitivos da aquisição do conhecimento que seriam fundamentais para todos os tipos de objeto do conhecimento. Em outras palavras, o acesso aos objetos matemáticos não seria exclusivamente semiótico, ou, mesmo se fosse, os conceitos matemáticos seriam cognitivamente da mesma natureza que os conceitos científicos. É suficiente nesse caso importar uma teoria cognitiva ou semiótica que englobe a aquisição tanto para os objetos OPER quanto para os objetos OSCI e *os objetos* OMAT. Ora, depois dos anos 70 recorreu-se a teorias cognitivas ou semióticas diferentes (DUVAL, 2015d), mas o princípio da sua utilização mantém-se o mesmo. Para cada um dos conceitos a ser ensinado sucessivamente durante um ano escolar, elabora-se uma sequência de atividades no quadro de um problema a ser resolvido. A "teoria" cognitiva escolhida serve unicamente para justificar o esquema de organização dessa sequência, que supostamente corresponde ao processo de aprendizagem modelizada na teoria escolhida. Assim sendo, utiliza-se um esquema organizador para qualquer que seja o conceito a ser ensinado e qualquer que seja o nível de ensino.

Em contato com alunos em diferentes níveis no quadro de pesquisa do IREM[11] de Estrasburgo, em que os professores, do ensino fundamental ao universitário, encontram-se regularmente, fomos levados a descrer desses dois postulados. A questão do tipo de funcionamento cognitivo que a maneira de trabalhar matemática possui e o ponto de vista epistemológico comparativo impõem-se (Q.1'), e nenhuma teoria cognitiva ou semiótica não estava preparada para responder à questão dos fatores cognitivos que permitiriam desenvolver a compreensão em matemática (Q.2'). Para identificá-los, é preciso responder a outra questão:

> **Q.1''** Quais são os objetivos observáveis e que possibilitam a análise da maneira de trabalhar em matemática?

É por isso que toda interpretação da noção de registro que se fixa somente no ponto de vista epistemológico intramatemático, ou todo ensaio de utilizá-lo sem mudar de antemão os tipos de atividades propostas em sala de aula, é um contrassenso. A escolha fundamental não é entre teorias, mas entre os dois pontos de vista epistemológicos sobre a matemática.

Na realidade, não existem apenas duas questões que comandam as pesquisas no ensino e aprendizagem matemática da matemática, mas três. A terceira não é epistemológica nem mesmo cognitiva, mas filosófica e pedagógica:

[11] N.T. IREM – Institut de Recherches sur L'enseignement des Mathématiques (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática).

Q.3 Qual é a contribuição da matemática para a formação do indivíduo?

A sua formulação varia consideravelmente em função daquele que a propõe. Para muitos alunos é: "Para que serve isto que querem que a gente aprenda?". Para os professores de outras disciplinas desses mesmos alunos é: "Por que dar tal importância à matemática, uma vez que outras matérias parecem contribuir mais para a formação do espírito?". E para aqueles que decidem a política educacional: "Quais são os tipos de saber que os alunos de um país devem adquirir para poder se empregar em profissões que a sociedade necessita?". Todas as respostas em termos de "modelização de situações reais"[12] ou de "desenvolvimento da racionalidade" ou de "aquisições do saber-fazer" são respostas consensuais, fúteis, e escamoteiam a questão.

A única resposta pertinente e decisiva que tem sentido, *primeiro, para o aluno*, cuja contribuição eles podem, por eles mesmos, descobrir rapidamente, é a resposta da autonomia intelectual e global, uma vez que somente a experiência da sua própria autonomia intelectual dá a confiança às suas próprias capacidades intelectuais e, desse modo, a si mesmos. A resolução de problema é a atividade matemática em que cada aluno deve experimentar a própria autonomia intelectual, uma vez que a autonomia intelectual nesse domínio é total ou não existe. Isso quer dizer que o aluno deve rapidamente ter a capacidade de iniciativa, para procurar e explorar as possibilidades de solução e de controle nos tratamentos que efetua, e, dessa maneira, compreender por qual motivo a solução encontrada é a certa, sem ter a necessidade de confirmação do professor ou de um colega. Em matemática, compreensão e autonomia intelectual são, de certa maneira, a mesma coisa (DUVAL, 2005a).

Evidentemente, e infelizmente, é o oposto que acontece. A resolução de um problema é um obstáculo intransponível para maioria esmagadora dos alunos, o ponto em que eles vivenciam certa insuficiência para compreender, ao cabo de anos e anos escolares, e a partir do qual eles se distanciam da matemática.

Para mudar radicalmente essa situação, é preciso dar aos alunos os meios para uma autonomia intelectual total, e para isso é preciso organizar o ensino de matemática privilegiando a face oculta dela. Para poder fazer matemática ou utilizar ou saber utilizar conhecimentos matemáticos, é preciso transpor os dois patamares cognitivos da compreensão: o reconhecimento imediato de um mesmo objeto matemático em duas representações semióticas bem diferentes; e a conscientização da maneira específica que cada registro pode

[12] Dito de outro modo, a aprendizagem da matemática será necessária "por que o mundo é matemático" segundo o título de uma coleção recente em 40 volumes sob o patrocínio de Cedric Vilani, Medalha Fields em 2010. Mas como reconhecer este mundo matemático se não se consegue aprender matemática?

se transformar em novas representações, as representações semióticas produzidas. Isso não significa que a face exposta da matemática e a aquisição de conhecimentos são relegadas ao segundo plano, mas que os diferentes conhecimentos matemáticos de base que constituem os objetivos dos programas do ensino fundamental ao ensino médio devem estar subordinados à apropriação de todos os registros que os alunos mobilizam e que requerem coordenação (III.3.2). Essa apropriação dá não somente os meios de representar e organizar as informações, de qualquer que seja a natureza, mas também de desenvolver, sobretudo, as capacidades "mentais" de pensar. Para além da aquisição de conhecimentos matemáticos elementares que não serão talvez utilizados[13], está aí a verdadeira contribuição da matemática para a formação de cada indivíduo.

Estas são questões epistemológicas e cognitivas que comandam não somente a organização do ensino, não somente em sala de aula, mas em uma gama de currículos que vai ao longo do ensino fundamental. A organização de sequências de atividades pelo professor e, indo além, a escolha dos objetivos de ensino e de conhecimentos a ensinar pelos responsáveis do sistema educativo de um país dependem das repostas apresentadas a essas questões, que se mantêm, geralmente, implícitas. É essencial para a formação dos professores e para a pesquisa sobre a aprendizagem da matemática que questões cruciais, que possam suscitar verdadeiros debates, sejam colocadas. Além disso, não se veem os mesmos fenômenos em sala de aula e não se interpretam as produções dos alunos da mesma forma conforme as respostas que lhes aportamos.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 233-261, 1991.

DUVAL, R. Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? **Petit x**, n. 31, p. 37-61, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine** : regitres sémiotiques et apprentissages intellectuel. Bern: Peter Lang, 1999.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano**. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1995.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de

[13] A utilização da matemática pela maioria dos indivíduos no curso da vida não ultrapassa a (não vai além da) "matemática oral" (III.2). A matemática necessária para uma atividade profissional aprende-se antes dos 16 anos de idade, na especialização do ensino direcionada a pré-orientações profissionais.

la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, R. Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In: BOERO, P. (Ed.). **Theorems in schools**. Rotterdam; Tapei: Sense, 2007. p. 137-161.

DUVAL, R. « Objet » : un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles ? In: BAILLÉ, J.; LIMA, L. (Ed.). **Du mot au concept**: objet . Grenoble: Presses Universitaires, 2009. p. 79-108.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011a. (v. 1).

DUVAL, R. Preuves et preuve: les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. In: BAILLÉ, J.; LIMA, L. (Ed.). **Du mot au concept**: preuve. Grenoble: Presses Universitaires, 2011b. p. 33-68.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 6, n. 2, 2011c. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 7, n. 2, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.

DUVAL, R. Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? **Revemat**, v. 8, n. 1, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.

DUVAL, R. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, Méricles, T. (Org.). **As contribuições das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Ed. da Unijuí, 2014. p. 15-38.

DUVAL, R. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: desafios e marcas dos anos 1960 aos anos… 2030 ! Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 10, n. 1, 2015a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.

DUVAL, R. Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. In: BAILLÉ, J.; LIMA, L. (Ed.). **Du mot au concept**: figure. Grenoble: Presses Universitaires, 2015b. p. 147-182.

DUVAL, R. Les théories cognitives en didactique des mathématiques: lesquelles et pourquoi? **Isonomia – Epistemologica**, University of Urbino, n. 7, 2015c. Disponível em: <http://isonomia.uniurb.it/>.

DUVAL, R. Cuestionamientos sobre la « elección » y utilización de teorías en « Mathematics Education ». In: D'AMORE, B.; PINILLA, M. (Ed.). **La didáctica de la matemática**: una mirada internacional empírica y teórica. Bogota: Universidad de La Sabana, 2015d. p. 159-

182.

DUVAL, R. et al. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso? São Paulo: Proem, 2015. (v. 2).

EGRET, M. A.; DUVAL, R. Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 2, p. 65-89, 1989.

Anexo

Questions épistémologiques et cognitives, avant d'entrer dans une classe de mathématiques

Raymond Duval

Deux questions commandent toutes les recherches sur l'enseignement et sur l'apprentissage des mathématiques :

Q. 1 Qu'est-ce que « faire des mathématiques » ?

Q. 2 Qu'est ce que comprendre en mathématiques ?

Elles ne sont pourtant jamais réellement au premier plan des recherches en Didactique. Car, du point de vue mathématique, les réponses sont inhérentes à la pratique et la pensée mathématiques. Mais, surtout, ce serait uniquement du point de vue mathématique que l'on pourrait répondre à ces deux questions, les autres points de vue lui étant totalement subordonnés. En particulier, le recours au point de vue cognitif se limiterait aux conditions générales d'acquisition de connaissances à prendre en compte pour organiser les activités d'apprentissage en classe.

Cependant ces deux questions s'imposent comme les questions cruciales pour l'enseignement des mathématiques à tous les élèves de 6 à 16 ans. Car cet enseignement se heurte à des obstacles d'incompréhension qui n'existent pas dans l'enseignement des autres disciplines. Et cela oblige à se poser ces questions, non plus d'un point de vue mathématique, mais d'un point de vue cognitif.

Q.1' *Quels sont les processus cognitifs requis* pour « faire des mathématiques » ?

L'activité mathématique mobilise des processus cognitifs que les autres disciplines ne sollicitent pas. Dire « faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes » est fallacieux. On omet le mot important : résoudre *mathématiquement* ! Or la plupart des élèves, lorsqu'ils se retrouvent face à un problème, ne savent plus quoi faire. Autrement dit, « faire des mathématiques » requiert de « comprendre» en mathématiques. Sinon, on ne peut ni chercher ni contrôler soi-même la pertinence mathématique de ce que l'on fait.

Q.2' Quels sont les facteurs cognitifs du développement de la compréhension en mathématiques ?

Toute théorie en « Mathematics *Education* » doit se traduire en variables didactiques pour organiser des situations d'apprentissage qui conduisent réellement presque tous les élèves à comprendre en mathématiques et, donc à pouvoir utiliser d'eux-mêmes des connaissances mathématiques.

***

C'est pour répondre aux deux questions Q.1 et Q.2 d'un point de cognitif, et non pas seulement du point de vue mathématique, que nous avons été conduit à introduire la notion de « registre » ou, plus exactement celle de *registre de représentation sémiotique* (Duval, 1995).

Cette notion s'est dégagée lorsque nous avons cherché à décrire les processus cognitifs mobilisés par l'activité mathématique (Q. 1') à partir de la manière mathématique de poser et de résoudre des problèmes, et en relation avec l'observation régulière d'élèves face à des problèmes. En effet, pour analyser d'un point de vue cognitif l'activité et la pensée mathématiques, telles qu'on peut les observer dans la diversité de ses démarches de recherche, de définition et de preuve, *nous avons du prendre en compte trois caractéristiques*. Toutes les productions sont des productions *sémiotiques.* Ces productions sont des *représentations d'objets* qui ne sont pas accessibles perceptivement mais uniquement sémiotiquement. Mais ces deux caractéristiques, évidentes, ne suffisent pas pour décrire le fonctionnement cognitif de la pensée en mathématique ni la manière de travailler en mathématiques. Nous avons dû introduire la notion de « *registre*». Un registre est un système sémiotique dont la puissance de création de représentations sémiotiques nouvelles est illimitée. La pensée et l'activité mathématiques dépendent totalement de la synergie entre des registres dont les possibilités cognitives sont hétérogènes. Vouloir les décrire en recourant à la notion classique, mais équivoque, de « concept » et à celles connexes de "conceptualisation ", d "abstraction" ou de "représentation mentale" est une impasse. De même en fondant entièrement l'analyse des représentations sémiotiques sur celle de «*système sémiotique* », et non pas sur celle de signe, nous a conduit à rejeter les oppositions dualistes entre matériel et mental, externe et interne, signifiant et signifié pour caractériser et analyser la production des représentations sémiotiques. Elles ne peuvent pas rendre compte du caractère fondamentalement sémiotique du travail mathématique.

La notion de registre a permis d'identifier les facteurs décisifs pour faire franchir aux élèves ce que nous appellerons les deux seuils de compréhension en mathématiques (Q. 2'). Ils permettent d'organiser des tâches cognitives spécifiques qui sont indépendantes de l'acquisition ou de l'application d'une connaissance mathématique. Ces tâches dépendent, en fait, du seuil de compréhension à faire franchir. Les tâches relatives au premier seuil visent à développer la synergie entre deux registres, de manière à faire disparaître tous obstacles de compréhension qui viennent de la non-reconnaissance d'un même objet dans deux représentations sémiotiques différentes. Les tâches relatives au second seuil visent la prise de conscience du fonctionnement cognitif qui est propre à chacun des registres. Car chacun des registres ne permet pas d'effectuer les mêmes traitements mathématiques, c'est-à-dire les démarches mathématiques d'exploration heuristique, de modélisation de données, de preuve ou de calcul. Cela évidemment a exigé des recherches spécifiques pour chacun des registres, en particulier pour les registres que nous avons appelés multifonctionnels. A ce titre, *la notion de registre est un outil d'observation et d'analyse de tous les phénomènes de compréhension et d'incompréhension dans l'apprentissage des mathématiques*, quel que soit le domaine des mathématiques enseignées. Et cela veut dire aussi qu'elle est aussi un outil d'évaluation non pas des productions des élèves, mais des problèmes donnés aux élèves à des fins d'apprentissage et des questions choisies pour les enquêtes d'évaluation.

L'analyse de l'activité et de la pensée mathématiques en termes de registres est une analyse cognitive et non pas sémiotique. Cela veut dire que l'analyse porte sur les objets de connaissance qui sont étudiés dans une discipline. Trois questions sont alors essentielles. Quels sont les moyens d'accès aux objets étudiés ? Quels sont les moyens d'exploration de leurs propriétés ? Quels sont les critères de preuve ? L'importance et le rôle des représentations sémiotiques en mathématiques doivent êtres analysés par rapport à ces trois questions.

Ce qui a été surtout retenu de la notion de registre, lorsque nous l'avons introduite, c'est l'importance donnée aux représentations sémiotiques et à la nécessité de leur diversité dans l'apprentissage. Mais *l'analyse du fonctionnement cognitif requis par l'activité mathématique et celle des facteurs de son développement que la notion de registre rend possibles* a été méconnue. Cette notion, qui a souvent été assimilée à celle de représentation, a soulevé beaucoup de questions. Parallèlement, la relation des représentations sémiotiques aux objets mathématiques a été interprétée selon les oppositions dualistes entre matériel et mental ou entre signifiant et signifié. Autrement dit, *on évacue totalement la question de l'accessibilité aux objets mathématiques.* On s'en tient alors à une problématique cognitive fausse dans laquelle les représentations sémiotiques devraient être comprises à partir des concepts mathématiques, lesquels seraient des représentations mentales non-sémiotiques. Cette double méconnaissance vient de ce que les questions Q.1 et Q.2, ne sont jamais posées dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques, parce qu'elles seraient réservées aux mathématiciens et que ce serait uniquement du point de vue mathématique que l'on pourrait y répondre.

Dans cet article, nous allons revenir sur les deux notions de registre et d'objet. Elles sont fondamentales pour comprendre, d'un point de vue cognitif et non pas mathématique, ce que les manières de penser et de travailler en mathématiques ont de radicalement différent de celles qui sont pratiquées dans tous les autres domaines de la connaissance. Car, pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques et les obstacles insurmontables de compréhension auxquels la majorité des élèves se heurtent systématiquement, le point de vue cognitif sur les mathématiques est aussi fondamental que le point de vue mathématique. Nous allons donc répondre aux deux questions récurrentes : « Qu'est-ce qu'un registre ?» et « Qu'est-ce qu'un objet ?».

La première question, comme toutes les questions « *qu'est-ce que…?* » ne peut pas être séparée des deux autres qui l'encadrent : *« Pourquoi la notion* de registre s'impose-t-elle ?», et surtout « *Comment l'utiliser ?».* La deuxième question est essentielle dans toute analyse de la connaissance Mais, en mathématiques, elle est inséparable de la question: « comment une représentation sémiotique réfère-t-elle à l'objet qu'elle représente ?». Nous les avons fusionnées dans la question « Quelle est la différence entre "objet" et "référence" ? ». Dans cet article, nous allons reprendre ces trois questions sur les registres et celle sur l'objet mathématique.

***

Nous avons formulé les réponses aux trois premières questions en douze propositions que nous avons isolées dans le corps du texte, un peu comme des encadrés dans un manuel. Les propositions P.1 à P.6 concernent tous les systèmes sémiotiques. Les propositions P.5' à P.10 portent sur les registres, c'est-à-dire sur les systèmes sémiotiques qui sont mobilisés en mathématiques pour remplir des fonctions cognitives de traitement et non pas la fonction sociale de communication.

Nous avons fait ce choix rédactionnel pour que le lecteur puisse avoir, par des renvois internes, une vue d'ensemble des différentes distinctions qui sont nécessaires pour l'analyse cognitive de l'activité et de la pensée mathématiques. Ainsi pour comprendre l'importance du premier seuil de compréhension en mathématiques et comment le faire franchir aux élèves, il faut avoir présent à l'esprit les propositions P.1, P.3, P.4, P.7 et P.10, ou les lire à la suite. De même pour comprendre ce qui caractériser les représentations sémiotiques, il faut lire P.4 et P.6.

Nous avons noté les réponses à la quatrième question en six propositions. Les trois premières se rapportent aux différents types d'objets de connaissance et sont notées respectivement O*per*, O*sci,* O*mat*. Les trois autres proposition se rapportent aux objets phénoménologiques. Elles sont notées O*ph.* Car il est essentiel de ne jamais confondre objet de connaissance et objet phénoménologique.

Chacune de ces propositions appelle évidemment un exemple d'analyse pour chacune des propositions, qui permette de voir et de comprendre la démarche d'analyse qui y conduit. Tous ces exemples ont été publiés dans des travaux antérieurs et ils ont été rassemblés dans un ouvrage publié récemment (Duval 2011a). Nous y ferons référence en utilisant l'abréviation « *Ver".* Les vingt références que l'on trouvera sous cette abréviation renvoient chacune à une Figure qui est une comparaison de photos, de dessins, de schémas, de figures géométriques ou de graphiques). On comprendra que nous n'ayons pas pu les reproduire sans transformer cet article en un ouvrage.

I. QU'EST-CE QU'UN REGISTRE DE REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES ?

On ne peut pas comprendre ce qu'est un *registre* si on ne comprend pas d'abord ce qu'est une *représentation* et si, ensuite, on ne voit pas en quoi les représentations *sémiotiques* sont irréductibles aux représentations non-sémiotiques.

1.1 L'exigence épistémologique fondamentale : ne jamais confondre la REPRESENTATION et L'OBJET représenté.

Il suffit de remplacer le mot « représentation » par le mot « image » pour voir les deux problèmes que soulèvent les représentations. Comment les représentations peuvent-elles être distinguées des objets qu'elles représentent ? Et quelle est la nature de la relation entre la représentation et l'objet représenté ?

Pour répondre à la première question, on peut partir de deux observations. La première est l'image d'un objet dans un miroir, ou sur toute surface réfléchissante parfaitement plane. L'image peut alors ressembler si parfaitement à l'objet représenté que l'on se trouve deux représentations apparemment identiques et qu'il est difficile de dire laquelle est le reflet ou l'image de l'autre (*Ver*, p.17, Fig. 1). La deuxième observation est le célèbre montage photographique réalisé par Kosuth en 1965 (*Ver*, p. 43-44, Fig. 1, 2). Le principe du montage photographique est *de juxtaposer avec l'objet lui-même avec des représentations de cet objet :* une chaise sur laquelle on peut s'asseoir, une photographie de cette chaise, un texte décrivant la chaise. On pourrait y ajouter d'autres représentations, comme le schéma montrant comment assembler les différentes pièces d'une chaise. Ces deux types d'observations nous conduisent aux trois propositions suivantes:

P. 1 *Il y a beaucoup de représentations possibles différentes pour un même objet, alors qu'il ne peut pas y avoir plusieurs objets différents pour une même représentation.*

P. 2 *Il y a autant de représentations différentes possibles d'un objet qu'il y a de systèmes permettant de produire des représentations.*

P. 3 *Deux représentations D'UN MEME OBJET produites par deux systèmes différents ont des CONTENUS différents qui peuvent n'avoir aucune ressemblance entre eux ni avec l'objet représenté.*

Les deux premières propositions donnent les critères qui permettent de distinguer une représentation et l'objet représenté. La troisième renvoie à la situation paradoxale que soulèvent toutes les représentations, étant donné que les différentes représentations peuvent n'avoir rien de perceptiblement commun. Kosuth avait formulé le paradoxe cognitif que les représentations créent dans la légende : « Une ou trois chaises ?».

La deuxième question porte sur la nature de la relation entre une représentation, ou plus exactement son contenu (P.2), et l'objet qu'elle représente. Pour y répondre, il faut comparer les modes de production d'une représentation qui sont propres à chacun des systèmes permettant de produire une représentation (P.3). Cette comparaison permet de dégager deux types de relation, contraires l'une de l'autre. Elles dépendent du fait que le système utilisé pour produire une représentation est un système physique, un organe récepteur ou, au contraire, un système sémiotique (*Ver*, p.134, Fig. 13) :

— Lorsque les représentations résultent de l'action d'un objet sur un système physique (télescope, spectromètre, appareil photo ? etc.) ou sur un organe sensoriel (surface réfléchissante, capteur, les différents sens), la relation entre l'objet et la représentation est *une relation de causalité*. La production des représentations est alors AUTOMATIQUE et sans aucun coût perceptible de temps.

— Lorsque les représentations sont produites indépendamment de toute action d'un objet sur un système physique, comme c'est le cas pour toutes les représentations sémiotiques (parole, écriture, dessin), la production des représentations est alors INTENTIONNELLE, et elle requiert un travail d'élaboration qui prend un laps de temps plus ou moins long. La relation entre le contenu de la représentation et l'objet représenté s'inverse, sans qu'il y ait un impact de l'un sur l'autre. Cette relation inverse et déconnectée est *une relation de référence* (Duval 2015c, annexe pp.125-126).

En d'autres termes, la relation entre une représentation et l'objet représenté est une relation réelle lorsque le système qui produit la représentation est un système physique ou un récepteur sensoriel. Mais lorsque le système utilisé est un système sémiotique, il n'y a aucune relation réelle entre la représentation et l'objet représenté. Cela tient au fait que le contenu de la représentation résulte d'une élaboration intentionnelle. La relation de référence, caractéristique des représentations sémiotiques, soulève donc deux problèmes :

— Le problème épistémologique de l'existence de l'objet représenté. Car *la relation de référence peut être une relation vide*, l'objet représenté étant par exemple un objet impossible, ainsi que les dessins d'Escher l'illustrent à merveille.

— Le problème cognitif de la reconnaissance de l'objet représenté. Ce problème s'impose au moins pour toutes les représentations qui n'ont aucune ressemblance perceptible avec l'objet représenté comme les mots, les signes écrits (lettres, chiffres, symboles d'opération). Mais il se pose aussi pour tous les dessins qui paraissent ressembler à des objets du monde réel. D'où la question : *qu'est-ce qui, dans le contenu d'une représentation sémiotique, permet de reconnaître l'objet représenté ?*

1.2 SEMIOTIQUE : pas de signes sans un SYSTEME DE SIGNES.

À la différence du mot « représentation », le mot « signe » est habituellement employé pour désigner tout ce qui employé pour *communiquer.* Cela va de tous le « signaux » émis pour transmettre une information, jusqu'à toutes les marques fixes employées pour « transcrire » le langage : hiéroglyphes, alphabets. L'emploi des signes est intentionnel, c'est-à-dire relève du choix de certains signes, parmi d'autres possibles, pour composer un message, un énoncé, un dessin. En ce sens la définition des signes comme «étant quelque chose qui se tient à la place de quelque chose (something that stands to somebody »[14]) manque la caractéristique essentielle des signes. *Car ce qui se tient à la place de quelque chose d'autre, ce ne sont pas les signes mais une séquence de signes composée à partir d'une liste de base de signes.* Quand on parle signes et de sémiotique, il y a trois idées-forces à retenir.

La première idée a conduit à ne pas regarder les signes indépendamment les uns des autres, mais en tant qu'ils constituent des ensembles spécifiques utilisés pour remplir des fonctions de communication, d'organisation ou de traitement de l'information, d'objectivation de ce dont on n'avait pas encore pris conscience.

P. 4 *Les signes ne sont des signes que par leurs relations d'opposition à d'autres à l'intérieur d'un système d'oppositions.*

Le système binaire, ou code booléen, est le système sémiotique le plus élémentaire. Pour chaque position successive, il n'y a que deux choix possibles. En revanche, dans le système décimal, il y a dix choix possibles pour chacune des positions successives. Dans la séquence « 11 », le chiffre « 1 » n'est donc pas le même signe selon le système de numération utilisé.

[14] Cette définition de Peirce conduit à confondre les phénomènes physiques et cognitifs de représentation avec les phénomènes relatifs à la communication (*Ver*, p.32)

C’est pourquoi tous les systèmes d’écriture des nombres en base n sont des systèmes sémiotiques (*Ver*, p. 30, Fig. 7). Les langues sont les systèmes sémiotiques les plus complexes qui existent. Par exemple, même le vocabulaire de base repose sur des couples d’antonymes : {gagner, perdre}, {haut, bas}, etc. (*Ver*, p. 126).

La deuxième idée-force est importante à la fois du point de vue épistémologique et du point de vue mathématique. Car elle permet de comprendre ce qui constitue l’originalité et le mode de fonctionnement de la connaissance en mathématiques.

P. 5 *Les systèmes de signes permettent d’effectuer une opération qui se révèle cognitivement très puissante :* *SUBSTITUER DES SIGNES OU DES GROUPEMENTS DE SIGNES LES UNS AUX AUTRES, indépendamment des objets évoqués et UNIQUEMENT EN FONCTION DE REGLES.*

Autrement dit, les systèmes de signes permettent d’effectuer un type d’opération, qui n’est ni physique, ni conceptuelle, ni mentale et que nous appellerons une OPERATION SEMIOTIQUE (*Ver*, p.26, Fig. 5). La substitution de signes, ou de groupements de signes, les uns aux autres est l’opération mathématique fondamentale. Ainsi toutes les opérations de calcul sont fondamentalement des opérations sémiotiques de substitution, dont la puissance dépend du système de numération utilisé (*Ver*, p. 45, Fig. 3).

La troisième idée-force concerne le contenu des représentations produites en utilisant un système sémiotique. Car la production d’une représentation sémiotique implique *toujours plusieurs choix successifs parmi des unités de sens possible*s pour constituer, par exemple, une expression numérique ou une phrase décrivant un état, une relation ou une opération (P.4).

P. 6 *A la différence des représentations non-sémiotiques, le contenu des représentations sémiotiques s’analyse EN UNITES DE SENS S’ARTICULANT A PLUSIEURS NIVEAUX D’ORGANISATION, les unités de sens changent d’un niveau d’organisation à un autre.*

Cette proposition apporte un premier élément de réponse au problème cognitif de la reconnaissance de l’objet représenté par le contenu d’une représentation sémiotique : c’est seulement à partir des unités de sens articulées en au moins deux niveaux d’organisation que l’on peut reconnaître l’objet représenté par une représentation sémiotique. *D’un point de vue cognitif, cela requiert que l’on puisse discriminer toutes les unités de sens qui fusionnent en une représentation sémiotique.* Prenons l’exemple le plus trivial celui d’une phrase simple. Une phrase simple, sans proposition subordonnée, comporte :

— le niveau des unités de sens que sont les mots (substantifs et adjectifs) qui

> s’articulent en des syntagmes,
> — celui des syntagmes nominaux et verbaux qui s’articulent en une phrase (une proposition énoncée),
> — celui de la proposition énoncée qui s’articule avec d’autre proposition dans la progression d’une description, d’un récit, d’un raisonnement ou d’une explication.

Cette analyse peut paraître contre-intuitive. Car *lorsqu’on parle*, on a l’impression que c’est tout le contraire qui se passe, comme on peut l’observer lorsque par exemple on répond à une question ou que l’on pose soi-même une question. Les mots semblent venir spontanément, sans qu’on les remarque, pour dire ce que l’on veut dire, et ils forment un tout indivisible pour celui qui parle et au moment où il parle. Ce tout indivisible est celle d’une phrase correspondant à « une seule émission de voix ». L’interlocuteur, au contraire, ne retient de ce tout indivisible, qu’il perçoit successivement, que deux ou trois mots, ceux qui suscitent en lui des associations immédiates et qui sont souvent sans rapport avec ce que le locuteur veut dire. *Cette situation change du tout au tout lorsqu’il s’agit d’écrire, c’est-à-dire de rédiger, un énoncé ou un texte pour décrire, pour expliquer ou même pour raconter.* Car, lorsqu’il s’agit d’écrire un énoncé ou un texte, la production des phrases résulte d’un travail plus ou moins explicite de choix successifs des mots pour désigner les objets dont on parle et que l’on peut plus montrer du doigt en disant «ça» comme dans une conversation. Et cela peut devenir très vite un obstacle qui arrête ou conduit à des expressions équivoques ou fausses. Dans l’enseignement des mathématiques, cela apparaît chaque fois que l’on demande d’écrire un message d’instructions pour expliquer la construction d’une figure géométrique, même très simple.

1.3 REGISTRES : les différents systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques pour calculer, démontrer, ou modéliser

Les systèmes sémiotiques ont d’abord été développés et ils sont surtout utilisés pour *communiquer et transmettre des informations*. En ce sens, et uniquement en ce sens, on a pu assimiler les codes et les langages. Les systèmes sémiotiques ont aussi été développés pour remplir une autre fonction, psychiquement fondamentale, l*’objectivation*, comme l’attestent toutes les peintures pariétales qui remontent à des dizaines de milliers d’années. L’objectivation est une extériorisation qui permet de faire émerger ainsi des significations, des objets, dont on n’avait pas conscience avant leur objectivation sémiotique. Mais, ils permettent également de remplir la fonction de traitement, qui est cognitivement et épistémologiquement fondamentale pour le développement de la pensée et de la connaissance.

Cette fonction dépend entièrement des opérations sémiotiques de substitution qu'on peut effectuer. Car ces opérations permettent de produire et de prouver de nouvelles connaissances à partir de données de départ, prises à titre d'hypothèses (P.5). *L'utilisation des systèmes sémiotiques en mathématiques se fait exclusivement pour remplir la fonction épistémologique et cognitive de traitement, et jamais celle de communication.* Et les systèmes sémiotiques sont choisis et développés par rapport à la puissance et la diversification des opérations sémiotiques de substitution qu'ils permettent d'effectuer. On pourrait dire que les registres sont les systèmes sémiotiques qui permettent de remplir la fonction de traitement, indépendamment de toute fonction de communication.

On peut distinguer quatre types de registres. Il y a tout d'abord les deux types qui permettent de produire des *expressions*, c'est-à-dire des organisations linéaires d'unités (mots, lettres, chiffres, symboles de relation, etc.) en fonction de règles syntaxiques : d'une part les énoncés dans une langue naturelle et, d'autre part les équations, les formules dans écriture combinant des lettres de variables, des symboles d'opérations et un symbole de relation. Il y a ensuite les deux types de registres qui correspondent aux *deux types de visualisation des relations entre des ensembles d'éléments* : la visualisation géométrique et la visualisation analytique par des systèmes des systèmes de coordonnées. On oppose ainsi les registres qui permettent de produire des représentations discursives et ceux qui permettent de produire la diversité des représentations visuelles 2D/2D (*Ver,* p. 118, Fig. 6).

Mais on peut aussi regarder cette classification d'un point de vue cognitif et didactique. Il y a tout d'abord les deux types de registres qui sont communément mobilisés dans tous les domaines de la connaissance : la langue naturelle, et la visualisation fondée sur la reconnaissance perceptive des formes en tant que contours fermés et sur la reconnaissance de leurs relations topologiques (*Ver,* p. 87, Fig. 5). Ce sont ces deux types de registres qui sont mobilisés pour les mathématiques enseignées à l'Ecole Primaire. Les deux autres types de registres sont, au contraire, spécifiques aux mathématiques. Le développement des mathématiques avec l'algèbre et l'analyse aux XVIe et XVIIe siècles relèvent d'une véritable révolution sémiotique (*Ver*, p.24-25). Ce sont ces registres qui sont utilisés au Collège pour apprendre à résoudre des équations et à les utiliser comme outils de résolution de problèmes, et pour introduire les fonctions.

Cette distinction de quatre types de registres, qui sont utilisés en mathématiques pour calculer, pour démontrer, ou pour modéliser des phénomènes observés, permet donc de préciser la deuxième idée-force intrinsèque à la notion de système sémiotique :

P. 5' *Chaque registre permet une opération de substitution qui lui est spécifique et que* *les autres registres ne permettent pas d'effectuer.*

Il y a ainsi quatre types d'opérations sémiotiques de substitution.

Les plus évidentes sont celles qu'on qualifie de « calcul », dans lesquels on substitue les unes aux autres soit des expressions numériques, soit des expressions littérales, soit des expressions algébriques. Ainsi Condillac a consacré tout un ouvrage, *Le langage des calculs* (1798)[15], pour expliquer les limites insurmontables de la langue naturelle, en termes de capacité de mémoire pour effectuer les opérations arithmétiques les plus élémentaires, et donc la nécessité d'utiliser non seulement des systèmes de numération mais aussi l'écriture littérale et l'écriture algébrique pour les calculs.

Mais pour les démonstrations, la langue naturelle a été depuis les *Eléments d'Euclide*, le registre de référence, et elle l'est restée dans *Les fondements de la géométrie d'Hilbert* (1899). Mais bien évidemment on n'y raisonne pas et l'on n'y argumente pas comme Voltaire le faisait dans le *Traité sur la Tolérance* (1763) pour défendre l'innocence de Jean Calas (Duval, 1993, p. 42, 47), ni comme on le fait dans n'importe quel débat sur une question de société. Tandis que l'argumentation fonctionne par accumulation d'argument et de données, le raisonnement déductif fonctionne par substitution de propositions selon le schéma du *modus ponens*.

Les deux registres de visualisation mobilisent aussi deux types de substitution différents. L'utilisation heuristique des figures en géométrie consiste à la figure de départ, qui visualise les hypothèses d'un problème, une autre figure qui est une réorganisation, enrichie ou non, de cette figure départ (*Ver*, p. 89, Fig. 6). L'utilisation plus expérimentale des graphiques cartésiens est au contraire un zoomage sur des parties de courbes ou de droites tracées sur le plan défini par deux axes gradués. Il consiste à substituer à une première graduation des axes une graduation plus petite (*Ver*, p.107, Fig. 1). De cette manière, la deuxième graduation substitue plusieurs segments de droites ou plusieurs arcs de courbes, semblables ou différents, au segment ou à l'arc de courbe déterminé par la première graduation. Mais, à la différence des autres opérations de substitution, le zoomage exige que l'on revienne à l'équation correspondante, c'est-à-dire à un autre registre, pour calculer les nouvelles coordonnées.

La question de la distinction des unités de sens qui permettent de reconnaître, à partir du contenu d'une représentation, quel est l'objet représenté, se pose de manière différente pour les représentations produites avec un registre que pour celles qui sont produites avec les

[15] Publication posthume

autres systèmes sémiotiques. Car toutes les unités de sens dépendent d'une *opération sémiotique de désignation qui réfère* indifféremment à un objet ou à un groupement de signes (termes quantifiés, lettres de variables et chiffres articulés par un symbole d'opération). Cela conduit à reformuler la troisième idée-force intrinsèque à la notion de système sémiotique :

P.6' *Les unités de sens qui permettent de reconnaître à quoi le contenu d'une représentation réfère sont celles qui résultent des opérations de désignation spécifiques à chaque registre.*

Cela conduit à distinguer dans toutes les représentations discursives le niveau des *expressions incomplètes* et celui des *expressions complètes*, qui sont des unités de sens radicalement différentes. Les expressions incomplètes sont les unités de sens explicitement construites pour désigner quelque chose. Ob pourrait aussi les appeler les *unités de sens référentielles*. Dans registre de la langue naturelle, elles correspondent à tous les syntagmes nominaux (*Ver*, p. 78, Fig. 2). Dans le registre de la visualisation géométrique, les opérations sémiotiques sont des opérations figurales (*Ver,* p. 87, Fig. 5). Dans le registre des écritures symboliques de relations, les expressions incomplètes sont des désignations fonctionnelles, par exemple 2x ou x+2, et des syntagmes opératoires comme 2 (x+2) ou (x +1) (x-1). Les expressions complètes sont les propositions ou les équations dont l'unité de sens est caractérisée par une valeur de vérité, d'indécidabilité, de tautologie, etc. Dans le registre de la visualisation géométrique, les unités de sens référentielles sont les unités figurales. Or le nombre d'unités figurales que l'on peut reconnaître dans une figure géométrique dépend du choix de l'une des trois manières possibles de la regarder (*Ver*, p. 87, Fig. 5). Dans les registres de visualisation graphique, les unités de sens sont les valeurs visuelles qualitatives d'un graphe, et *ces valeurs ne peuvent être discriminées que par le jeu des oppositions visuelles* entre les différentes positions, et entre les orientations possibles d'une droite ou d'une courbe sur les deux axes (*Ver*, p. 111, Fig. 3).

La réponse à la question « Qu'est-ce qu'un registre » tient donc dans les propositions (P.5, P.6) qui concernent tous les systèmes sémiotiques et (P.5', P.6) qui concernent les registres. La différence entre les systèmes sémiotiques et les registres tient au fait que les premiers sont utilisés et développés pour remplir la fonction de communication, tandis que les seconds sont uniquement utilisés pour calculer, déduire, démontrer et modéliser. En outre cette réponse présuppose que l'on voie l'ampleur et la diversité de tout ce qu'on appelle « représentation » (P.1, P.2), et que l'on ne confonde pas les représentations sémiotiques et les représentations non-sémiotiques, c'est-à-dire deux types de relations contraires entre l'objet représenté et sa représentation. Cette réponse appelle deux remarques.

Tout d'abord, on a pris l'habitude de parler des « registres» ou de la « théorie des registres ». C'est là une abréviation qui est commode oralement dans les discussions, mais qui conduit à beaucoup de confusions, car elle court-circuite toute analyse de l'ampleur et de la diversité des « représentations » et elle tend à méconnaître la différence radicale entre le contenu des représentations et l'objet lui-même, comme si les objets mathématiques étaient accessibles indépendamment de la production de représentations sémiotiques.

Ensuite, même si on s'en tient au seul point de vue mathématique, la notion de registre s'impose pour *pouvoir décrire et analyser la manière mathématique de travailler.* Car toutes les analyses de l'activité mathématique qui s'en tiennent à l'utilisation de concepts, de propriétés et d'algorithmes, scotomisent deux caractéristiques fondamentales de l'activité mathématique. D'une part, toutes les formes de calcul (numérique, algébrique, différentiel, logique, etc.) sont des transformations de représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques. D'autre part, la modélisation des phénomènes physiques, biologiques ou économiques, passe par l'utilisation d'un registre de représentation sémiotique.

II. POURQUOI LA NOTION DE REGISTRE S'IMPOSE-T-ELLE ?

Évidemment la prise en compte des registres et l'analyse de l'activité mathématique en termes de registres n'ont aucun intérêt pour les mathématiciens. Car le progrès des connaissances mathématiques est dans l'établissement de nouveaux résultats, c'est-à-dire de nouveaux théorèmes. Et, pour cela, la prise en compte des registres n'intervient d'aucune manière dans la manière de travailler de faire de la recherche en mathématiques. Et, cependant, des mathématiciens comme Descartes, Leibniz, Bolzano, Frege et Hilbert, ont intégré une réflexion sur les représentations sémiotiques utilisées à leur manière de faire des mathématiques. Certains, comme Descartes, Leibniz et Frege ont même contribué aux développements de nouveaux registres de représentation.

Tout change lorsqu'il s'agit d'enseigner les mathématiques et surtout lorsqu'il s'agit d'enseigner les mathématiques à tous les enfants de 6 à 16 ans. C'est la période où l'enfant accède, ou plutôt doit accéder à une pleine autonomie intellectuelle, et donc à une pleine confiance en ses capacités non seulement à résoudre des problèmes, mais aussi à en poser (Duval 2013). Et c'est la période où l'enseignement n'est pas diversifié en filières selon des pré-orientations professionnelles. L'analyse de l'activité mathématique en termes de registres s'avère cruciale pour l'organisation d'un enseignement des mathématiques qui s'adresse à tous les élèves de 6 à 16 ans. Trois raisons l'imposent. Les deux premières tiennent aux caractéristiques de l'activité mathématique, quand on l'étudie des points de vue épistémologique et cognitif, et non plus seulement mathématique. La troisième tient à l'équivoque didactique du langage en classe.

2.1 Le point de vue épistémologique : EN MATHEMATIQUES, ON NE TRAVAILLE QU'AVEC DES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES.

Rappelons tout d'abord que le terme « épistémologie » est un terme tardif, forgé au début du XXe siècle, et que l'on peut faire remonter le premier travail d'épistémologie à la *Critique de la Raison pure* (1789). Dans cet ouvrage, Kant a cherché à expliquer les développements totalement différents des mathématiques (la géométrie euclidienne et l'arithmétique) et de la Physique (celle de Newton, sans aucune référence à Galilée)[16]. L'épistémologie est essentiellement comparative. Mais, en relation plus ou moins directe avec le développement de l'histoire des mathématiques et de la didactique, une épistémologie intra-mathématique, qui se focalise sur le développement d'un concept mathématique particulier au cours de l'histoire. Tous les travaux d'épistémologie sur lesquels la didactique des mathématiques s'est appuyée depuis les années 1970, relèvent d'une épistémologie intra-mathématique, centrée sur la formation et l'acquisition de concepts : fonction, nombre négatif, vecteurs, etc. Or c'est seulement en comparant ce qui constitue une découverte dans les différentes disciplines ainsi que les démarches de preuve qui établissent une nouvelle connaissance, que l'on peut voir que les mathématiques sont le seul domaine scientifique où l'on travaille uniquement et exclusivement avec des représentations sémiotiques.

Limitons ici à ce qui constitue une découverte dans les disciplines scientifiques autres que les mathématiques. On peut affirmer que l'utilisation d'une lunette par Galilée en 1609 pour observer la lune et le firmament constitue une découverte au moins aussi importante que la théorie de Newton. Car l'histoire des sciences, aussi bien en physique qu'en biologie, à la suite de l'utilisation d'un microscope par Hooke (1665), est celle de l'invention d'instruments sans cesse plus puissants pour accroître le champ perceptif des phénomènes et des objets observables. En d'autres termes, ce sont toutes les représentations non-sémiotiques, produites par des instruments scientifiques, qui sont la source de nouvelles découvertes et qui restent à la base des preuves en physique. Évidemment, il n'y a aucun instrument scientifique qui permet d'observer les objets mathématiques, à commencer par les nombres.

Revenons maintenant au montage photographique de Kosuth. Son principe est de juxtaposer un objet avec plusieurs de ses représentations possibles. Ce principe peut servir de test pour une analyse épistémologique de l'activité mathématique. Peut-on JUXAPOSER un

[16] Husserl, dans son célèbre ouvrage de 1936 *La Crise des sciences européennes*, se réfère essentiellement à la Physique de Galilée, et non pas à celle de Newton, et à la géométrie euclidienne.

objet mathématique, un nombre entier ou une fonction affine par exemple, avec ses différentes représentations ? Si l'on regarde les manuels et plus généralement tous les outils pédagogiques, la réponse semble être « oui !», puisqu'on recourt systématiquement à la multireprésentation, en juxtaposant sur la même page au moins deux représentations différentes d'un même objet. Mais alors dans cette juxtaposition de présentations différentes d'un même objet, laquelle correspond à l'objet lui-même (Ver, p.45, Fig.3) ? En réalité, aucune. Car, du point de vue mathématique, ce qui peut être considéré comme l'objet lui-même est soit l'énoncé d'une définition ou celui d'un théorème, soit l'expression symbolique d'une relation permettant un calcul, c'est-à-dire une représentation sémiotique produite dans l'un des deux types de registres discursifs. Et il n'y a pas d'«intuition » des objets mathématiques eux-mêmes, sauf peut-être pour les mathématiciens professionnels après plusieurs années d'expérience. Dans leur bouche, l'emploi du mot « intuition » est purement philosophique et tous n'ont pas la même philosophie des mathématiques ! Là, nous sommes sur une autre planète que celle des neuf dixièmes des élèves de 6 à 16 ans. Et cela nous conduit à formuler la proposition épistémologique fondamentale concernant les mathématiques :

P.7 *Les objets mathématiques sont uniquement accessibles par la production de représentations sémiotique.*

Les mathématiques sont la seule discipline où l'on travaille exclusivement avec des représentations sémiotiques, parce qu'il n'y a pas d'autres moyen d'accès aux objets mathématiques. Et cela met les mathématiques dans une situation épistémologique qui est totalement à part de celle des autres disciplines scientifiques.

La connaissance mathématique ne se fonde pas sur « l'abstraction », mais sur la mobilisation de systèmes sémiotiques qui sont uniquement utilisés pour remplir une fonction de traitement et non pas des fonctions de communication ou d'objectivation.

2.2 Le point de vue cognitif : TOUTE ACTIVITE MATHEMATIQUE MOBILISE AU MOINS DEUX REGISTRES.

Du point de vue mathématique, un seul registre est objectivement nécessaire, celui dont les opérations sémiotiques de substitution vont permettre soit de justifier une démarche qui conduise à un résultat nouveau soit de démontrer une conjecture (P. 5'). Depuis la révolution sémiotique qui s'est produite en mathématiques aux XVIe et XVIIe siècles, ce registre est l'un des différents registres de calcul : numérique, littéral, algébrique, différentiel ou intégral, ou vectoriel, etc.

Cependant, il y a des domaines où il faut travailler en parallèle dans deux registres différents, c'est-à-dire faire d'incessants allers-retours entre un registre discursif et un registre de visualisation. C'est évidemment le cas de la géométrie élémentaire enseignée au Primaire et au Collège. C'est aussi celui de la notion des fonctions affines enseignée au Collège. La mobilisation d'un deuxième registre est également pour la modélisation des données, soit pour mettre la description verbale ou purement qualitative des données du problème sous une forme qui permette un calcul, soit pour organiser les données quantitatives relevées dans une expérience. De toute manière, la possibilité de mobiliser un deuxième registre est nécessaire, pour voir comment un problème peut être résolu, c'est-à-dire dans quel registre la solution mathématique peut être obtenue ou comment démontrer une conjecture. *De manière plus fondamentale, les registres mobilisés ne remplissent pas la même fonction cognitive dans la conduite de l'activité mathématique.* Tandis que l'un permet d'effectuer la démarche mathématique de résolution d'un problème, ou de démontrer une conjecture, les autres remplissent une fonction heuristique, ou bien permettent de contrôler «intuitivement» la pertinence des résultats obtenus et la fiabilité des traitements effectués.

L'analyse cognitive de l'activité mathématique est l'analyse de tous les changements de registre qui sont constamment requis, explicitement ou implicitement, pour pouvoir comprendre en mathématiques et plus encore pour « faire des mathématiques », ou pour pouvoir appliquer des connaissances mathématiques. Concrètement, *changer de registre c'est CONVERTIR* un énoncé de problème en une égalité numérique à trou ou en équation (*Ver*, p.127, Fig.11), reconnaître dans une configuration géométrique quelle propriété utiliser, c'est-à-dire quelle définition ou quel théorème appliquer (*Ver*, p.96, Fig.12) ou reconnaître la forme d'une équation dans une représentation graphique (*Ver*, p.110-111, Fig. 2 et 3).

Or ce changement de registre n'est jamais réellement pris en compte dans les analyses didactiques qui s'en tiennent d'une part à une analyse des connaissances mathématiques à enseigner faite régressivement en termes de prérequis, puis en prérequis de prérequis, et d'autre part à des modèles généraux d'acquisition des connaissances qui seraient valables pour tous les domaines de la connaissance : modèles néo-constructivistes, pragmatistes, ou interactionnistes. *Or le changement de registre,* qui doit être plus ou moins spontané sous peine de blocage sans issue pour l'élève, *est le premier grand obstacle à la compréhension en mathématiques.* Car il se heurte à l'impossibilité épistémologique et, par suite cognitive, de ne jamais confondre les représentations utilisées et l'objet mathématique représenté (ci-dessus, 1.1).

Ne pas confondre l'objet représenté et l'une des différentes représentations est évident pour tous les objets que l'on peut percevoir (P.1). Cela ne pose pas davantage de difficulté lorsqu'on utilise un instrument qui agrandît le champ de perception vers l'infiniment petit ou vers l'infiniment grand, en raison de la relation de causalité qui relie l'image obtenue avec l'instrument à ce qui est émis de l'objet lui-même. Du moins jusqu'à certaines échelles de grandeur. Ainsi on peut voir, ou plutôt deviner le relief de la lune, pareil à celui de la terre avec une lunette d'un grossissement analogue à celle de Galilée. En revanche, quand les objets mathématiques ne sont accessibles que moyennant la production de représentations sémiotiques, par exemple une suite ordonnée de mots que l'on met en correspondance avec de très petites collections d'objets pour l'accès aux tout premiers nombres naturels, la situation change radicalement. Car alors il y a autant de représentations différentes, c'est-à-dire de contenus présentés, que de systèmes sémiotiques utilisables (P.3), et donc autant d'objets différents que de contenus différents. L'activité de conversion est cognitivement impossible, puisqu'elle ne peut se faire par rapport à quelque chose de serve de référence invariable. En d'autres termes, il y un cloisonnement entre les représentations possibles d'un même objet mathématique, qui exclut qu'on puisse le reconnaître dans un contenu autre que celui qui a initialement servi à l'introduire.

2.3 La double équivoque didactique de L'UTILISATION DU LANGAGE NATUREL EN CLASSE, au Primaire et au Collège.

La langue naturelle est un registre au même titre que les systèmes d'écriture symbolique qui constituent les différents registres de calcul. Mais il y a une équivoque didactique dans son emploi pour faire acquérir des connaissances mathématiques. Cette question est d'autant plus cruciale que des années 1970 aux années 1990-2000, les positions didactiques sont passées d'un rejet presque total du rôle du langage dans l'apprentissage des mathématiques à la reconnaissance du rôle moteur des interactions verbales en classe pour l'acquisition des connaissances.

Il y a en fait deux utilisations contraires de la langue naturelle comme registre de représentation sémiotique. L'une est son utilisation commune et spontanée à des fins de COMMUNICATION **ORALE** entre les élèves, et entre les élèves les enseignants, lors des différentes phases d'une séquence d'activités. L'autre est son utilisation mathématique à des fins de TRAITEMENT dans des PRODUCTIONS **ECRITES**, pour formuler des définitions, déduire partir de propriétés données d'autres propriétés en utilisant des théorèmes, et aussi pour décrire les données d'un problème additif, multiplicatif, de mise en équation ou d'application d'une propriété géométrique. Il n'y a rien de commun entre ces deux pratiques du langage naturel.

Pour le voir, il faut se rappeler que la langue naturelle est un système sémiotique et non pas un vocabulaire et des règles syntaxiques. Autrement dit, ce qui est essentiel dans la maîtrise d'une langue naturelle, ce n'est pas la connaissance du vocabulaire, mais la prise de conscience de toutes les opérations discursives lui permettant d'articuler des mots en syntagmes nominaux pour désigner un objet, en propositions, ou une description cohérente (P.6).

En nous limitant ici à la seule opération de désignation d'un objet, sa puissance et aussi sa difficulté est qu'il faut construire une description de ce que l'on veut désigner, parce qu'il n'y a jamais assez de mots pour nommer tout ce dont on veut parler. Prenons l'exemple de la désignation d'un point ou d'un segment sur une figure géométrique, sans utiliser la pratique aveugle de l'utilisation d'une lettre. On est toujours obligé de construire une description géométrique en utilisant non pas un terme géométrique mais deux ! Et en outre, il y a plusieurs descriptions possibles (*Ver*, p. 78, Fig.2). Il suffit de demander aux élèves d'écrire des messages de construction de figure géométrique pour le constater. Prenons maintenant la situation inverse, celle où les élèves n'ont pas un produire une suite d'instructions, mais seulement à lire un énoncé de problèmes. La seule tâche ici est d'identifier les expressions qui décrivent chacune des données nécessaires pour résoudre le problème. Ici la difficulté de l'opération de désignation, comme on peut déjà le vérifier avec les problèmes additifs, vient de ce que l'opération de désignation croise deux types d'information sémantiquement hétérogènes, l'une sur la succession de phases et l'autre sur le sens positif ou négatif d'un changement *(Ver,* p.129, Fig. 12). Les opérations de désignation de chaque donnée dans les énoncés de problèmes qui se réfèrent à une situation « réelle» sont *des opérations de désignation croisée*. Et cela est encore plus évident pour les problèmes demandant une mise en un système d'équations des données. Comment s'étonner alors que la plupart des élèves aient des difficultés de « lecture » des énoncés de problème ?

Indépendamment de l'écart entre la pratique orale du langage, dans laquelle la désignation des objets dont on parle est réduite au minimum puisqu'on a souvent sous les yeux ce dont on parle, et la pratique écrite où sa complexité s'impose, il y a une différence cognitive entre une utilisation mathématique du langage naturel et une utilisation non-mathématique. En dehors des mathématiques, dans les récits, les reportages, les témoignages, les explications, le langage est presque toujours employé pour lui-même, les photos, les caricatures, les cartes ou les schémas remplissant le plus souvent une fonction de support illustratif. *En mathématiques au contraire le langage naturel, est toujours utilisé en SYNERGIE COGNITIVE avec un autre registre de représentation*, même lorsque les explications et les raisonnements sont uniquement fait dans la langue naturelle (ci-dessus 1.3). Et c'est ce qui rend toute explication verbale des résultats mathématiques si étrangement insaisissable pour qui ne peut pas *convertir spontanément* cette explication dans un autre registre que celui de la langue naturelle.

La notion de registre s'impose pour pouvoir analyser l'activité mathématique. Tout d'abord, il y a le fait que les mathématiques sont cette forme d'activité intellectuelle qui exige de mobiliser plusieurs registres de représentation à la fois et, donc, de pouvoir passer spontanément de l'un à l'autre. Et il y a une autre raison qui va à l'encontre des pratiques pédagogiques et didactiques dominantes. Les deux registres culturellement communs, celui de la langue naturelle et celui de la reconnaissance des formes perçues, sont utilisés en mathématiques d'une manière qui va totalement à l'encontre de leur pratique spontanée en dehors des mathématiques.

Or l'analyse de l'activité mathématique doit être faite en relation avec celle des difficultés systématiques et récurrentes de compréhension que l'apprentissage des mathématiques soulève, de manière insurmontable, pour la grande majorité des élèves. Car c'est seulement à partir de ce que l'activité mathématique a de cognitivement spécifique par rapport aux autres types de connaissance, que l'on peut *identifier les facteurs cognitifs du développement de la compréhension en mathématiques.* Et si l'on veut que tous les élèves entrent dans la manière mathématique de travailler et qu'ils puissent réellement utiliser des connaissances mathématiques, il faut que ces facteurs cognitifs puissent se traduire en variables didactiques pour organiser des situations d'apprentissage.

III COMMENT UTILISER LES REGITRES ?

Les deux seuils de compréhension que la grande majorité des élèves ne parvient jamais à franchir, durant toute la période de l'enseignement commun (6-16 ans), sont le seuil du changement de registre (2.2) et celui des opérations des opérations sémiotiques de substitution d'une représentation à une autre, spécifiques à chacun des registres (P.5').

3.1 Une opération fondamentale pour apprendre à comprendre en mathématiques : LA COMPARAISON DES CONTENUS des représentations sémiotiques

Comprendre en mathématiques, c'est d'abord reconnaître les objets mathématiques non seulement quand on en change la représentation sémiotique en changeant de registre, mais *c'est aussi pouvoir soi-même changer de registre pour changer la représentation des objets.* Or le premier grand obstacle à ce changement est la différence entre :

— LE CONTENU de la représentation d'un objet mathématique qui dépend du registre utilisé et non pas de l'objet représenté, puisque la production de représentations par des systèmes sémiotiques se fait indépendamment de l'objet représenté (ci-dessus, 1.1)

— l'OBJET mathématique représenté qui est inaccessible, ni perceptivement ni instrumentalement inaccessible (ci-dessus, 2.1).

Lorsqu'on utilise les deux registres culturellement communs pour représenter tous les objets qui sont accessibles sensoriellement ou instrumentalement, c'est-à-dire en dehors et indépendamment de toute production d'une représentation sémiotique, le changement de registre ne soulève aucune difficulté. Car la comparaison de deux représentations dont les contenus n'ont strictement rien de commun entre elle est une comparaison indirecte. Le contenu de chacune des représentations peut être comparé à l'objet lui-même, sans avoir à s'occuper du contenu de l'autre représentation. L'accès non-sémiotique à l'objet représenté sert de repère stable ou de point d'ancrage pour reconnaître que les deux représentations différentes, qu'elles soient sémiotiques ou non sémiotiques, représentent bien le même objet. Autrement dit, *la reconnaissance des objets accessibles perceptivement ou instrumentalement repose sur l'association de deux comparaisons indépendantes l'une de l'autre.*

Ce processus cognitif, qui permet à la fois de reconnaître un même objet physique à travers des représentations différentes, ne peut pas fonctionner pour reconnaître un même objet mathématique dans deux représentations différentes. En mathématiques, on ne dispose seulement que de représentations sémiotiques différentes. Et comme toute activité mathématique mobilise toujours au moins deux registres, comment savoir si deux représentations produites respectivement dans deux registres représentent un même objet ou si, au contraire leurs contenus différents ne représentent pas deux objets différents ? Pour répondre à cette question, la seule opération cognitive possible est une opération de comparaison directe, et non pas indirecte, des contenus des deux représentations. On peut la formuler ainsi :

P. 8 *Seule la mise en correspondance des unités de sens qui sont propres aux différents niveaux d'organisation des contenus respectifs de deux représentations sémiotiques, permet de reconnaître si elles représentent le même objet.*

À la différence de tous les codages, la difficulté de cette comparaison vient de ce que les contenus respectifs de deux représentations sémiotiques fusionnent des unités de sens qui relèvent de niveaux d'organisation différents (P. 6 et P.6'). Prenons un exemple qui pourrait être considéré comme un contre-exemple pour cette proposition : la description numérique d'une suite de configurations carrées de points ou de jetons (*Ver,* p. 53, Fig. 6). Les contenus des deux types de représentations semblent n'avoir qu'un niveau d'organisation. Et pourtant il y a deux descriptions numériques possibles différentes, selon que l'on reconnaît les unités de sens qui sont distingués dans les configurations numériques de départ. Ou bien on reconnaît seulement comme unités de sens les configurations globales et on écrit la suite 1, 4, 9, … Ou bien on reconnaît deux types d'unités de sens, la configuration globale précédente et demi-contour que la configuration suivante ajoute, et l'on écrit alors la suite 1, +3, +5, … Mais il suffit de varier la forme que la configuration suivante ajoute, pour que la variété des unités de sens possibles surgisse immédiatement (ibid. p. 54-55, Fig. 7 et 8). Évidemment la mise en correspondance est d'emblée plus complexe lorsqu'il s'agit de mettre en correspondance les unités de sens d'un énoncé de problème additif et les unités de sens d'une égalité numérique à trou, ou celles d'un graphique cartésien et celles d'une équation.

Autrement dit, pour pouvoir comparer les contenus de deux représentations sémiotiques, il faut discriminer les différentes unités de sens pertinentes qui constituent les contenus respectifs des deux représentations. Mais pour pouvoir les discriminer, et pour faire apprendre à les discriminer, *il faut varier systématiquement les unités de sens du contenu dans le registre de départ et observer les unités de sens qui changent dans le contenu de la représentation du registre d'arrivée* (Duval, 2011 c, 2012). Les variations systématiques faites dans le registre de départ doivent porter sur les unités de sens propres au registre lui-même (P. 6'). Ainsi pour la visualisation graphique des équations, les variations doivent correspondre à des variations visuelles qualitatives et non pas à des variations de valeurs numériques. Et dans le registre de l'écriture des équations les seules variations à prendre en compte sont les valeurs d'opposition (P. 4) plus grand ou plus petit que 1 et plus grand et plus petit que 0. Ces tâches de variations systématiques sont des tâches cognitives. Et il y a autant de types de tâches cognitives qu'il y a de couples {Registre de départ, registre d'arrivée}. Car il suffit d'inverser le sens d'un changement de registre pour que la tâche cognitive soit complètement différente et que la conversion facile dans un sens ne le soit plus du tout dans l'autre.

L'utilisation de la langue naturelle comme registre mathématique présente cependant une particularité que nous pouvons formuler ainsi

P. 9 *Lorsque la langue naturelle est utilisée comme registre de départ et que le registre d'arrivée est un registre d'écriture symbolique de relations, ou lorsqu'elle est utilisée comme registre de traitement, il faut recourir à des représentations bidimensionnelles intermédiaires.*

Ces représentations bidimensionnelles intermédiaires ont pour but d'apprendre à discerner les unités de discours qui sont mathématiquement pertinentes dans un énoncé de problème additif

(*Ver*, p.129, Fig. 12), dans la mise en équation ou en un système d'équations des données d'un problème (Duval, Campos, Dias, Barros, 2015) ou, en géométrie, dans un raisonnement visant à justifier ou à prouver en utilisant des théorèmes (Duval, 2007, Egret, Duval, 1989). Elles sont transitionnelles, c'est-à-dire que les élèves les éliminent comme un détour inutile lorsqu'ils ont compris « comment faire ».

Sans apprentissage conduisant à une prise de conscience de cette opération fondamentale, il est absolument impossible de ne pas confondre chaque représentation sémiotique d'un objet mathématique avec l'objet lui-même. Cette impossibilité conduit la très grande majorité des élèves dans l'impasse du cloisonnement des registres que nous avons signalée plus haut, et dans l'impossibilité d'utiliser des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes. Et cela conduit à cette conséquence didactique que nous pouvons formuler ainsi :

P. 10 *La prise de conscience* DE L'OPERATION DE MISE EN CORRESPONDANCE DES UNITES DE SENS SPECIFIQUES AUX CONTENUS RESPECTIFS *de deux représentations sémiotiques est le premier seuil à franchir pour comprendre, et donc pour pouvoir apprendre, en mathématiques.*

La difficulté pour entrer dans la manière de penser et de travailler en mathématiques tient à la situation épistémologique qui est totalement à part de celle des autres disciplines scientifiques (*ci-dessus*, 2.1). Cela entraîne ce que nous avons appelé le « paradoxe cognitif » des mathématiques, c'est-à-dire l'impossibilité de ne pas confondre les objets mathématiques et les différentes représentations qu'on en utilise. En ce sens la difficulté des mathématiques ne tient pas au fait qu'elles seraient « abstraites », mais au fait qu'on n'y travaille qu'avec des représentations sémiotiques. C'est pourquoi le recours à des représentations concrètes est un support fallacieux. Car elles laissent entière la difficulté du changement de registre que nous venons de voir. Et, en outre, elles soulèvent le problème de pertinence et de la congruence des représentations concrètes qui sont choisies pour introduire le registre de représentation qu'il s'agit d'utiliser.

3.2 Le deuxième seuil de la compréhension en mathématiques : les OPERATIONS DE SUBSTITUTION SPECFIQUES A CHAQUE REGISTRE.

C'est là que commence vraiment l'activité mathématique, c'est-à-dire la connaissance mathématique, parce qu'en mathématiques « faire » « comprendre » et « connaître » sont inséparables. On ne peut pas, comme dans les autres disciplines, comprendre le résultat d'une démarche si l'on ne voit pas comment s'y prendre pour faire la démarche qui y conduit.

On commence à faire des mathématiques bien sûr dès qu'on peut utiliser les petits nombres naturels, c'est-à-dire effectuer des dénombrements et des opérations additives. Et cela relève de ce qu'on pourrait appeler *des mathématiques orales et spontanées*, n'exigeant que les ressourcés de dénomination qu'offre une langue naturelle et du support de « marques d'unités » (doigts, cailloux, abaques). Il requiert aussi le recours à des instruments spécifiques (le compas et une règle non-graduée) pour construire des formes c'est-à-dire pour « idéaliser » des formes perçues, et non pas seulement les dessiner, eût-on la main de Léonard ou celle de Picasso. On pourrait s'arrêter là pour un enseignement général à tous les élèves et même ignorer les théorèmes les plus classiques d'Euclide… Mais, ce n'était là qu'une émergence. Le développement des mathématiques a trouvé des impulsions nouvelles avec *le développement des systèmes d'écriture* permettant le symbole « 0 », les opérations multiplicatives, et la possibilité de ne pas se limiter aux nombres que l'on peut énumérer successivement. Depuis plus de vingt-cinq siècles, ce développement a été marqué par le développement et la diversification de registres de représentations sémiotiques. Ce qui est d'ailleurs le plus notable est qu'à chaque révolution en ce domaine, d'Euclide à Descartes et Leibniz, puis à Frege et Hilbert, *on a redéfini en quelque sorte la* METHODE MATHEMATIQUE et ses exigences concernant la généralisation et les démonstrations : du *more geometrico* on est passé au *more algebranalytico,* puis au *more structurae* et plus récemment au *more algorithmico.* Au primaire, puis au Collège, on demande maintenant aux élèves de sauter très vite des mathématiques orales et spontanées à toutes ces pratiques écrites des mathématiques.

L'activité mathématique est la *transformation de représentations sémiotiques en d'autres représentations du même registre,* à des fins de calcul, ou de démonstration par dérivation déductive d'une proposition, ou d'exploration de processus de transformations, ou d'heuristique dans la résolution de problèmes ou encore de modélisation (*ci-dessus*, 1.3). Ces transformations correspondent aux opérations de substitution sémiotique qui sont spécifiques au registre utilisé (P. 5'). Ces opérations ne doivent pas seulement être appliquées aux unités de sens référentielles, c'est-à-dire aux expressions incomplètes, aux unités figurales et aux valeurs visuelles qualitatives, comme dans le cas d'un changement de registre, mais aussi aux unités de sens dans lesquelles elles fusionnent : propositions, équations, figures, graphes (P.6'). Ces opérations constituent le fonctionnement cognitif qui est spécifique à la manière mathématique de penser et de travailler. *Nous avons utilisé les registres à la fois comme un cadre de recherche pour déterminer les observables de ce fonctionnement et comme un outil en décrire les processus.*

Dès 1988 nous avons commencé nos recherches sur les deux registres culturellement communs qui sont mobilisés en parallèle dans l'enseignement de la géométrie.

Paradoxalement, celles qui ont concerné les démonstrations en langue naturelle ont été rapidement fructueuses. La raison pour laquelle les démonstrations n'ont pas de sens et n'apportent rien, aux yeux des élèves, est l'*incapacité à prendre en compte le double statut*, *à la fois théorique* (définition, théorème, conjecture) *et opératoire* (données, énoncé-tiers, conclusion à utiliser comme donnée pour le pas suivant), *dans la substitution des propositions les unes aux autres.* Car, comme nous l'avons indiqué plus haut, cela va contre la manière de raisonner et d'argument en dehors des mathématiques (1.3). Nous avons trouvé la représentation bidimensionnelle auxiliaire qui permettait aux élèves de prendre conscience du fait que le statut des propositions était l'unité de sens à prendre en compte avant même celles qui sont articulées dans le contenu des propositions (Duval, 1991, 2007; Egret et Duval, 1989). Cette analyse permet donc de saisir ce qu'on pourrait appeler les gestes intellectuels d'une démonstration mathématique en langue naturelle. C'est leur acquisition qui permet d'entrer dans une démarche mathématique de preuve, de comprendre ce qu'une démonstration apporte, et non pas les méthodes de démonstration qui sont régulièrement mises en avant, quand on s'en tient au seul point de vue mathématique.

En revanche l'analyse du fonctionnement cognitif requis pour pouvoir utiliser les figures de manière heuristique, et pour articuler tout le vocabulaire géométrique avec les unités figurales de n'importe quelle figure, a été longue et complexe. Le problème était de savoir comment caractériser d'un point de vue cognitif la notion *d'unité figurale*. Car prendre comme unités figurales de base, les formes 2D élémentaires des triangles et des quadrilatères remarquables, comme cela est fait pour introduire la géométrie au Primaire, conduisait en impasse. La solution est apparue lorsque nous avons pris la notion de dimension, et non plus celle de forme, comme la caractéristique fondamentale de la visualisation géométrique. Cela a entraîné une conséquence didactique qui va à l'encontre de l'une des activités privilégiées dans l'enseignement de la géométrie. Pour entrer dans la géométrie, les élèves doivent d'abord à apprendre à *déconstruire dimensionnellement les* figures, et non pas à les construire, même en utilisant un logiciel. Ils doivent aussi apprendre *à déconfigurer une figure en sous-figures pour les reconfigurer d'une autre manière*, indépendamment de toute hypothèse, c'est-à-dire de toute propriété donnée. Cette analyse cognitive qui est fondée sur la seule caractérisation dimensionnelle des unités figurales, permet non seulement d'identifier les facteurs qui influent sur le développement de la manière mathématique de voir, mais aussi de voir comme les énoncés géométriques se coordonnent avec la visualisation géométrique. Car on peut montrer comment les différentes unités figurales possibles peuvent êtres mis en correspondance avec les multiples dénominations des objets et des propriétés de la géométrie plane (Duval, 2005, 2015 b).

Des recherches analogues ont été ensuite entreprises sur l'analyse du fonctionnement cognitif requis pour comprendre et utiliser l'algèbre élémentaire enseignée au Collège (Duval, Campos, Dias et Barros. 2015)

3.3 Les DEUX FACES DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE sont-elles prises en compte dans l'organisation de l'enseignement au Primaire et au Collège ?

Toute activité mathématique a deux faces. L'une est celle de toutes les connaissances mathématiques. Elle se présente sous la forme de théorèmes, de définitions, d'algorithmes d'opérations concernant les nombres, les fonctions, les différents types d'espace, etc. Elle relève du seul point de vue mathématique. L'activité mathématique consiste à utiliser ces connaissances pour obtenir de nouveaux résultats mathématiques et aussi pour résoudre les problèmes que l'on rencontre dans les autres domaines de la connaissance et de l'activité professionnelle. Nous l'avons appelée *la face exposée.* L'analyse de la face exposée et enseignée des mathématiques relève du point de vue mathématique. L'autre concerne les gestes intellectuels qui sont spécifiquement liés à la mobilisation de registres et qui caractérisent la manière mathématique de penser et de travailler (P.5'). Sans l'acquisition de ces gestes, il est impossible de comprendre en mathématiques et, donc d'acquérir des connaissances et de savoir les utiliser, quand bien même on aurait réussi localement des épreuves d'évaluation. Nous l'avons appelée *la face cachée* des mathématiques. Son analyse relève d'une analyse cognitive de l'activité mathématique en termes de registres (*ci-dessus*, 2.1 et 2.2). Cette distinction de deux faces de l'activité mathématique, qui peut surprendre, soulève deux questions.

3.3.1 La question du rapport entre les points de vue mathématique et cognitif pour organiser un enseignement s'adressant à tous les élèves jusqu'à 16 ans.

La prise de conscience des gestes intellectuels liés à la mobilisation d'un registre de représentation doit-elle être subordonnée à l'acquisition des connaissances mathématiques et à leur utilisation ? Dans ce cas, on peut penser que les élèves vont progressivement prendre conscience de tous ces gestes en suivant les progressions didactiques établies qui sont établies d'un point de vue mathématique, soit dans les programmes à l'échelle d'une dizaine d'année, soit dans des séquences d'activités en classe à l'échelle de quelques semaines. Ou, au contraire, cette prise de conscience est-elle la condition prérequise pour l'acquisition des connaissances ? Dans ce cas, il n'est pas possible que les élèves, dans leur très grande majorité, puissent par eux-mêmes prendre conscience par eux-mêmes de ces gestes intellectuels, et il est alors nécessaire d'introduire des tâches cognitives spécifiques. Si l'on regarde tous les cursus et tous les programmes qui ont été adoptés jusqu'à maintenant, ils sont organisés uniquement en fonction de la face exposée des mathématiques. Et c'est seulement de manière locale que l'on fait appel à des théories cognitives générales pour justifier l'organisation d'une séquence d'activités en classes centrée sur un « concept », sur le sens d'un type d'opération, etc.

Le franchissement de ce que nous avons appelé les deux seuils de compréhension en mathématiques se fait par la prise de conscience des gestes intellectuels qui permettent de « faire » des mathématiques. Le premier touche la conversion des représentations, c'est-à-dire sur la reconnaissance des objets représentés (P. 3 ; P.8 ; P.10) et le second touche traitements mathématiques liés aux substitutions de représentation sémiotiques qui sont spécifiques à chaque registre (P.5' ; P.10). Ces tâches mathématiques doivent être organisées indépendamment de l'introduction d'un « concept » mathématique. Par exemple la coordination entre les équations et les graphiques cartésiens doit se faire indépendamment de la notion de fonction, puisqu'elle permettra de distinguer une grande variété de graphiques possibles, certains étant les graphes d'une fonction et d'autres non. De même un travail spécifique sur la visualisation géométrique est nécessaire avant d'introduire les triangles et les quadrilatères remarquables. Car l'étude de leurs propriétés géométriques présuppose la coordination du langage et du dessin des formes perçues, ces deux registres culturellement communs étant alors utilisés à rebours de leur emploi spontané.

Plus généralement, toute activité mathématique peut être décomposée en :

— Un ensemble de tâches cognitives à effectuer pour pouvoir mener à bien l'activité mathématique demandée.
— Connaissances mathématiques à appliquer pour résoudre le problème que pose la réussite de l'activité.

Ces deux décompositions, cognitive et mathématique, sont irréductibles l'une à l'autre.

3.3.2 La question de la gestion en classe des activités centrées sur le franchissement des deux seuils de compréhension.

Les tâches cognitives centrées sur le franchissement de seuil de compréhension ne sont en rien des problèmes ou des exercices au sens mathématique. Elles ne peuvent pas être organisées sur le modèle des ingénieries didactiques élaborées pour l'acquisition de l'une des différentes connaissances qui sont au programme d'une année scolaire.

Tout d'abord, leur objectif est l'autonomie intellectuelle de chaque élève en mathématiques, c'est-à-dire que chaque élève ait des capacités d'initiative, d'exploration et contrôle dans la résolution des problèmes. La compréhension en mathématiques n'a besoin d'aucune confirmation par quelqu'un d'autre, ni par l'enseignant, ni par un autre élève. Le critère de cette autonomie intellectuelle est, pour l'élève, *une confiance en lui* dans la conduite d'une recherche et face à des situations nouvelles. Pour l'enseignant, le critère est la *rapidité des conversions* à opérer lorsqu'on varie les représentations d'un objet, et la *pertinence des transformations de représentations* qu'il peut effectuer dans le couple de registres à mobiliser. Autrement dit, en termes cognitifs, l'autonomie intellectuelle résulte de la coordination des registres de représentations. L'activité mathématique requiert toujours *la mobilisation synergique* de deux et parfois trois registres de représentation (*ci-dessus*, 2.2), selon les domaines mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, analyse, etc.)

Ensuite, l'accomplissement des tâches cognitives doit être strictement individuel. Concrètement, cela signifie deux choses. Pas de mise en commun dans une phase dite d'« institutionnalisation » ! Jamais de réponse directe à la question « est-ce juste ?» ! Car l'enjeu de ces tâches n'est pas la « réussite » ou la « bonne réponse » mais la prise de conscience par l'élève des gestes intellectuels liés à la mobilisation des registres de représentation, que ce soient les registres culturellement communs, ou ceux spécifiquement mathématiques. En outre, chaque élève doit avoir l'occasion de s'exprimer lui-même avec ses propres mots sur ce qu'il fait, sans qu'on lui coupe la parole pour le corriger ou pour l'aider. Car, dans ces moments-là, la parole, même lorsqu'elle s'adresse à quelqu'un d'autre, remplit d'abord une fonction d'objectivation, c'est-à-dire de prise de conscience, et non pas une fonction de communication ou de traitement (*ci-dessus*, 2.3). Que ce soit dans la parole ou dans l'écriture le langage joue un rôle fondamental dans toutes les prises de conscience (Duval, 2014).

IV QUELLE EST LA DIFFERENCE ENTRE "OBJET" ET "REFERENCE" ?

Husserl a posé comme principe que toute conscience est *conscience de* QUELQUE CHOSE (*Bewusstsein von* ETWAS)[17]. On peut de même dire que toute représentation est *représentation de* quelque chose. Mais là les choses commencent à se compliquer. Alors qu'on ne confond jamais notre conscience avec ce dont on est conscient, il arrive souvent qu'on ne distingue pas la représentation et le quelque chose qu'elle « présente », c'est-à-dire son contenu. La représentation *ne renvoie pas à* quelque chose d'autre, son contenu est tout simplement le quelque chose. Autrement dit on reste en deçà l'exigence épistémologique fondamentale de ne jamais confondre l'objet et sa représentation. Il faut créer des situations de juxtaposition comme celle du montage photographique de Kosuth pour comprendre le paradoxe de la

[17] *Idées directrices pour une phénoménologie* (1913, tr. Ricœur, 1950) § 34.

représentation. S'il y a trois chaises, le contenu de chaque présentation ne renvoie à rien d'autre que lui-même. Mais s'il n'y a qu'une chaise, les contenus des trois présentations renvoient à quelque chose d'autre que l'on appelera la chaise réelle ou l'objet représenté (P. 2).

L'analyse de la connaissance commence avec l'identification de ce qu'est ce « quelque chose » d'autre auquel renvoie le contenu qu'une représentation présente. Mais étant donné la variété et l'hétérogénéité des systèmes qui produisent des représentations et donc des représentations, il faut d'abord se poser la question de ce qui, dans une représentation permet de reconnaître qu'elle renvoie à quelque chose d'autre.

4.1 Comment le contenu d'une représentation renvoie-t-il à quelque chose d'autre ?

Pour répondre à cette question, il faut prendre en compte, d'une part, les deux types de processus de reconnaissance du quelque chose d'autre présenté par une représentation, et, d'autre part, la différence radicale qui sépare les représentations sémiotiques et les représentations non-sémiotiques.

Les deux types de processus de RECONNAISSANCE DU QUELQUE D'AUTRE auquel une représentation renvoie correspondent à l'opposition psychologique classique entre image et langage.

Les images juxtaposent ou superposent des formes. Le processus de reconnaissance de ce qu'elles présentent repose sur leur RESSEMBLANCE avec les formes des objets perçus dans l'environnement. Deux formes se ressemblent lorsqu'elles ont le même contour fermé. Et la ressemblance devient plus évidente lorsqu'en plus elles conservent entre leurs éléments les mêmes rapports topologiques que les éléments caractéristiques de l'objet représenté (*Ver*, p.86, Fig.4). Ce processus de reconnaissance ne demande pas d'autre apprentissage que la prise de conscience de la différence radicale qui sépare les images 2D/2D et les choses elles-mêmes(2D/3D ou 3D/3D) que l'on peut aussi toucher prendre, manipuler.

Le « langage »[18] est la combinaison de plusieurs mots en l'unité d'un syntagme ou d'une phrase pour dire quelque chose. La relation de référence à ce qui est dit ne se fait pas au niveau des mots, sauf pour les noms propres, mais au niveau du syntagme nominal. *Ce sont les syntagmes nominaux, et non pas les mots, qui réfèrent aux objets dont on parle.* Désigner verbalement quelque chose exige que l'on combine au moins deux mots. En mathématiques, c'est le plus souvent entre quatre et neuf mots ! La REFERENCE dépend donc d'une opération

[18] Les termes « langage» «langue» et « discours » qualifient respectivement une fonction de communication commune aux codes et aux langages, le système linguistique partagé un ensemble d'individus (hispanophones, anglophones, etc.), et tout ce qui se dit oralement ou qui s'écrit dans des textes. Dans la littérature didactique, le mot « langage » a presque toujours été employé (malencontreusement) à la place du mot « discours».

qui doit être intentionnellement effectuée par le locuteur ou par celui qui rédige un énoncé. La compréhension du langage exige que l'on ait pris conscience du système d'oppositions sous-jacent aux mots employés (P.4), de la négation, et des variations de sens possible d'une phrase rien qu'en inversant la succession des mêmes mots (P.5). C'est pourquoi, à la différence des images, le langage exige un apprentissage long et complexe qui prend plusieurs années.

Cette opposition entre les images et le langage, entre la reconnaissance immédiate de ce qu'une image représente et la reconnaissance coûteuse de ce que dit ou explique une suite de mots, est cependant didactiquement équivoque lorsqu'il s'agit d'enseigner les mathématiques. Prenons l'exemple des «figures» en géométrie. Comment reconnaître ce qu'elles visualisent ? Il y a trois manières différentes :

— Par référence, c'est-à-dire par l'indication verbale de propriétés données à titre d'hypothèses.
— Par ressemblance, c'est-à-dire par ressemblance avec des formes ou des dispositions spatiales que l'on perçoit dans la réalité.
— Par déconstruction dimensionnelle, ou par décomposition méréologique pour obtenir une autre reconfiguration (ci-dessus, 3.2). Selon la déconstruction ou la décomposition pratiquée, une figure apparaît alors pouvoir référer à d'autres propriétés que celles données à titre d'hypothèses avec la figure de départ. Autrement dit, *le contenu d'une figure géométrique intentionnellement construite potentiellement est multiréférentielle.*

La première manière est la seule qui soit valide d'un point de vue mathématique. La seconde, au contraire, présente l'avantage de faire apparaître un rapport entre les propriétés géométriques et la réalité La troisième manière est la seule qui permet de véritablement utiliser les figures pour découvrir la solution d'un problème. L'équivoque didactique de l'utilisation des figures dans l'enseignement de la géométrie, vient de ce *qu'on présuppose la possibilité d'un transfert de l'une de ces trois manières aux deux autres, alors qu'il n'y a aucun transfert possible.* D'un point de vue cognitif, une prise de conscience du fonctionnement de chacune de ces trois manières et le développement de leur coordination est nécessaire pour pouvoir faire un peu de géométrie.

LA DIFFERENCE RADICALE QUI SEPARE LES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES et les représentations non-sémiotiques porte sur l'existence ou sur la non-existence du quelque chose d'autre auquel une représentation renvoie. La référence des syntagmes nominaux peut être vide, comme Russel l'avait objecté à Frege avec son célèbre exemple : « L'actuel roi du Brésil est chauve ». Et une image peut représenter un objet impossible (*ci-dessus*, 1.1). Au contraire, il y a toujours quelque chose qui correspond à une représentation non-sémiotique, même si l'interprétation de ce qu'est ce quelque chose peut être difficile. Un exemple de cette difficulté était l'interprétation des différents contrastes d'ombre et de lumière à la surface de la lune que la lunette construite par Galilée montrait (Duval, 2011b).

4.2 Plusieurs types d'objets irréductibles les uns aux autres.

On ne peut évidemment pas parler de «représentation», sans se référer à l'«*objet*» représenté, c'est-à-dire à *ce* qu'elle (re)présente, (re)produit ou remplace. Et lorsqu'une représentation fonctionne parfaitement comme représentation, elle devient TRANSPARENTE à l'objet qu'elle représente. Elle n'est pas remarquée. La distinction entre la représentation et l'objet représenté s'efface. C'est ce qui se passe, par exemple, pour toute personne qui parle dans sa langue. Elle est tout entière dans ce qu'elle veut dire et les mots viennent avant et sans qu'elle remarque. La situation change s'il faut parler, ou simplement lire, dans une autre langue. La représentation devient un objet opaque. Cependant, avec un peu de pratique, les mots étrangers deviennent également transparents. Mais, il n'en va plus du tout de même dès qu'il s'agit de la connaissance, dont l'exigence épistémologique première est de ne jamais confondre la représentation et l'objet représenté. Car son développement passe par l'invention et le développement d'une grande variété de systèmes permettant de produire *des représentations de plus en plus discriminantes.*

Nous avons distingué, en commençant deux grands types de systèmes producteurs de représentation, en prenant comme critère le mode de production : les systèmes sémiotiques et les systèmes non sémiotiques (*ci-dessus*, 1.1 ; 2.1). Ce critère était suffisant pour approcher et pour décrire les registres de représentation sémiotique et leur rôle dans l'activité mathématique. Il ne l'est plus pour dire la nature des objets que chaque domaine de connaissance scientifique nous permet d'atteindre et d'étudier. En particulier, nous devons séparer les organes des sens qui constituent la perception et les instruments scientifique qui viennent en étendre soit le champ visuel soit le champ acoustique. Car les premiers, à la différence des seconds, ne sont pas susceptibles d'une modification qui en augmenterait le pouvoir de discrimination visuelle ou auditive. Du moins à l'échelle de quelques siècles. Nous pouvons donc distinguer trois types d'objets irréductibles les uns aux autres, plus un quatrième (Duval, 2009) :

O*per* Les objets matériels, ou concrets, sont ceux *l'accès est multisensoriel*, c'est-à-dire ceux qu'on peut non seulement voir, mais toucher, ou même entendre au choc contre un autre objet. Ils constituent tout ce qu'on peut identifier comme séparé des autres chose*s* dans notre environnement. On ne peut pas parler d'invariance pour ces objets, mais seulement de *L'UNITE PERCEPTIVEMENT INDISSOCIABLE* de multiples qualités sensibles hétérogènes. C'est pourquoi les objets ne peuvent pas être définis, mais seulement décrits par une accumulation plus ou moins longue de traits de permettre de se l'imaginer tel que dans la réalité. Certains peuvent aussi faire l'« objet » d'actions de déplacements, de déformation, de partage.

O*sci* Les objets des sciences, qui exigent *l'utilisation d'instruments de plus en plus puissants d'observation et de mesure.* Ces instruments produisent des représentations non-sémiotiques qui rendent *monosensoriellement perceptibles* des phénomènes qui autrement ne peuvent pas l'être. Les objets de connaissance scientifiques sont les invariants relatifs à la régularité et à la liaison de tous les phénomènes observables et mesurables.

O*mat* Les objets mathématiques, qui sont *uniquement accessibles par la production de représentations sémiotiques,* sont cependant indépendants de leurs représentations sémiotiques. Mais pour reconnaître cette indépendance, il faut pouvoir effectuer les opérations sémiotiques qui transforment leurs représentations en d'autres représentations du même registre (P. 5'). Et ils se distinguent de toutes les autres « idéalités », et de tous les concepts non-mathématiques, par le fait que leur représentation sémiotique peut toujours être convertie en *une représentation sémantiquement équivalente dans un autre registre* (P. 3 ; P.6').

Il y a un saut à la fois cognitif et « ontologique» lorsqu'on passe des objets O*per* et O*sci* aux objets O*mat*. *Car personne, bien évidemment, ne confondra les variations de phénomènes perceptivement ou instrumentalement observés avec des variations de représentations sémiotiques.* Les deux premiers types d'objets se rapportent à la « réalité », tandis le troisième type d'objet se rapport à ce qui est nécessaire dans un ensemble préalablement défini de possibles.

Le mot « objet » est aussi employé en un tout autre sens pour désigner ce dont nous sommes conscients actuellement, c'est-à-dire *ce sur quoi notre attention se focalise, ce que l'on remarque, et donc ce qui apparaît d'emblée.* Nous appellerons « objets phénoménologiques » ces points de focalisation de la conscience, en référence à la définition husserlienne de la conscience. Ils présentent trois caractéristiques :

O*ph.* 1 Ils se rapportent toujours à un objet auquel on accède soit perceptivement soit par l'intermédiaire d'instruments, soit par la production de représentations sémiotiques, celles de mots ou de signes mathématiques. L'objet phénoménologique est la conscience de l'objet auquel on accède actuellement soit perceptivement soit sémiotiquement. Autrement dit, *un objet phénoménologique n'est autre que l'évidence immédiate et subjective de l'objet auquel on accède*.

O*ph.* 2 Etant les points de focalisation de la conscience, *ils isolent quelque chose de son contexte ou de ce dont il fait partie.* Ainsi les différentes qualités des objets matériels, comme la forme, la couleur, la grandeur ou la texture, sont des objets phénoménologiques séparables et sélectionnables, bien qu'elles soient indissociables l'objet matériel lui-même et de sa perception. C'est pourquoi la pratique de l'abstraction a souvent été associée à celle de l'orientation sélective de l'attention.

O*ph.* 3 Pour les objets qui ne sont accessibles que par des représentations sémiotiques, il y a deux types d'objets phénoménologiques possibles. Soit le contenu présenté est séparé de tout renvoi à ce qu'il re-présente, et alors le contenu est l'objet phénoménologique. Soit la représentation est transparente à ce qu'elle re-présente et l'objet phénoménologique est l'objet lui-même. *L'activité mathématique exige la réversibilité entre ces deux types d'objets phénoménologiques.* L'utilisation des équations comme «outil» pour résoudre des problèmes en est l'illustration type. Le calcul porte uniquement sur la forme des expressions algébriques, tandis que les lettres entrant dans la composition des syntagmes opératoires (2x, x+2, etc.) re-présentent les données du problème.

L'impasse des recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, au niveau du Primaire et à celui du Collège, viennent d'une double méconnaissance. Il y a tout d'abord la méconnaissance de l'irréductibilité des objets mathématiques à tous les objets perçus en raison de l'irréductibilité des représentations sémiotiques aux représentations non-sémiotiques et à la perception des objets matériels. Mais il y aussi, plus subtilement, la méconnaissance du fait que, pour POUVOIR ETRE RECONNUS*, tous ces différents types d'objets de connaissance doivent aussi être des objets phénoménologiques* (O*ph*1). Sans cela, on assimile la reconnaissance des objets uniquement accessibles par des représentations sémiotiques (P.3 ; P.6') aux processus d'abstraction par focalisation pour distinguer les caractéristiques des objets matériels (O*ph*2). Et on bloque la réversibilité nécessaire pour l'activité mathématique, entre les deux types d'objets phénoménologiques que sont la représentation sémiotique utilisée et l'objet qu'elle représente (O*ph*3). Autrement dit, on manque les deux premiers seuils de la compréhension en mathématiques (ci-dessus, 3.1 et 3. 2). Or c'est sur ces deux seuils que la grande majorité des élèves continuent de trébucher, malgré toutes les réformes et les innovations didactiques successives.

V. RETOUR AUX QUESTIONS INTIALES

Ces questions ne commandent pas seulement les recherches sur l'enseignement et sur l'apprentissage des mathématiques, elles déterminent aussi les choix qui sont fait dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques pour tous les élèves de 6 à 16 ans. Comment ?

Nous avons vu que l'activité et la compréhension en mathématiques présentent deux faces opposées. L'une est la face exposée des connaissances et des méthodes de calcul, de résolution ou de raisonnement. L'autre est la face cachée des coordinations prérequises d'au moins deux registres pour commencer à comprendre et pour savoir utiliser des connaissances mathématiques. Ces coordinations doivent être développée. Car la pensée mathématique est la synergie de plusieurs registres. Et ce qu'on appelle « conceptualisation » n'est autre que la mobilisation synergique de plusieurs registres, même si on ne travaille explicitement que dans un seuil. C'est pourquoi il faut d'abord franchir les deux seuils compréhension qui concernent la face cachée des mathématiques pour pouvoir acquérir les connaissances et les méthodes de la face exposée des mathématiques.

Le problème est que cette distinction de deux faces dans l'activité mathématique n'a aucun sens, d'un point de vue mathématique. Car elle ne sert à rien pour « faire des mathématiques » (Q.1). En outre, pour percevoir cette distinction, il faut sortir en quelque sorte des mathématiques, et de sa pratique et de son exigence spécifique de validation, c'est-à-dire de vérité, pour prendre un tout autre point de vue. Et c'est là que surgissent toutes les équivoques dans l'organisation de l'enseignement et dans les recherches sur l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. *Car cet autre point de vue n'est pas cognitif ou même sémiotique, mais épistémologique.*

Il y a deux points de vue épistémologiques, opposés mais complémentaires, sur les mathématiques. L'un est *intra-mathématique.* Il s'appuie sur les étapes historiques de la formation des différents concepts mathématiques et il centré sur les connaissances mathématiques, c'est-à-dire sur la face exposée des mathématiques. L'autre est *comparatif.* Il porte sur les conditions d'accès aux objets de connaissance (O*per*, O*sci,* O*mat*). Une rupture totale apparaît alors entre les conditions d'accès aux objets mathématiques et celle aux autres objets de connaissance (P.7). Et cela entraîne des démarches de connaissance et des processus de compréhension qui divergent radicalement de celles qui communément pratiquées dans les aux autres disciplines scientifiques. Autrement dit, la question « Qu'est-ce que comprendre en mathématiques ?» (Q.2) ne porte plus sur les concepts mathématiques, mais sur les démarches cognitives spécifiques qui permettent de les élaborer et de se les approprier, c'est-à-dire sur la face cachée des mathématiques. Si la distinction des deux faces de l'activité mathématique ne sert à rien pour les mathématiciens, elle est primordiale lorsqu'il s'agit d'enseigner les mathématiques aux élèves de 6 à 16 ans. Elle oblige à s'interroger sur les facteurs cognitifs du développement de la compréhension en mathématiques (Q.2'), et à les prendre en compte dans l'organisation de l'enseignement non seulement en classe mais d'abord au niveau du curriculum. Car, bien évidemment, personne ne confondra l'acquisition de ces concepts par tous les élèves, à raison de cinq heures d'enseignement par semaine, avec la lente formation des concepts mathématiques par les mathématiciens au cours des siècles.

Le champ des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques s'est développé sur la base de deux postulats. Le premier est que seul le point de vue épistémologique intra-matématique permet de répondre aux questions Q.1 et Q.2. Le point de vue cognitif, et ceux concernant l'organisation institutionnelle du curriculum ou le choix des activités en classe doivent être subordonnés au point de vue mathématique, c'est-à-dire à la face exposée des mathématiques. Le deuxième postulat porte sur les processus cognitifs d'acquisition des connaissances. Ils seraient fondamentalement les mêmes pour tous les types d'objets de connaissance. Autrement dit, l'accès aux objets mathématiques ne serait pas exclusivement sémiotique ou, même s'il l'était, les concepts mathématiques seraient cognitivement de même nature que tous les concepts scientifiques. Il suffit donc d'importer une théorie cognitive, ou une théorie sémiotique, qui englobe aussi bien l'acquisition de concepts pour les objets O*per*, que pour les objets O*sci* et *les objets* O*mat*. Or depuis les années 1970, on a eu recours à des théories cognitives ou sémiotiques différentes (Duval, 2015 d). Mais le principe de leur utilisation reste le même. Pour chacun des concepts à enseigner successivement au cours d'une année scolaire, on élabore une séquence d'activités dans le cadre d'un problème à résoudre. La « théorie » cognitive choisie sert uniquement à justifier le schéma organisateur de cette séquence, qui est supposé correspondre au processus d'apprentissage modélisé dans la théorie choisie. Et, ainsi, on utilise le même schéma organisateur, quel que soit le concept à enseigner et quel que soit le niveau d'enseignement.

Au contact suivi des élèves dans des classes à des niveaux différents et dans le cadre de l'IREM de Strasbourg, où des enseignants, du Primaire à l'Université, se rencontraient régulièrement, nous avons été conduits à remettre en cause ces deux postulats. La question du type de fonctionnement cognitif que la manière mathématique de travailler et le point de vue épistémologique comparatif se sont imposés (Q. 1'). Et aucune théorie cognitive ou sémiotique n'était adéquate pour répondre à la question des facteurs cognitifs qui permettraient de développer la compréhension en mathématiques (Q. 2'). Pour les identifier, il fallait répondre à une autre question :

Q. 1'' Quels sont les observables objectifs qui permettent d'analyser la manière de travailler en mathématiques ?

C'est pourquoi toute interprétation de la notion de registre en s'en tenant au seul point de vue épistémologique intramathématique, ou tout essai de l'utiliser sans changer au préalable les types d'activité proposé en classe est un contresens. Le choix fondamentale n'est pas entre des théories mais entre deux points de vue épistémologiques sur les mathématiques.

***

En réalité, il n'y a pas seulement deux questions qui commandent les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais trois. La troisième n'est ni épistémologique ni cognitive, mais philosophique et pédagogique :

Q.3 Qu'apportent les mathématiques à la formation de l'individu ?

Sa formulation varie considérablement en fonction de celui qui pose la question. Pour beaucoup d'élèves, c'est « A quoi ça sert ce qu'on veut nous faire apprendre ?». Pour les enseignants des autres disciplines, qui s'adressent aux mêmes élèves en classe, c'est « Pourquoi vouloir donner une telle importance aux mathématiques, alors que d'autres matières semblent mieux contribuer à la formation de l'esprit ?». Et, pour les décideurs en matière de politique de l'éducation : « Quels types de savoir la population des élèves, à l'échelle d'un pays, doit-elle acquérir, pour pourvoir aux emplois dans toutes les professions dont la société a besoin ?». Toutes les réponses faites en termes de "modélisation de situations réelles"[19] ou de "développement de la rationalité" ou d "acquisitions de savoir-faire" sont des réponses consensuelles et creuses. Elles escamotent la question.

La seule réponse pertinente et décisive est celle qui a un sens *pour les élèves d'abord*, et dont ils puissent eux-mêmes découvrir rapidement l'apport. C'est celle *d'une autonomie intellectuelle totale et globale.* Car seule l'expérience de sa propre autonomie intellectuelle donne la confiance en ses propres capacités intellectuelles, et donc en soi-même. La résolution de problème est l'activité mathématique où chaque élève doit faire l'expérience de son autonomie intellectuelle. Or l'autonomie intellectuelle en ce domaine est totale ou elle

[19] Autrement dit, l'apprentissage des mathématiques serait nécessaire parce que « le monde est mathématique » selon le titre d'une collection parue récemment en 40 volumes, sous le patronage de Cédric Villani, Médaille Fields 2010. Mais comment le reconnaître si on n'arrive pas à comprendre les mathématiques ?

n'existe pas. Cela veut dire que l'élève doit très vite avoir les capacités d'initiative pour chercher ou explorer les possibilités de solution, et de contrôle dans les traitements qu'il effectue, et donc comprendre pourquoi la solution trouvée est certaine, sans avoir besoin de la confirmation de l'enseignant ou d'un autre élève. En mathématiques, compréhension et autonomie intellectuelle globale sont d'une certaines manière la même chose (Duval, 2005a).

Evidemment, et malheureusement, c'est le contraire qui se produit pour la très grande majorité des élèves. La résolution de problème est l'obstacle infranchissable pour la très grande majorité des élèves, le point où ils éprouvent une certaine impuissance à comprendre et où, au fil des années scolaires, ils se détournent des mathématiques.

Pour renverser radicalement cette situation, il faut donner aux élèves les moyens d'une autonomie intellectuelle totale et, pour cela, il faut organiser l'enseignement des mathématiques en privilégiant la face cachée des mathématiques. Pour pouvoir faire des mathématiques ou utiliser ou savoir utiliser des connaissances mathématiques, il faut avoir franchi les deux seuils cognitifs de la compréhension : la reconnaissance immédiate d'un même objet dans des (re)présentations sémiotiques très différentes, et la prise de conscience de la manière spécifique dont chaque registre, permet de transformer en de nouvelles représentations, les représentations sémiotiques qui y sont produites. Cela ne signifie pas que la face exposée des mathématiques et l'acquisition de connaissances soient reléguées au second rang. Mais les différentes connaissances mathématiques de base, qui constituent les objectifs des programmes au Primaire et au Collège, doivent être subordonnées à l'appropriation de tous les registres qu'ils mobilisent et dont elles requièrent la coordination (ci-dessus, 3.3.2). Cette appropriation donne non seulement des moyens de représenter et d'organiser des informations, de quelque nature qu'elles soient, mais elle développe surtout les capacités "mentales" de penser. Au delà de l'acquisition de connaissances mathématiques élémentaires qui ne seront peut-être jamais utilisées[20], c'est là le véritable apport des mathématiques à la formation de chaque individu.

Ce sont ces questions épistémologiques et cognitives qui commandent non seulement l'organisation de l'enseignement non seulement en classe, mais à l'échelle des curriculums du Primaire et du Collège. L'organisation de séquences d'activités par l'enseignant et, en amont, le choix des objectifs d'enseignement et des connaissances à enseigner par les experts et les responsables du système éducatif d'un pays, dépendent des réponses apportées à ces

[20] L'utilisation des mathématiques par la plupart des individus au cours de leur vie ne dépasse pas les « mathématiques orales » (ci-dessus 3.2). Les mathématiques nécessaires à une activité professionnelles s'apprennent après 16 ans, dans la spécialisation de l'enseignement en filières.

questions, qui restent le plus souvent implicites. Il est essentiel pour la formation des enseignants et pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques qu'elles soient posées comme les questions cruciales et qu'elles donnent lieu à de véritables débats. Car on ne voit pas les mêmes phénomènes en classe et on n'interprète pas les productions des élèves de la même manière selon les réponses qu'on y apporte.

REFERENCES

Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration. *Educational Studies in Mathematics*. *22* (3), 233-261.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuel*. Bern : Peter Lang. (1999) *Semiosis y pensamento humano* (trad. Myriam Vega Restrepo.) Cali : Universidad del Valle.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. Dans P. Boero (ed.) *Theorems in schools*, p. 137-161. Rotterdam/Tapei : Sense.

Duval R. (2009). " Objet " : un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles ? Dans J. Baillé et L. Lima (eds) *Du mot au concept. Objet*, p. 79-108. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R. (2011a). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar : os registros de representacoes semioticas.* Sao Paolo : Proemeidtora.

Duval R. (2011 b) Preuves et preuve : les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. Dans J. Baillé et L. Lima (eds). *Du mot au concept. Preuve,* p. 33-68. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R. (2011c). Graficos e equaçôes : a articulaçâo de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. *6* (2)

Duval R. (2012). Registros de représentação semiótica e funcionamento cognitivi do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti : https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. *7* (2)

Duval R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. *8* (1).

Duval R. (2014). Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever : História de uma Sequência de Atividades em Geometria. In: Brandt, C. F. & Moretti, Méricles, T. (ORGS). *As contribuições da representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática*, 15- 38. Ijuí: Editora UNJUÍ.

Duval R. (2015 a). Mundaças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais : Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos… 2030 ! Tradução Méricles Thadeu Moretti. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. *10* (1).

Duval R. (2015 b). Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. Dans J. Baillé et L. Lima (eds) *Du mot au concept. Figure*, p. 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R. (2015 c). Les théories cognitives en didactique des mathématiques : lesquelles et pourquoi ? *Isonomia— Epistemologica*. 7. University of Urbino.
http://isonomia.uniurb.it/

Duval R. (2015 d). Cuestionamientos sobre la «elección» y utilización de teorías en « Mathematics Education». In: B. D'Amore & M. Pinilla (eds) *La didáctica de la matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (p.159-182). Bogota: Universidad de La Sabana

Duval R., Campos, T., Dias, M. et Barros L. (2015) *Ver e ensinar a matemática de outra forma* (Vol. II*). Introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo: PROEM.

Egret M.A. et Duval R. (1989). Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *2*, 65-89.