Algunas consideraciones para el diseño de rutas de aprendizaje del concepto límite

Erick Antonio Quintero Chitiva[*]
Angélica Lisette Sánchez Celis[**]

RESUMEN

La presente comunicación busca poner de manifiesto algunas consideraciones que se pueden tener en cuenta a la hora de diseñar rutas de aprendizaje en torno al concepto de límite. En este sentido, el documento se estructura por medio de dos preguntas cuyas respuestas coinciden con las dos principales consideraciones resultado de este trabajo; dichos interrogantes (*para qué* de la enseñanza del límite, y *cómo* lograrla) permiten evidenciar la comprensión del concepto límite como un proceso que da lugar al desarrollo de procesos de profundización, con los cuales se alcanza la forma más pura de la competencia matemática.

Palabras clave: enseñanza, concepto de límite, comprensión, competencia matemática.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Eantonio.quintero@gmail.com.
[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: Angelika.lsanchez@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Dificultades en la planeación de rutas de aprendizaje para el concepto de límite. Cuando un docente de matemáticas realiza reflexiones que desembocan en el diseño de rutas de aprendizaje del concepto de límite, hay una tendencia a formular situaciones empobrecidas que atienden solamente al rigor y la formalización del concepto (Espinoza & Azcarate, 2000), y esto denota un problema que radica en la omisión de todo el contexto de descubrimiento (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996). Además, al encontrar que el concepto límite es un constructo científico muy importante para las conceptualizaciones consolidadas en el cálculo diferencial e integral, y que en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de este se integra una serie de capacidades de abstracción y generalización que complejizan los modelos mentales del educando hasta lograr llevarlo a lo que Tall llama pensamiento matemático avanzado, es preciso plantear algunas consideraciones con la cuales se posibilite ampliar las perspectivas de los docentes a la hora de estructurar las rutas de aprendizaje para dicho concepto.

De esta manera, las consideraciones planteadas en este artículo buscan ser respuesta de dos preguntas, a partir de las cuales un profesor puede articular y orientar su práctica profesional. Estas son: ¿para qué? y, ¿cómo hacerlo?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

¿Para qué? Esta pregunta va directamente relacionada con otra que en el apartado anterior tuvo una leve respuesta: ¿qué se busca? En este sentido, el qué se busca con la enseñanza del concepto límite lleva al enseñante a reflexionar sobre el complejo y atractivo sistema que representan las matemáticas en la sociedad, ya que forman parte de la cultura porque, sin lugar a dudas, surgen como una respuesta a diversos interrogantes que el ser humano se formuló con base en las eventualidades que vivía (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998); es decir, el aprendizaje del concepto de límite permite que se desarrolle el pensamiento matemático avanzado, a la par de una serie de capacidades que, integradas con otros aspectos, componen la respuesta al *para qué* de la enseñanza del concepto tratado: la competencia matemática.

En este punto, es preciso profundizar un poco en lo que significa la competencia y las implicaciones que esta tiene en el campo de la educación matemática, ya que cuando el MEN (2006) establece que formar al individuo para ser competente requiere dotarlo de un "*... conjunto de conocimientos,* *habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores…"* (p. 49), también esclarece una serie de fundamentos con los que se abarca un sentido más amplio que el netamente práctico.

Es preciso aclarar que al ser global este significado de competencia, en el sentido de que puede ser contrastado con diversas disciplinas, se hace necesario explorar sobre su interpretación en la educación matemática; esto, a través de la comprensión, la cual posee una profunda relación con la temática en cuestión (Godino, 2003), y puede ser concebida, según Skemp (1976, mencionado por Godino, 2003), como: la comprensión instrumental (que hace referencia al aprendizaje de reglas que pueden ser aplicadas en la resolución de cierta situación, y que no tienen un significado en cuanto al porqué de su aplicación), y la comprensión relacional (que enmarca las argumentaciones, definiciones y propiedades que construyen un objeto matemático).

En este sentido, la formación para ser competente hace necesaria una relación entre las comprensiones mencionadas, y evidencia que uno de los principales objetivos de la educación radica en la comprensión. Una teoría que aglomera lo mencionado para el campo de la educación matemática es la que Sierpinska (1994) propone con el nombre de la comprensión de matemáticas, en la cual se define la comprensión como los cambios que se generan a un modelo mental por la disfuncionalidad que presenta en situaciones cuyo contexto no se identifica con el de las que propiciaron las experiencias productoras del estado de comprensión latente en el individuo.

Dichas situaciones generan obstáculos epistemológicos que al ser superados producen conocimiento, y que determinan la presencia de un conocimiento con el cual se logra dar respuesta a problemas que poseen condiciones inexistentes en otros. Así, la superación de estos se da gracias a procesos que Sierpinska (1994) establece como.

1 La identificación: que se evidencia al tomar conciencia de la existencia un objeto de estudio.

2 La discriminación: que consiste en la diferenciación por propiedades entre este y otros objetos similares.

3 La generalización: en donde se realiza una ampliación del campo de acción en el que el objeto tiene funcionalidad.

4 La síntesis: la cual enmarca la integración de tal objeto a un conjunto de conocimientos.

METODOLOGÍA

¿Cómo hacerlo? Ahora bien, considerando que es por medio de la búsqueda de compresión que se logra desarrollar competencia matemática, es apropiado articular la misma con el concepto límite por medio de la caracterización de cuatro obstáculos epistemológicos que Sierpinska (1985)[1] postula. Tomando como referencia el documento "Un análisis de contenido de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias Matemáticas en Colombia: El caso del límite" (Quintero, Sánchez & Bello, 2012), en el que se aplica la metodología de análisis de contenido para dicho análisis, a continuación se presenta una tabla en la que se sintetiza lo que los autores del documento encuentran, y se evidencia la relación existente entre los obstáculos epistemológicos y la historia de consolidación del límite:

Obstáculos	*Autor*	*Problemas*	*Descriptores*
Horror al infinito	Arquímedes Eudoxo	Determinar magnitudes de área en figuras curvilíneas, y de volumen en sólidos geométricos.	La inscripción y circunscripción de polígonos regulares, cuyas magnitudes son conmensurables, y con los cuales se busca la exhaución del área de una figura curvilínea.
Geométrico	Kepler	Determinar las magnitudes vectoriales que caracterizan los movimientos planetarios.	La división del continuo, que se representa en figuras y cuerpos geométricos, en infinitas partes infinitamente pequeñas de igual dimensión al objeto estudiado, que al ser sumadas determinaran la totalidad del mismo, bien sea el área o el volumen.
	Cavalieri	Medidas de áreas, volúmenes y cuerpos de revolución	La comparación entre continuos, representados en figuras y sólidos geométricos, a partir de su composición mediante indivisibles (cortes paralelos a una de las componentes de la forma), los cuales mantienen una relación de proporcionalidad con los indivisibles de la otra.

1 Quien postula cinco, de los cuales solo se consideran cuatro por su intervención directa en la educación básica media.

Obstáculos	*Autor*	*Problemas*	*Descriptores*
Función	Fermat	Máximos y mínimos en una curva.	Dicho proceso plantea la implementación de la adigualdad a partir del establecimiento de un incremento que disminuye hasta hacerse cero; este es utilizado algebraicamente sobre expresiones que modelan cantidades interpretadas en su forma absoluta (solo se toma en consideración la variable dependiente).
	Barrow	Recta tangente a una curva.	Establecimiento de un incremento (en la variable independiente) que producen otro, con el cual determina una razón, dada por semejanza entre triángulos, que se estudia cuando los mismos se acercan a cero sin tocarlo.
Simbólico	Newton	Síntesis de todos los problemas previos, por medio de la definición de fluentes, y fluxiones.	Las nociones de límite se ven cuando los incrementos (múltiplos de los fluentes) son razones que nacen de la nada y tienden a anularse sin hacerlo, ya que determinan cantidades que se acercan a algo que según Newton nunca se alcanza, ni se sobrepasa.
	Leibniz	Recta tangente a un punto de la curva. Área de bajo de la curva (cuadratura de la curva).	El concepto de diferencial es en donde se puede evidenciar la noción del límite, ya que estas determinan una diferencia infinitesimal con la cual se describe una cantidad infinitamente pequeña que nunca desaparece.

Esta tabla será objeto de análisis en el siguiente apartado, por lo que para culminar este epígrafe bastará con decir que lo planteado hasta el momento puede articularse con metodologías constructivistas como lo es la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986).

ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de este artículo es presentar una posible articulación entre la competencia matemática referente al concepto de límite, y los aspectos a tener en cuenta para diseñar rutas de aprendizaje en torno al mismo, es importante resaltar que aunque la tabla muestra una forma lineal de la consolidación del concepto límite, dichos obstáculos pueden presentarse de manera discontinua al punto de hacer necesario plantear, como docente, rutas de aprendizaje en las que estos se relacionen indistintamente para lograr fomentar, más que una formalización del concepto, una abstracción que permita su interpretación y entendimiento mediante el enfrentamiento de situaciones que posibiliten su redescubrimiento, es decir, que le den su verdadero significado.

Plantear lo anterior implica que para el diseño de rutas de aprendizaje en torno a este concepto, es preciso considerar como objetivo el lograr su comprensión por medio de situaciones que se adecuen al contexto de descubrimiento que lo caracteriza. Aquí, es vital aclarar que el lograr la comprensión de un concepto es la apertura al desarrollo de procesos de profundización que integrados construirán, en su sentido más puro, la competencia matemática.

CONCLUSIONES

Las consideraciones que pueden ser tenidas en cuenta para la consolidación de una ruta de aprendizaje para el concepto de límite están determinadas por metas sociales que en la actualidad denotan competencias matemáticas cuya interpretación en la enseñanza de la matemática se particulariza a la comprensión. De esta manera, pensar en la enseñanza del concepto límite hace necesario adoptar una postura derivada de la línea de investigación histórico-epistemológica (Gómez, 2003), en cuanto que existe una ligadura, imposible de omitir, entre el proceso de aprendizaje de dicho concepto y el de su consolidación histórica.

Finalmente, con la consideración de la ligadura mencionada en el párrafo anterior, se puede ampliar la perspectiva docente al momento de diseñar rutas de aprendizaje para el concepto en cuestión, independientemente de la forma en la que se formule. Es decir, lo planteado en el presente artículo busca manifestar un preámbulo sobre el cual se logren llevar a cabo complejizaciones que permitan llevar la enseñanza del límite en contraste con sus contextos de descubrimiento y justificación (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches En *Didactique De Mathe Matique*, Vol. 7 N.° 2, Pp. 33-155

Espinoza, L., Azcárate, C. (2000),. Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: Una propuesta metodológica para el análisis, Enseñanza de las Ciencias, 18(3), 355-368.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática: *Séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Valencia. Valencia. España. Recuperado el 4 de mayo de 2011, de la página: http://www.uv.es/gomezb/22Lainvestigacionhistorica.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2006) Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia

Quintero, E., Sánchez, A., Bello, J., (2012) *Un análisis de contenido de los Lineamientos curriculares en matemáticas y estándares básicos de competencias matemáticas en Colombia: El caso del límite*. Universidad Autónoma de Occidente. Cali, Colombia.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologieques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 6 (1)

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. The Falmer Press Ltda. London.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. [Traducción de Juan D. Godino]