MATERIALES DIDÁCTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

POR EL GRUPO PI [1].

Este trabajo se centra en la resolución de problemas y en el uso de materiales didácticos. En primer lugar, describiremos cada uno de estos elementos y las relaciones que existen entre ambos. Seguidamente basándonos en la importancia de estas relaciones, describiremos el taller, y particularizaremos en las tareas propuestas y en la utilización de algunos materiales para la resolución de problemas.

<u>Resolución de problemas.</u>

Definiremos un problema como una situación dificultosa para la que debe darse una solución que no es evidente para el individuo que se encuentra ante ella. Para que la situación sea considerada como problema, el individuo no debe conocer a priori algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. Consideraremos como la resolución de un problema el proceso que comienza con la percepción del problema y finaliza con la solución del mismo.

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza se pone de manifiesto en los documentos curriculares normativos que la consideran como un objetivo principal de la educación matemática. El currículo español considera que la resolución de problemas matemáticos puede desarrollar una actitud favorable para afrontar problemas de la vida cotidiana. Además, la resolución de problemas es un instrumento didáctico ya que la reflexión que se lleva a cabo durante la resolución de un problema ayuda a la construcción de los conceptos, y a establecer relaciones entre ellos (Junta de Andalucía, 2002). Por ello se recomienda que la resolución de problemas esté integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera habitual y mostrando especial énfasis en cada una de las estrategias de resolución desde diversos contextos matemáticos. Además se destaca como un objetivo general "*reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados*"(Junta de Andalucía, 2002).

Desde una perspectiva internacional, los Estándares del NCTM (1989, 2000) recogen la resolución de problemas como uno de los ejes del currículo de matemáticas y se hace hincapié

[1] Los miembros del Grupo PI organizadores y responsables del taller son: Mª Consuelo Cañadas Santiago, Francisco Durán Ceacero, Sandra Gallardo Jiménez, Manuel J. Martínez-Santaolalla Martínez, María Peñas Troyano, Miguel Villarraga Rico y José Luis Villegas Castellanos.

en la necesidad de "construir nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas; resolver problemas que surjan de las matemáticas y en otros contextos; aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; supervisar y reflexionar sobre los procesos de solución de problemas matemáticos" (NCTM, 2000, p. 52).

Como hemos dicho, existe un problema siempre que queremos conseguir algo y no sabemos cómo hacerlo, en cuanto que, los métodos que tenemos a nuestro alcance no nos sirvan. Dicho de otro modo, tenemos una meta más o menos clara y no existe un camino inmediato y directo para alcanzarla; por lo tanto nos vemos obligados a elegir una vía indirecta, a hacer un rodeo (Abrantes et al., 2002)

Hemos marcado por tanto una fase inicial del proceso (percepción de la situación problemática) y una fase final (generación de soluciones), pero cómo se produce el proceso intermedio, cómo buscamos estrategias que nos permitan la generación de esa solución. Un elemento de trabajo que nos puede permitir la búsqueda de estas estrategias son los trabajos sobre resolución de problemas. En la literatura encontramos estudios sobre estrategias que ayudan al alumno cuando éste tiene que enfrentarse a un problema matemático (Polya, 1982; Mason, Burton y Stacey, 1988; Brandsford y Stein, 1993). Las fases de estas estrategias nos pueden dar indicaciones sobre como abordar un problema. Entre las distintas fases que encontramos sobre resolución de problemas en matemáticas podemos destacar las siguientes (ver cuadro 1).

POLYA (1982)	MASON, BURTON Y STACEY (1988)	BRANDSFORD Y STEIN (1993)
Comprender el problema estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida. **Idear un plan de actuación** que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta. **Llevar a cabo el plan** ideado previamente. **Mirar atrás** para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.	**Abordaje:** Comprender el problema Concebir un plan **Ataque:** Llevar a cabo el plan **Revisión:** Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan	**I**dentificación del problema **D**efinición y representación del problema. **E**xploración de posibles estrategias. **A**ctuación, fundada en una estrategia. **L**ogros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades

Cuadro 1: Fases de resolución de problemas

Pero la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas ni conociendo las distintas fases de resolución, sino tomando soltura y familiaridad con una gama de técnicas de resolución (heurísticas). El buen resolutor de problemas se caracteriza por:

- Conocimientos matemáticos adecuados a los problemas con los que se va a enfrentar.

- Conocimiento de diversas estrategias.
- Deseo de resolver el problema, una vez que lo ha aceptado como tal, es decir que lo ve asequible para él y le resulta interesante de resolver (Abrantes et al., 2002).

Entre las heurísticas que se suelen considerar apropiadas nos encontramos las siguientes: resolver un problema más sencillo, hacer una tabla, buscar pautas, empezar desde atrás, dar el problema por resuelto, generalizar, análisis del problema, representación y organización de la información, inferencia, deducción, ensayo y error (fortuito, sistemático, dirigido), descomponer el problema en subproblemas, reducción al absurdo, búsqueda de incoherencias, análisis del caso más desfavorable, formulación de predicciones, torbellino de ideas,...

<u>Materiales Didácticos.</u>

Coriat (1997) distingue entre recursos y materiales didácticos, considerando que los primeros no han sido diseñados específicamente con fines educativos. En este taller hemos decidido englobar ambos términos en materiales didácticos al considerar que los recursos se convierten en materiales didácticos en el momento en que el profesor de manera consciente los utiliza en su aula con una finalidad didáctica. Entenderemos por materiales didácticos todos los objetos usados por el profesor o el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el fin de lograr unos objetivos didácticos programados. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje. Pero debemos tener en cuenta que en general no existe una correspondencia biunívoca entre un material y un concepto, procedimiento o actitud. “Un mismo concepto ha de trabajarse, en lo posible, con diversidad de materiales y, recíprocamente, la mayoría de los materiales son utilizables para hacer ejercicios diversos” (Alsina et al., 1988, p. 13).

Alsina et al. (1988) realizan una clasificación no exclusiva de los materiales atendiendo a la funcionalidad distinguiendo entre:

- Materiales dedicados a la comunicación visual.
- Materiales para dibujar.
- Materiales para leer.
- Materiales para hacer medidas indirectas o directas.
- Materiales que son modelos.
- Materiales para la construcción de conceptos.
- Materiales para mostrar aplicaciones.

- Materiales para resolver problemas.
- Materiales para demostraciones y comprobaciones.

Vamos a clasificar los materiales didácticos atendiendo a los siguientes criterios:

1. Tipo de material físico con el que está elaborado.
2. Nivel educativo.
3. Concepto matemático con el que permite trabajar.
4. Versatilidad, posibilidad de ser empleados para estudiar un mayor o menor número de conceptos o propiedades matemáticas.
5. Estructuración didáctica o especificidad del material.

En este taller utilizaremos materiales de carácter manipulativo al considerar que éstos permiten una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar en consonancia con una de las características que se le atribuyen a los materiales: su carácter motivador. La manipulación constituye un "modo de dar sentido al conocimiento matemático" (Segovia y Rico, 2001, p. 86). El uso de materiales tiene numerosas ventajas como permitir mayor independencia del alumno respecto al profesor, conectar las matemáticas escolares con el entorno físico del alumno, favorecer un clima de participación en el aula y el trabajo en equipo de los alumnos; y además el material se convierte en un elemento que refuerza el conocimiento y el aprendizaje significativo de los alumnos.

Los materiales didácticos y la resolución de problemas se relacionan en el currículo donde encontramos entre los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria "elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario" (Junta de Andalucía, 2002).

Los Materiales Didácticos en la Resolución de Problemas.

Durante la realización del taller se presentan los problemas y materiales implicados en la resolución de los mismos. A continuación se realizan una serie de tareas en las que se pretende la manipulación, construcción, observación, expresión de conjeturas y descubrimiento de distintas relaciones entre los conceptos implicados y soluciones de los problemas propuestos. La discusión y debate en gran grupo nos permitirá enriquecer y comunicar las distintas construcciones realizadas a la vez que se da lugar a un espacio de crítica sobre la viabilidad de las tareas, problemas y materiales presentados.

Objetivos del taller.

- Proporcionar a los docentes herramientas didácticas para la enseñanza de las matemáticas.
- Resolver problemas con ayuda de materiales didácticos
- Motivar a los profesores para que empleen materiales en el aula para los procesos de conceptualización de sus alumnos.
- Fomentar la resolución de problemas en el aula.
- Reforzar la idea de que hacer matemáticas equivale a resolver problemas.
- Proponer problemas interesantes para aumentar el caudal de recursos a disposición de cuantos asistan a nuestro taller.

Algunos de los materiales que se pretendieron utilizar en el taller:

MATERIAL	DESCRIPCIÓN	CARACTERÍSTICAS	CONCEPTOS TRABAJADOS
Papel	Papel de cualquier color uniforme, papel charol, papel vegetal, cartulina para poder doblar y pegar. En ocasiones es necesaria la goma de pegar para poder hacer modelos.	1.Papel 2.Todos los niveles 4.Alta 5.Baja	Rectas y ángulos. Construcción de polígonos. Clasificación de cuadriláteros. Construcción de poliedros. Perpendicularidad. Paralelismo. Simetrías. Construcción de conceptos.
Palillos y plastilina Palillos y garbanzos	Palillos y/o pajitas de refrescos le longitudes inversas y bolas de plastilina para unir los extremos de los palillos/pajitas.	1.Madera, plástico 2.Secundaria 4.Media 5.Baja/Media	Construcción de polígonos. Construcción de poliedros. Teorema de Euler.
Geoplano	Tablero de madera o plástico de forma cuadrada de 25x25 cm^2 en el que se encuentren distribuidos 25 clavos de cabeza plana, clavados parcialmente formando una cuadrícula. Elásticos de caucho de varios colores. El número de clavos puede variar: 3x3, 4x4, nxn,...	1.Madera, plástico 2.Todos los niveles 4.Alta 5.Alta	Segmentos. Polígonos. Polígonos semejantes. Descomposiciones de polígonos. Comprobaciones del teorema de Pitágoras. Geometría del geoplano: Algoritmo para el cálculo del área en función del número de clavos que abarca el polígono.
Mapas	Mapas de carreteras, planos urbanos.	1.Papel, plástico 2.Secundaria 4.Media 5.Media	Problemas de recorridos mínimos, caminos posibles, distancias reales y en línea recta, escala del mapa, etc. Averiguar y comparar distancias en la línea recta entre poblaciones. Estudiar itinerarios posibles. Semejanza
Corcho	Corcho de embalar.	1.Corcho 2.Secundaria 4.Media 5.Baja	Montaje de modelos Teorema de Pitágoras.
Pentominós	Doce figuras distintas formadas cada una de ellas por cinco cuadrados iguales.	1.Madera, plástico 2.Secundaria 4.Media 5.Alta	Áreas equivalentes. Concavidad y convexidad.
Tangram	Puzzle formado por 7 piezas.	1.Cartulina, Plástico	Descripción de figuras. Polígonos. Áreas. Visualización. Creatividad.

		2.Secundaria 4.Alta 5.Baja	Fracciones. Radicales.

Las tareas con las que se trabajaron estos materiales fueron los siguientes:

Tarea 1: *Construcción de polígonos utilizando papel.*

1. Construye un cuadrado a partir de un trozo irregular de papel.
2. Construye un rectángulo de proporciones 1:2 dado un folio A4.
3. Construye un rectángulo 1:3 a partir del construido anteriormente.
4. Construye un rectángulo $(1-\sqrt{2})$ dado un papel cuadrangular.
5. Construye un rectángulo $(1-\sqrt{3})$.
6. Construye un triángulo equilátero.
7. Construye un hexágono.

Tarea 2: *Doblando papel*

1. ¿Cómo podría dividirse un segmento dado en n partes iguales doblando papel?
2. ¿Cuántos dobleces quedarían marcados si doblases n veces una tira de papel rectangular (siempre por la mitad del mayor lado inicial)?
3. ¿Qué polígonos regulares puedes construir doblando papel?

Tarea 3: *Construcción de Poliedros*

1. Construye la pieza base para el tetraedro, ditetraedro, octaedro e icosaedro (ten en cuenta que hay dos piezas simétricas).
2. Construye la pieza base para el cubo.
3. Construye el tetraedro.
4. Construye el cubo.

Tened en cuenta que trabajando en grupo conseguiréis terminar antes el poliedro.

Propuestas

1. Construye el di-tetraedro.
2. Construye un octaedro.
3. Construye un icosaedro.
4. Construye un icosaedro estrellado.

Tarea 4: *Áreas y volúmenes de los poliedros construidos.*

Nombre	Área de una cara	Área total	Apotema	Volumen
Tetraedro	$\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$	$a^2\cdot\sqrt{3}$	$\frac{a}{12}\cdot\sqrt{6}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

Di-tetraedro	$\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$	$6\cdot a^2\cdot\sqrt{3}$	$\frac{a}{12}\cdot\sqrt{6}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$
Octaedro	$\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$	$2\cdot a^2\cdot\sqrt{3}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Icosaedro	$\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$	$5\cdot a^2\sqrt{5}$	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$	$\frac{5\cdot a^3}{6}\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$
Hexaedro	a^2	$6\cdot a^2$	$\frac{a}{2}$	a^3
Dodecaedro	$\frac{5}{4}\cdot a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$15\cdot a^2\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{5\cdot a^3}{2}\cdot\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$

Tarea 5: *El teléfono*.

Para la realización de la presente tarea se necesitan dos personas. Una de ellas describirá a un amigo verbalmente (simulación de conversación telefónica) un objeto y la otra, construirá, con palillos y plastilina, la figura descrita.

Tarea 6: *Juegos de probabilidad*

1. Lanzamiento de dados: Calcular la probabilidad de obtener un número par con un dado construido en papel.
2. Juego del río: (Jugar por parejas).

   Cada uno de los jugadores dispondrá de 12 fichas (construidas por él).

Dibujando en el centro de un folio dos líneas paralelas (que representarán un río) y a cada lado del río 12 casillas numeradas.

Cada jugador situará sus fichas sobre las casillas que quieran, e incluso dejar casillas vacías.

Cada jugador (en su turno) lanzará dos dados, sumará los números de las caras superiores y moverá al otro lado del río las fichas que se encuentren en la casilla que tenga ese número.

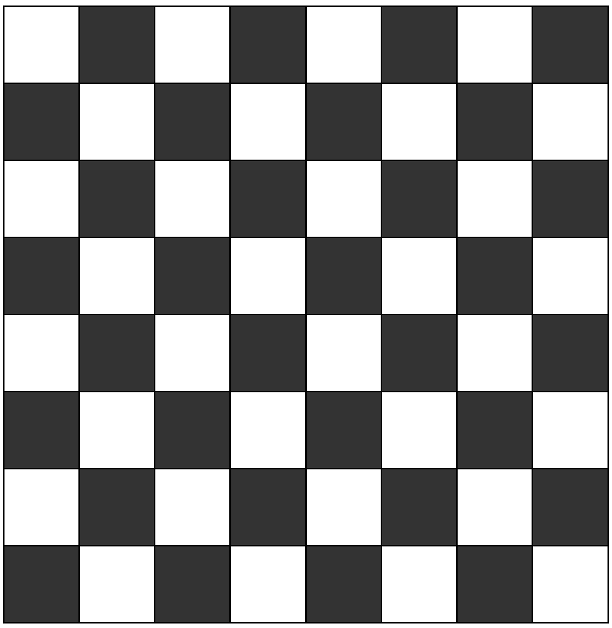
Ganará el primero que consiga pasar todas sus fichas al otro lado del río.

Tarea 7: *Perpendicularidad.*

1. ¿Cómo trazar las lindes de una superficie cuadrada en un terreno si sólo se dispone de una cuerda y una estaca?
2. ¿Cómo trazar en un terreno dos líneas perpendiculares?
3. ¿Cómo demostrar el teorema de Pitágoras doblando un papel?
4. ¿Cómo calcular alturas inaccesibles?

Tarea 8: *Cuadrados en un tablero de ajedrez.*

Alguien me dijo una vez
que 204 cuadrados
hay en un ajedrez.
¿Estaba bien razonado?



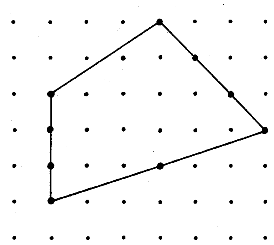
Tarea 9: *Geoplano 1*

1. Determinar todos los segmentos posibles en un geoplano.

2. Ordenar los segmentos por su longitud.

Tarea 10: *Geoplano 2*

El cuadrilátero construido en el geoplano tiene 16´5 unidades cuadradas de área. El perímetro del cuadrilátero pasa por 9 puntos. En el interior podemos contar 13 puntos.



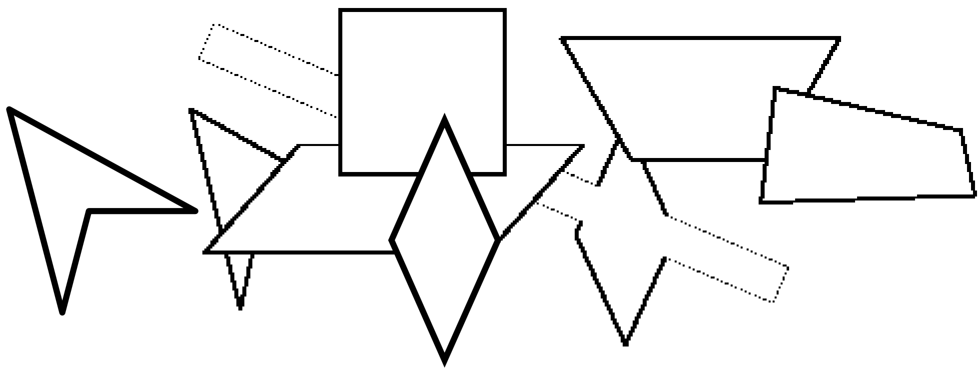
Prueba a construir otras figuras en el geoplano e intenta encontrar una relación entre el área de una figura, el número de puntos que quedan sobre el perímetro y el número de puntos que quedan en el interior (Teorema de Pick).

Tarea 11: *Palillos*

¿Cómo podrían unirse seis palillos de manera que se formen cuatro triángulos?

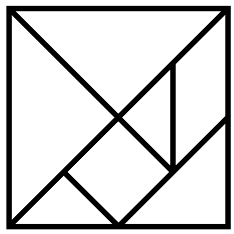
Tarea 12: *Cuadriláteros*

Dados los siguientes cuadriláteros



1. Ordénalos en tres o cuatro grupos de cualquier modo dando la norma que describe tu clasificación.
2. Ordena tu conjunto de cuadriláteros usando una clasificación diferente.

Tarea 13: *Tangram*



Realizar las siguientes actividades. Tome como referencia el tangram dibujado más arriba.

1. Escribe el nombre “matemático” de todas las piezas del tangram.
2. Practica con las piezas realizando los siguientes ejercicios:
   a. Une F y G para obtener una pieza igual que C.
   b. Une F y G para obtener una pieza igual que D.
   c. Une F y G para obtener una pieza igual que E.
   d. Une F, G y D para obtener una pieza igual que A o B.
   e. Une F, G y C para obtener una pieza el doble que D.
3. Completa la siguiente tabla anotando en cada celdilla qué fracción representa cada figura de la primera columna respecto a cada una de las de la primera fila. Como pista te damos la primera columna resuelta:

Pieza	A=B	C	D	E	F=G
A	1				
B	1				
C	1/2				
D	1/2				
E	1/2				
F	1/2				
G	1/4				

4. Suma todas las fracciones de cada columna y explica por qué sale ese número.
5. Es posible realizar las siguientes tareas. Demuestra tu respuesta.
   a. Forma un cuadrado con una sola pieza.
   b. Forma un cuadrado con dos piezas.
   c. Forma un cuadrado con tres piezas
   d. Forma un cuadrado con cuatro piezas.
   e. Forma un con cinco piezas
   f. Forma un cuadrado con seis piezas.
   g. Forma un cuadrado con siete piezas.
6. Construye las figuras siguientes: triángulo, rectángulo, trapecio isósceles, trapecio rectángulo, romboide, hexágono. Cuando lo hagas, dibuja las piezas en tu libreta.
7. Tomando como área unidad el cuadrado pequeño (FIGURA D) expresa el área de las demás piezas (la tabla tienes que dibujarla en tu libreta).

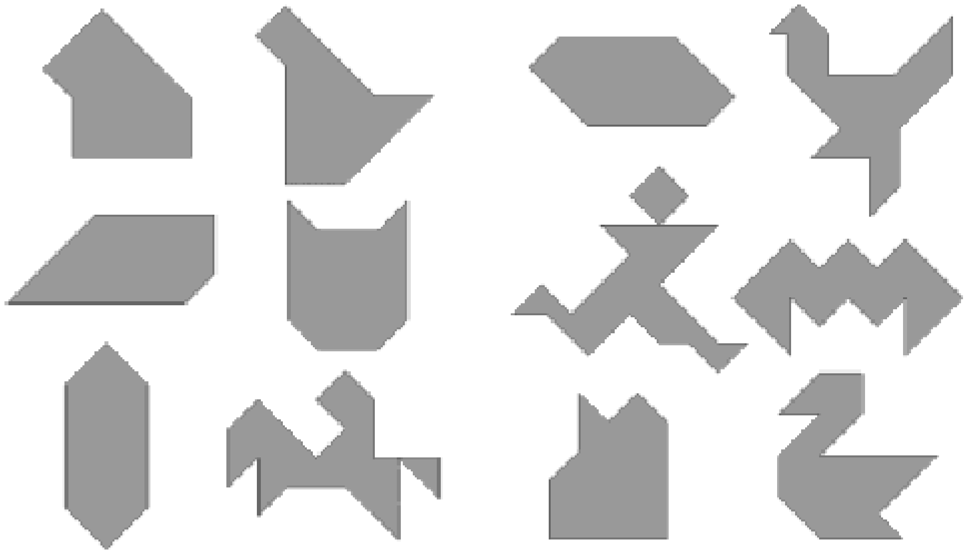
FIGURA	D	A=B	C	E	F=G

ÁREA	1				

8. Haz lo mismo tomando como unidad de área el triángulo pequeño (FIGURAS F y G).

FIGURA	F=G	A=B	C	D	E
ÁREA					

9. Calcula el área de cada pieza tomando como unidad un centímetro cuadrado.
10. Calca las siguientes siluetas en tu libreta. Después trata de construirlas con el tangram. Cuando lo consigas, dibuja la disposición de las piezas en su interior.



Tarea 13: *Pentominós*

1. Duplica todas las piezas utilizando cuatro piezas de las restantes.
2. Triplica todas las piezas utilizando nueve de las restantes.
3. Construye todos los rectángulos posibles.
4. ¿Cómo colocar las fichas de un pentominó de manera que formen un par de rectángulos de idéntica forma y tamaño?

Algunas Conclusiones

Iniciamos la presentación de este taller con la convicción de que los materiales pueden jugar un papel importante en la resolución de problemas. Este taller refuerza esta idea, ya que se ha observado que los materiales son uno de los medios que podemos utilizar y además nos permiten convencernos de que:

- La resolución de problemas es una actividad útil y motivadora para la representación y la conceptualización en las clases de matemáticas.
- Existe un problema siempre que algún obstáculo separa la situación actual de la deseada.
- Resolver problemas es objeto de aprendizaje.
- Con los materiales hemos visto que al ser manipulables resultan entretenidos, lo cual hace posible una mayor disposición por parte de los alumnos en las clases.
- La visualización de relaciones entre objetos matemáticos permite establecer con mayor claridad conceptos abstractos que de otra manera serían más complejos.
- Aunque aquí se han empleado ciertos materiales y ciertos problemas, siempre existirá la posibilidad de utilizar nuevos materiales para resolver estos mismos problemas, y otros problemas distintos, para resolver con nuevos materiales.
- Se han querido dar ideas a los profesores para mostrar que el conocimiento matemático puede ser construido y que ello depende, en parte, de las posibilidades de organización y adaptación por parte de cada profesor en cada clase.
- Los materiales económicos resultan tan eficaces como los "comerciales".
- No hace falta una gran infraestructura escolar para la utilización de materiales en el aula.

Bibliografía

ABRANTES, P. y OTROS (2002) La resolución de problemas en matemáticas. Barcelona: Graó

ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1988) *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Ed. Síntesis.

BRANSFORD, J.D. y STEIN, B. S. (1993*) Solución ideal de problemas.* Barcelona: Ed. Labor

CORIAT, M. (1997) *Materiales, recursos y actividades: un panorama.* En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.

JUNTA DE ANDALUCÍA (2002). *Decreto 148/2002, de 14 de mayo, por el que se modifica el Decreto 106/1992, de 9 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988) *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Ed. Labor

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM

POLYA, G. (1982) *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001) *Unidades didácticas. Organizadores.* En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.