Paradoja de las pelotas de tenis: Construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente

*Solange Roa Fuentes**

RESUMEN

En este trabajo se analizan las construcciones que sobre el infinito evidencian estudiantes (entre 14 y 16 años) que pertenecen a programas de enriquecimiento en matemáticas, al tratar con la paradoja de las pelotas de tenis. A partir de los elementos de la teoría APOE (Acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) se describe, mediante una descomposición genética, la construcción del infinito como un proceso iterativo infinito (concepción dinámica) y como un objeto trascendente (concepción estática). Con base en el análisis teórico se discuten las concepciones primarias que los individuos desarrollan y el rol fundamental del conjunto de los números naturales en la construcción del infinito como una totalidad.

Palabras clave: procesos iterativos infinitos, teoría APOE, números naturales, desarrollo de pensamiento matemático, talento matemático.

* Universidad Industrial de Santander, Grupo de Investigación Educación Matemática EDUMAT-UIS. Dirección electrónica: sroa@matematicas.uis.edu.co

INTRODUCCIÓN

El infinito matemático es una noción que ha sido ampliamente estudiada desde diferentes perspectivas teóricas en nuestra comunidad. Belmote (2009) hace un análisis detallado de las investigaciones que sobre el infinito se han desarrollado desde 1979 hasta 2008. Esta línea de tiempo parte de los trabajos sobre los modelos intuitivos tácitos propuesto por Fischbein (1987, 2001) hasta los trabajos recientes que desde la teoría APOE se han planteado sobre la construcción del infinito a partir de procesos iterativos infinitos (Brown, McDonald & Weller, 2010; Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic, 2005a, 2005b; Weller, Brown, Dubinsky, McDonald & Stenger, 2004). En este último marco, hemos desarrollado la investigación que presentamos en este escrito.

Dubinsky y otros (2005a, 2005b) discuten la dicotomía entre el infinito potencial y actual a partir de dos constructos cognitivos diferentes que responden a una concepción-proceso y a un objeto. La primera, una mirada dinámica del infinito, y la segunda, una estática. Siguiendo con esta idea, Brown y otros (2010) estudian en una situación específica relacionada con el conjunto de partes de los naturales, cómo este tipo de estructuras pueden ser logradas por los individuos. En particular, dicho trabajo propone la necesidad de una nueva estructura dentro de la teoría APOE, *un objeto trascendente.* Partiendo de estas ideas, nos interesa determinar en un contexto de paradojas cómo un individuo logra la construcción de un proceso iterativo infinito y qué mecanismo mental debe establecerse para construir el objeto trascendente.

A continuación describiremos en términos generales los aspectos teóricos que tomamos como base para el desarrollo de nuestra investigación.

ASPECTOS TEÓRICOS

La teoría APOE es una teoría constructivista que busca explicar cómo un individuo puede construir conceptos y tópicos matemáticos, mediante la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales que logra establecer al abordar una situación matemática.

Para empezar, este acercamiento teórico contempla la aplicación de acciones sobre objetos preexistentes. Las acciones se caracterizan por realizarse paso a paso y estar condicionadas por estímulos externos; estos pueden relacionarse con el contexto de la situación o la realización de algoritmos sobre casos particulares. Por ejemplo, en la construcción del concepto transformación lineal, una acción se refiere a verificar la preservación de las operaciones, dados una función y un caso particular de vectores y escalares. Cuando un individuo repite y reflexiona sobre dichas acciones, decimos que la acción ha sido interiorizada en un proceso. El proceso se diferencia de la acción en cuanto es una estructura mental sobre la cual el individuo tiene control. Un proceso puede dar lugar a un nuevo proceso mediante la coordinación con otro, o ser encapsulado en un objeto. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, es necesario coordinar los procesos de las operaciones, suma vectorial y producto, por un escalar en un único proceso. Esto se logra mediante el conector lógico "y" (. Este nuevo proceso se establece cuando las propiedades no se conciben como aisladas sino más bien se ven juntas, al considerar que, dada una función, debe preservar combinaciones lineales para ser transformación lineal. Un proceso puede ser encapsulado en un objeto. El objeto se caracteriza por ser una estructura estática sobre la cual se pueden aplicar nuevas transformaciones. En el caso de la transformación lineal, es necesario que un individuo reconozca las transformaciones lineales fundamentalmente como funciones. Y considere, por ejemplo, que una transformación lineal es un vector de un espacio vectorial (para más detalle consultar Roa-Fuentes & Oktaç, 2010; 2012). Finalmente, los esquemas son una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, todos relacionados con un tema particular.

Cuando un individuo logra la construcción de una estructura, diremos que tiene una *concepción* de dicha estructura (McDonald, Mathews & Strobel, 2000). A continuación describimos el ciclo de investigación que fundamenta los resultados de este trabajo.

MÉTODO: CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que contempla el desarrollo de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y observación, análisis y verificación de datos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). El objetivo del análisis teórico es diseñar un camino cognitivo denominado por la teoría una *descomposición genética*. En él se describen las construcciones y los mecanismos que debe seguir un individuo para construir un concepto o tópico matemático. Inicialmente este análisis es hipotético, por lo que se busca validar y refinar mediante la aplicación de las otras dos componentes. La segunda componente contempla el diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza que siga el camino propuesto en el análisis teórico. Finalmente la tercera componente busca determinar la viabilidad del análisis propuesto mediante la aplicación de entrevistas didácticas. Una vez se aplica el ciclo completo con un grupo de individuos, la descomposición genética se valida, al contemplar cuáles de las estructuras y los mecanismos pensados inicialmente se evidenciaron realmente en el trabajo de los estudiantes. También es posible que se encuentren evidencias diferentes y se tengan que agregar nuevos elementos al análisis teórico.

En esta investigación hemos desarrollado la primera y la tercera componente del ciclo mediante el diseño de una descomposición genética genérica del infinito, de la cual presentamos un análisis particular para el caso de la paradoja de las pelotas de tenis. La tercera componente la desarrollamos con estudiantes de programas de enriquecimiento en matemáticas en México (Fundación Telegenio y Olimpiadas Matemáticas) y Colombia (Escuela Precoz Glen Doman y Proyecto Semicírculo). Tomando como base el modelo propuesto por Mora, Casas & González (2009) sobre el talento matemático en un contexto sociocultural, ubicamos nuestro trabajo en los programas mencionados donde entrevistamos estudiantes con edades entre 14 y 16 años buscando determinar la viabilidad de la descomposición genética genérica. A continuación describimos el análisis cognitivo que dará fundamento a los datos obtenidos en las entrevistas.

LA PARADOJA DE LAS PELOTAS DE TENIS: UN ANÁLISIS COGNITIVO

La versión de la paradoja de las pelotas de tenis que utilizamos en nuestra investigación es una adaptación de la presentada en Dubinsky, Weller, Stenger & Vidakovic (2010).

> Imagina que tienes tres botes con una capacidad ilimitada. Dos de los botes están vacíos, y están etiquetados con las letras T y A. El otro, el bote contenedor, tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis numeradas de la siguiente manera: 1, 2, 3,... Imagina que realizas el siguiente experimento: Sacas del bote contenedor las pelotas número 1 y 2 y las colocas dentro del bote T e inmediatamente sacas la pelota de menor denominación, la pelota número 1, y la colocas en el bote A. Después sacas del bote contenedor las pelotas número 3 y 4 y las colocas dentro del bote T e inmediatamente después sacas la pelota de menor denominación, la pelota número 2, y la colocas dentro del bote A. Después sacas las pelotas 5 y 6 del bote contenedor y las colocas dentro del bote T e inmediatamente después sacas la pelota número 3 y la colocas en el bote A. Siguiendo con el experimento, ¿Cuál es el contenido de los botes T y A cuando el bote contenedor esté vacío?

Analizando cada paso es posible concluir que una vez el bote contenedor esté vacío, los botes T y A contendrán la mitad de las pelotas. Pero, por otra parte, si nos preguntamos por la posición de la pelota número *n,* podemos ver que en el paso *n* dicha pelota pasó al bote A. Luego es posible pensar que cuando el bote contenedor esté vacío, el bote T estará vacío y todas las pelotas estarán en A. La primera respuesta corresponde a una mirada dinámica de la situación donde las características de los pasos intermedios determinan la totalidad del proceso. La segunda es una visión estática del mismo, donde, al analizar la totalidad del proceso, es posible determinar un estado resultante que no se parece a los estados que lo preceden.

Esta diferencia del análisis total de la situación es lo que Brown y otros (2010) han denominado *objeto trascendente*, un objeto que no se genera de manera directa del proceso que lo precede. En nuestro análisis teórico hemos planteado la necesidad de construir un proceso iterativo infinito para dar lugar a este tipo de objetos. Estos procesos se caracterizan por la coordinación con el conjunto de los números naturales y una transformación sobre dicho conjunto determinada por el contexto de cada situación.

La transformación que identificamos en la paradoja es el movimiento, un proceso P_M que debe coordinarse con el conjunto de los números naturales P_N . En cada iteración, hay tres pelotas que se mueven a través de los tres botes: las pelotas $2n$ y $2n-1$ entran al bote T y la pelota n entra al bote A. Como analizaremos en la presentación de este trabajo, un asunto fundamental es construir este proceso como único. Los datos muestran cómo algunos estudiantes analizan esta transformación de movimiento como dos procesos independientes, para explicar la imposibilidad de vaciar el bote contenedor por tener un número infinito de pelotas. Ahora, una vez se logra el proceso P_2 es necesario aplicar un mecanismo que permita ver el proceso como un todo. En nuestra investigación hemos caracterizado este mecanismo y lo hemos llamado *completez*.

REFLEXIONES FINALES

Los principales resultados de nuestro trabajo se relacionan con el estudio y análisis de datos empíricos que fundamentan la necesidad de construir procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes determinados por el contexto en donde el infinito emerge. En este camino, proponemos la necesidad de diseñar modelos de clase en donde los estudiantes transformen sus concepciones primarias sobre el infinito al abordar diferentes situaciones mediante la construcción de procesos como el descrito para la paradoja de las pelotas de tenis. En la presentación de este trabajo profundizaremos sobre los datos empíricos, analizando el tipo de construcciones que los estudiantes logran sobre el infinito tomando como base la descomposición genética propuesta. Además, discutiremos las características de las concepciones primarias, que obstaculizan la construcción de un proceso iterativo infinito como un objeto trascendente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, II*. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1 – 32.

Belmonte, J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Brown, A., McDonald, A. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, C. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The tennis ball problem. *European journal of pure and applied mathematics* 1(1), 99-121.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics* 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. Educational *Studies in Mathematics* 60, 253-266.

Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies of Mathematics* 48(2/3), 309-329.

Fischbein, E. (1987).Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Holanda: Reidel.

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate Mathematics Education IV, *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 77-101.

Mora, L., Casas, A. y González, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes* 30, 131-151.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15(2), 199-232.

Roa-Fuentes, S. (2010). El infinito: Un análisis cognitivo de niños talento en matemáticas. Documento predoctoral, Programa de Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(1), 89 – 112.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS* 51(7), 741–750.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2012). Paradoja de las pelotas de tenis: Construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente. Memorias del 13 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Octubre 11, 12 y 13. Medellín: Colombia.