

Divisão Entre Frações: Resolução E Discussão De Tarefas E De Caso De Ensino Em Um Curso De Licenciatura Em Matemática

Fraction Division: Task Sheet Resolution And Discussion, And Teaching Case Study On A Mathematics Teaching Certification Course

Angélica Fontoura Garcia Silva

Universidade Anhanguera de São Paulo

Venessa Cristina de Carvalho

Mestre pela Universidade Anhanguera de São Paulo

Tânia Maria Mendonça Campos

Pós-doutora em Educação Matemática na Universidade de Oxford

Resumo

O presente artigo tem por objetivo apresentar as análises de uma atividade composta por três situações – duas tarefas e um caso de ensino –, realizada durante uma pesquisa com estudantes de Licenciatura em Matemática de uma Universidade particular paulista. O objetivo foi identificar conhecimentos profissionais dos futuros professores sobre os significados da divisão entre frações. Baseada nos níveis de conhecimento de Ball, Thames e Phelps, nos modelos de divisão de Ma e nos significados da divisão de Pinto e Monteiro, a tarefa analisada concentrou-se nos modelos de divisão estipulados por Pinto e Monteiro como a “divisão como medida” e “partilha”. A pesquisa foi desenvolvida de acordo com conceitos de Design Experiment. A análise dos dados foi feita qualitativamente. Os resultados revelaram que os participantes representam corretamente tanto as frações por meio da partição em figuras indicadas como a expressão da situação problematizada. No entanto, falta-lhes conhecimento para lidar com questões que exigiam a identificação da unidade de referência. Observou-se, ainda, a (re)significação de conhecimentos necessários ao ensino da divisão entre frações a partir das reflexões realizadas durante o experimento.

Palavras-chaves: Formação inicial. Conhecimento profissional docente. Divisão entre frações.

Abstract

This article aims to present the analysis of a classroom activity containing three situations - two tasks and one teaching case - applied during a research with mathematics student-teachers at a private university in Sao Paulo. The goal was to identify the professional knowledge of the future teachers about the meanings of fraction division. Based on knowledge levels as proposed by Ball, Thames and Phelps, and on mathematics division models as well as on the meanings of division by Pinto and Monteiro, the analyzed task focused on division models as established by Pinto and Monteiro as "division as measurement" and "partition". The research was developed according to the Design Experiment concepts. Data analysis used qualitative methodology. Results showed that participants correctly represent both fraction through partition in assigned figures and the expression of the problem-situation presented. However, they lack knowledge to deal with issues that required the identification of reference units. It was also observed the (re)signifying of required knowledge for the teaching of fraction division on teachers' reflections carried out during the experiment.

Keywords: Initial development. Teacher Professional Knowledge. Fraction division.

1 Introdução

O professor exerce um papel central na organização do trabalho pedagógico. Ao perfil desse profissional são atribuídas inúmeras expectativas quando a temática é promover um ensino de qualidade. Acreditamos, assim como Paulo Freire, que esse é um processo em constante (re)significação:

Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou é marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática. (FREIRE, 1995, p. 58)

Em virtude disso, acreditamos que a capacidade de refletir sobre o ensino não se dá de forma espontânea, mas demanda, desde a formação inicial do educador que vai ensinar matemática, propostas de ações elaboradas para esse fim.

Todavia, estudos como os de Mello (2000, p.100) já discutiam a urgência “da reformulação da teoria e prática da formação de professores no Brasil”. A autora afirma que a formação inicial de professores que lecionarão disciplinas específicas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio apresenta limitações estruturais, haja vista que, muitas vezes, ela não proporciona aos futuros profissionais da educação “integração permanente e contínua entre a teoria e a prática” (p.100). Segundo Mello (2000, p. 100, autoria do grifo?),

no caso do especialista, o conhecimento do conteúdo não toma como referência sua relevância para o ensino de crianças e jovens, e as situações de aprendizagem que o futuro professor vive não propiciam a articulação desse conteúdo com a transposição didática; em ambos os casos, a “prática de ensino” também é abstrata, pois é desvinculada do processo de apropriação do conteúdo a ser ensinado.

Ainda nesse sentido, estudos desenvolvidos na área¹ demonstram que essa realidade ainda se mantém, mesmo com todos os esforços de educadores matemáticos, profissionais da educação e, até mesmo, de órgãos oficiais.

Dessa forma, consideramos ser importante a realização de um estudo que busque analisar a (re)significação de conhecimentos relacionados aos conteúdos necessários aos futuros profissionais que ensinarão matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008).

Neste artigo, analisaremos um episódio desenvolvido em uma das aulas de prática de ensino, ministrada no ano de 2014 em uma universidade particular da cidade de São Paulo.

Para mostrar os resultados encontrados neste estudo iniciaremos por expor sua

¹ Tais estudos são apresentados neste artigo mais à frente.

relevância e fundamentação. Em seguida, descreveremos os procedimentos metodológicos, apresentaremos e discutiremos as informações coletadas, para, finalmente, tecer nossas considerações finais.

2 Relevância Deste Estudo

A dicotomia existente entre teoria e prática, discutida em vários estudos, é apontada também no âmbito da Matemática. Ponte (2006), por exemplo, ao discutir o Processo de Bolonha para a formação inicial de professores portugueses, afirma ser necessário reconhecer, na formação inicial do professor de Matemática, a natureza complexa e multifacetada da ação profissional dos professores e de sua formação, e considera que, nesse processo formativo, há necessidade

[...] de partir das crenças, concepções e conhecimentos dos jovens candidatos a professores, contemplar uma diversidade de metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação do desempenho do formando e de valorizar a função formativa da prática profissional acompanhada. (PONTE, 2006, p. 27)

No Brasil, embora se considerem resultados de pesquisa e se possua uma legislação que entenda que a Prática como Componente Curricular (PCC)² deve ocorrer dentro das próprias disciplinas ofertadas nos cursos de formação inicial, distribuídas em sua carga horária de modo a favorecer aos futuros professores vivências que relacionem a Teoria e a Prática, isso parece não ocorrer.

Moreira (2004), por exemplo, ao investigar o processo de formação no curso de Licenciatura em matemática no estado de Minas Gerais, por meio da análise de relações entre os conhecimentos matemáticos e a prática docente escolar, identifica que a formação do conteúdo está desarticulada da pedagógica e da prática profissional. Ele conclui que: “[...] o conhecimento matemático é trabalhado no processo de formação a partir da perspectiva e dos valores da matemática acadêmica, ignorando-se importantes questões escolares que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores” (MOREIRA, 2004, p.178).

Diante disso, o autor considera ser necessário “um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da matemática científica e da matemática escolar nesse processo” (MOREIRA, 2004, p.178). Segundo Fiorentini e Oliveira (2013), resultados como os de Moreira (2004) são observados em diversas pesquisas

² Resoluções e Normas legais regulamentam a Resolução do Conselho Nacional de educação-CNE/CP n.º1, de 18/02/2002.

que investigam licenciaturas brasileiras.

Quanto à nossa proposta de investigar as noções relativas à divisão entre frações, é importante destacar que estudos nacionais e internacionais, tais como Ball (1990); Damico (2007); Ma (2009); Neves (2008); Pinto e Monteiro (2008); Tirosh et al. (1998) e Tirosh (2000), por exemplo, argumentam que ensinar essa temática requer do professor um repertório de conhecimentos que vai além de compreender e aplicar os procedimentos necessários.

A esse respeito, destacamos que os resultados de pesquisas que vêm sendo realizadas mostram lacunas nos conhecimentos de estudantes da Educação Básica relativas a esse tema. Além disso, observa-se ainda dificuldade, por parte dos professores, em problematizar a divisão entre frações, abordando tal conteúdo, quase exclusivamente pela utilização dos procedimentos de cálculo. Por essas razões, proporcionar a futuros professores possibilidades de estudar diferentes significados da divisão com frações nos parece relevante.

Além disso, para realizar esta investigação, buscamos apoio também nas pesquisas de Vergnaud (1988,1990), que, ao estudar o Campo Conceitual multiplicativo, discute ser necessário, para favorecer a construção desse conceito ao professor, que ele ofereça a seus alunos o contato com situações envolvendo diferentes significados da divisão. Assim, fundamentados nessas investigações, consideramos que, para esta pesquisa, deveríamos apresentar aos futuros professores uma situação com divisão entre frações envolvendo os significados: a divisão como medida (ou quota) e a divisão como partilha equitativa.

Tendo por base o que acaba de ser exposto, neste estudo procuramos investigar os conhecimentos mobilizados por futuros professores de matemática, estudantes de um curso de Licenciatura, ao refletir sobre situações de ensino da divisão entre as frações e interpretá-las do ponto de vista do aluno. Essa interpretação pode favorecer a tomada de decisão desses futuros profissionais e tornar-se um importante componente da prática de ensino.

3 Marco Teórico

Para a elaboração da sequência e para a análise dos resultados, tomamos como base um quadro teórico relacionado tanto à formação de professores quanto ao objeto matemático “divisão entre frações”. Quanto ao primeiro enfoque, procuramos, em particular, os estudos que tratam do conhecimento profissional docente: utilizamos ideias divulgadas por Ball, Thames e Phelps (2008).

Esses pesquisadores propõem um refinamento para as categorias de Shulman (1986). A

Figura 1 mostra a correspondência entre as categorias fundamentais de conhecimento estipuladas por Shulman (1986) e a subdivisão conceitual dada por Ball e colegas.

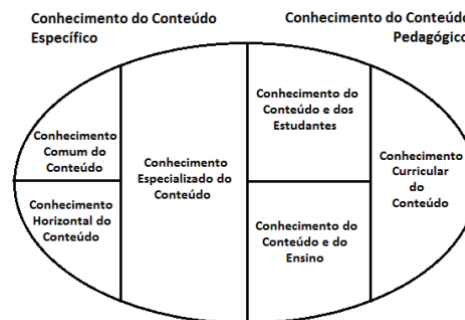


Figura 1 – Relação entre as categorias necessárias para o ensino estipuladas por Ball, Thames e Phelps (2008) e as definidas por Shulman (1986)

Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p.403, tradução das autoras)

Neste artigo analisaremos somente o Conhecimento do conteúdo comum (CCK); o Conhecimento especializado do conteúdo (SCK); e o Conhecimento do conteúdo e do estudante (KCS). Segundo Ball, Thames e Phelps (2008) a primeira categoria, Conhecimento do conteúdo comum (CCK), é como a que abrange o conhecimento do assunto e de suas estruturas organizacionais, necessários para nortear o professor sobre o que é legítimo ensinar ou não. Segundo esses autores, o professor deve ser capaz de: “[...] saber quando os estudantes têm respostas erradas, reconhecer quando o livro didático dá uma definição incorreta, e ser capaz de usar termos e notações corretamente quando fala e escreve na lousa” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.394, tradução nossa).

A segunda categoria, o Conhecimento especializado do conteúdo (SCK), se refere ao conhecimento estritamente matemático necessário ao ensino. Segundo os autores, o professor deve ser capaz de avaliar os erros dos alunos, a fim de identificar a fonte desses erros, e tomar providências para saná-los, orientando os alunos de forma eficiente e fluente. “Análises como essas são características do trabalho distintivo que o professor faz e elas requerem um tipo de raciocínio matemática que a maioria dos estudos não precisam fazer em uma base regular” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.395, tradução nossa)

Ball, Thames e Phelps (2008) definem a categoria Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) como o resultado da experiência do professor no magistério, ou seja, sua experiência com os estudantes e com o conhecimento de seus pensamentos. Nesse caso, a experiência do professor auxilia no diagnóstico dos erros e de suas possíveis causas. Para eles, sem o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, seria inútil ter o conhecimento do conteúdo específico ao ensinar.

É claro, considerações matemáticas deste tipo [referindo-se a avaliações de erros] só

valem a pena se o professor souber o suficiente sobre estudantes e ensino para fazer uso disto, mas o ponto que nós queremos ressaltar aqui é que o trabalho do professor constitui uma forma de resolver problemas matemáticos que vive dentro do trabalho de ensinar.

(BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.396, tradução nossa)

Como os participantes deste estudo não têm a experiência profissional indicada por Ball e colaboradoras, procuramos tornar viva uma situação, por meio da análise de um estudo de caso, o qual denominaremos de *Caso de Ensino*³, envolvendo um aluno fictício. Nosso propósito foi utilizar tal situação para promover a discussão e a reflexão entre os licenciandos de Matemática.

4 Procedimentos metodológicos da pesquisa

Para o desenvolvimento deste estudo utilizamos princípios da metodologia *Design Experiments*, sob a perspectiva de Cobb et al. (2003). Procuramos apresentar uma abordagem particular de noções relativas ao conceito de divisão entre frações. Nosso propósito era contribuir para a reflexão do grupo de futuros professores sobre os processos de ensino e aprendizagem desse conteúdo, favorecer a (re)significação do conhecimento comum da temática e desenvolver conhecimentos necessários ao futuro professor para promover sua aprendizagem.

Participaram deste estudo 11 estudantes de Licenciatura em Matemática com idade entre 25 e 35 anos, sendo 3 mulheres e 8 homens. Todos eles frequentaram escola pública, e 3 foram alunos do programa de Ensino para Jovens e Adultos (EJA) da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Além disso, 3 eram professores da rede pública – 2 professores dos anos finais e 1 professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para preservar a identidade dos participantes deste estudo, usaremos letras maiúsculas do alfabeto e, assim, vamos nomeá-los como Futuros Professores (FP) A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K.

A atividade aqui analisada foi desenvolvida durante a primeira sessão de formação. Nela foram realizadas três tarefas que tratavam da divisão entre frações. Tais divisões tinham foco nas categorias da divisão como medida e da divisão como partilha equitativa. Para elaborar essa proposta, nos inspiramos em Pinto e Monteiro (2008).

A primeira tarefa consistia em realizar a representação das frações por meio de figuras, a segunda tarefa buscava resolver aritmeticamente uma situação problematizada e a terceira

³ Definiremos Caso de Ensino, neste artigo, mais à frente.

envolvia um *Caso de Ensino* que deveria ser analisado, a fim de reconhecer as possíveis estratégias utilizadas por um aluno fictício. Procuramos com isso analisar diferentes categorias de conhecimento profissional dos licenciandos e, para tanto, dotar de significado aspectos ligados à realidade do ensino da matemática (LLINARES, 2013). Esse autor chama-nos a atenção para o fato de a atividade profissional ser multifacetada:

O perfil profissional do professor de matemática é moldado pela complementaridade entre os conhecimentos da investigação (Conhecimento que pode ser encontrada em livros e revistas científicas) e os conhecimentos adquiridos por meio da experiência. O desempenho do profissional, a longo prazo, depende da forma como o professor reúne, seleciona, integra e interpreta seu/sua experiência. A prática da matemática do professor envolve uma série de tarefas profissionais. Uma destas tarefas profissionais é a adaptação das atividades matemáticas para apoiar a aprendizagem dos alunos. (LLINARES, 2013, p.78)

Na primeira tarefa, foi solicitado aos futuros professores representar metades, quartos, sextos e duodécimos de uma figura formada pela composição de dois hexágonos regulares adjacentes, tomada como a unidade. Na Figura 2 é apresentada a imagem da Tarefa.

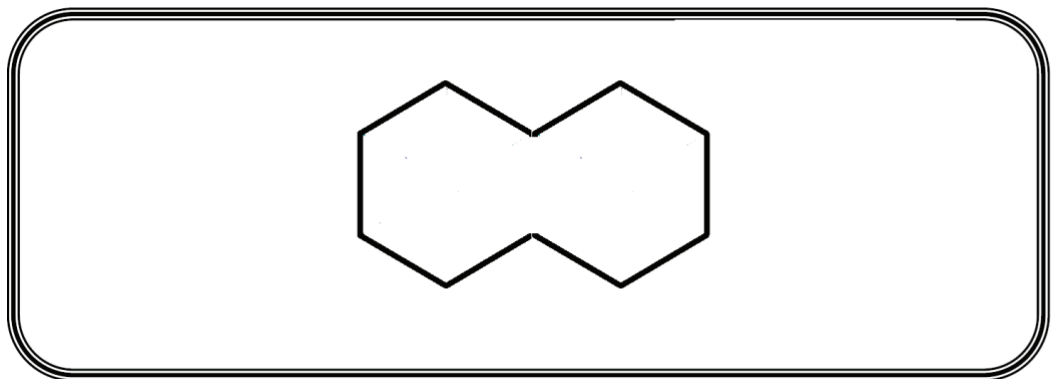


Figura 2 – Imagem da primeira tarefa apresentada aos participantes
Fonte: acervo das pesquisadoras

O objetivo dessa tarefa foi identificar os Conhecimentos de Conteúdo explicitados pelos licenciandos acerca da representação de diferentes frações de uma determinada figura. Embora não tenha sido solicitado no enunciado da tarefa, esperávamos que os participantes representassem as frações da unidade apresentada, utilizando a partição: repartição/divisão da figura em dois hexágonos, como sendo metade da figura; em trapézio, como sendo os quartos da figura; e em triângulos equiláteros, como sendo os duodécimos da figura.

Acreditávamos que os participantes não teriam dificuldades para resolver a questão, uma vez que estudos nacionais e internacionais, como os de Damico (2007), Tirosh et al. (1998) e Tirosh (2000), dentre outros, demonstram a tendência de futuros professores a utilizar representações gráficas com foco na interpretação parte-todo das frações. Todavia,

consideramos ser fundamental observar se esse era um conhecimento já consolidado pelo grupo que participou da investigação.

Assim, durante a sessão de pesquisa, após a realização da primeira tarefa, discutimos e compartilhamos com o grupo as resoluções dadas.

Na segunda tarefa, propusemos aos futuros professores que resolvessem aritmeticamente uma situação problematizada. Nela informamos aos participantes que considerassem que, na unidade anterior – Figura 2 –, cada duodécimo fosse formado por um triângulo equilátero e cada quarto fosse formado por um trapézio. Solicitamos que determinassem quantos trapézios caberiam em 11 triângulos e, em seguida, representassem os cálculos aritmeticamente. Nessa tarefa – segunda – também buscamos analisar o Conhecimento do Conteúdo evidenciado pelo grupo investigado.

Por último, na terceira tarefa – Figura 3 –, a qual denominamos *Caso de Ensino* (CE) na perspectiva de Alarcão (2005), ou seja, um instrumento de natureza descritiva, será uma situação real ou fictícia (neste caso) como ferramenta que pode potencializar o processo reflexivo na formação docente. Segundo a autora, os CE têm o propósito de dar visibilidade aos conhecimentos sobre o ensino envolvidos na situação descrita.

Por meio desse CE, solicitamos aos licenciandos a análise de uma resposta fictícia de um aluno a uma situação apresentada por um professor de Matemática, também fictício (Figura 3). Pretendíamos que o futuro professor, ao analisar esse CE, refletisse sobre a situação e envolvesse elementos do *Conhecimento do Conteúdo Especializado* (SCK) e também do *Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes* (KCS).

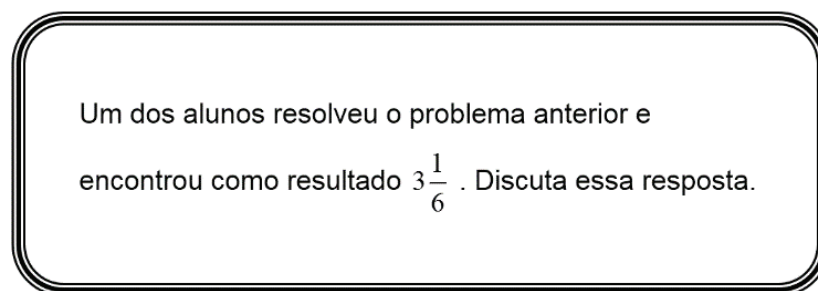


Figura 3 – Terceira Tarefa: *Caso de Ensino* apresentado aos participantes
Fonte: Acervo das pesquisadoras

Deste Caso de Ensino esperava-se que os futuros professores identificassem que o principal erro do aluno foi relativo à mudança da unidade de referência: ele deixou de olhar para os trapézios e passou a observar os hexágonos.

5 Discussão e análise dos dados

A primeira tarefa foi considerada pelos participantes como de fácil execução; discutimos e compartilhamos com o grupo as resoluções dadas e observamos que todos os participantes tiveram sucesso ao resolvê-la. Reiteramos que, com essa tarefa, pretendíamos investigar o *Conhecimento do Conteúdo* para a representação pictórica de uma situação que poderia ser resolvida por meio da relação parte-todo. Todos os participantes deste estudo já se utilizavam da partição para representar diferentes frações de uma dada figura. Assim, eles não tiveram dificuldades de representar a parte do todo indicado. Esses resultados já eram esperados e se aproximam dos encontrados por Damico (2007), Tirosh et al. (1998) e Tirosh (2000), dentre outros.

Nas respostas à segunda questão, observamos os seguintes procedimentos de resolução: três estudantes representaram $\frac{11}{12} : \frac{1}{4} = \frac{11}{3}$ e dois deles, ao final, reconheceram onze terços como três inteiros e dois terços, dentre eles o FPC – Figura 4 – mostrou também indícios de sua compreensão, ao escrever que aquela expressão indicava: “Quantos $\frac{1}{4}$ cabem em $\frac{11}{12}$ ”; e um dos estudantes indicou apenas os onze terços – FPI.

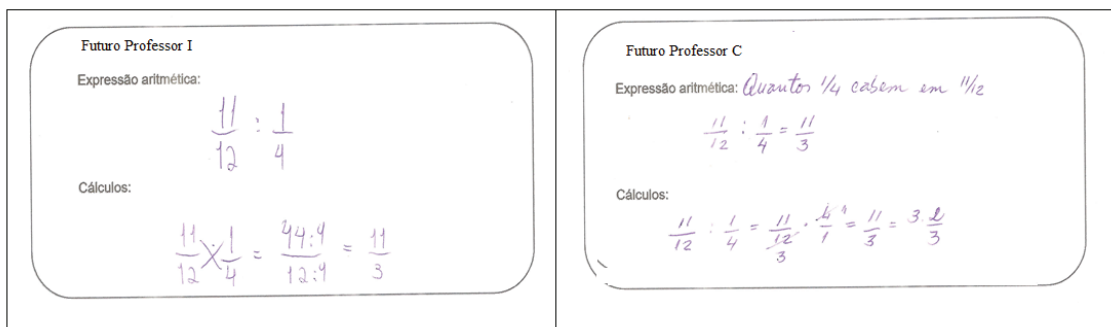


Figura 4 – Respostas apresentadas pelos Futuros Professores I e C
Fonte: Acervo pessoal

Consideramos que esses três estudantes representaram corretamente o resultado em termos da unidade de referência “trapézio”.

Todavia, a maioria – oito participantes (entre eles, o futuro professor G – Figura 5) – apresentou o resultado aritmeticamente, mas como uma composição de inteiros, e considerou $\frac{3}{3}$ como a medida de um trapézio inteiro, tomando o triângulo como referência.

Futuro Professor G

Expressão aritmética:

$$\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

Figura 5 – Resposta apresentada pelo Futuro Professor G
Fonte: Acervo pessoal

É possível observar que o FPG nos apresentou a representação aritmética do resultado obtido pela representação geométrica da

subdivisão realizada na Figura 5 – o trapézio é indicado como o inteiro ($\frac{3}{3}$) formado por três triângulos, o que revela que ele deduziu que, se o triângulo corresponde a $\frac{1}{3}$ do trapézio, a medida de um trapézio é igual à medida

de três triângulos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$, ou seja, para quem respondeu dessa forma, essa é a medida do trapézio, tomando-se como referência a unidade triângulo. Entretanto, esses participantes não perceberam que, se tomarmos como unidade a figura inicial formada pelos dois hexágonos

regulares, a medida do trapézio é $\frac{3}{12}$, e não $\frac{3}{3}$, como o indicado.

Essa interpretação também foi observada, analisando os protocolos dos futuros professores B e H. O FPB, além de representar aritmeticamente a composição, transformou-a em uma equação; já o futuro professor H considerou os três trapézios como 1 inteiro, conforme a Figura 6, apresentada a seguir:

| | |
|---|---|
| <p style="text-align: center;">Futuro Professor B</p> <p style="text-align: center;">Expressão aritmética:</p> $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \text{ ou } 3\frac{2}{3} = \frac{11}{3} \text{ ou}$ <p style="text-align: center;">Cálculos:</p> <p>1 trapézio = 3 triângulos 2 trapézios = 11 triângulos $3x = 11$ $x = 11/3$</p> | <p style="text-align: center;">Futuro Professor H</p> <p style="text-align: center;">Expressão aritmética:</p> $3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ <p style="text-align: center;">Cálculos:</p> $\frac{2}{3} + 3 = \frac{2+9}{3} = \frac{11}{3}$ |
|---|---|

Figura 6 – Respostas apresentadas pelos Futuros Professores B e H
Fonte: acervo pessoal

Durante as discussões, alguns dos futuros professores fizeram comentários acerca dos procedimentos de resolução por eles utilizados. Nessa reflexão, os participantes destacaram a possibilidade da formação de três trapézios inteiros, dados pelo agrupamento de três triângulos equiláteros cada um. Comentaram também sobre a impossibilidade de se formar o quarto trapézio, uma vez que os 11 triângulos, divididos em grupos de 3 triângulos, resultariam em três trapézios e restariam apenas 2 triângulos. Esse grupo pontuou a sobra de $\frac{2}{3}$ de um trapézio como o resto no algoritmo da divisão entre inteiros (11:3).

Os membros de um dos grupos de alunos utilizaram o mesmo procedimento de resolução, porém apontaram a existência de quatro trapézios, sendo o quarto trapézio incompleto, pois, segundo o estudante, dele havia sido retirado $\frac{1}{3}$ do todo, indicando a ideia de subtração.

Quando questionados acerca da ideia de divisão presente na situação, três futuros professores se colocaram:

Eu ia dividir... eu ia dividir, mas... por que daí, se ele dividir os onze por 3... na verdade, aí vai sobrar o resto. Seria os dois terços. (Futuro Professor F)

Eu fiz assim: um trapézio é igual a três triângulos. Aí, quantos trapézios são iguais a x triângulos? Daí, x trapézios é igual a onze triângulos. Aí vai ficar três x é igual a onze, e x é igual a onze terços. (Futuro Professor B)

A gente pode pegar onze triângulos e dividir por três. Se colocasse outro lá, formava mais um trapézio. (Futuro Professor E)

Esses futuros professores procuraram descrever a situação por meio de uma divisão entre inteiros. Analisando o ocorrido, foi possível perceber que a maioria dos participantes, quando solicitado que determinassem quantos trapézios caberiam em 11 triângulos, conforme a representação da unidade (dois hexágonos adjacentes), concluiu que seriam $\frac{11}{3}$, estabelecendo relação entre as quantidades de triângulos apresentados no enunciado (11) e de triângulos que cabem em cada trapézio (3). Assim, encontramos indícios de que essa tarefa induziu a maioria dos futuros professores a resolvê-la por meio da observação empírica das divisões marcadas na figura e, quando solicitados a representar aritmeticamente, se valeram da seguinte relação entre quantidades: $\frac{\text{quantidade de triângulos destacados na unidade}}{\text{quantidade de triângulos de cada trapézio}}$, sem tentar estabelecer relação entre as frações representativas de cada figura ($\frac{11}{12} : \frac{1}{4}$).

No decorrer da aula, fundamentados, fizemos com o grupo a leitura de Pinto e Monteiro

(2008) e representamos a expressão $\frac{11}{12} : \frac{1}{4}$ por meio da imagem apresentada na Figura 7.

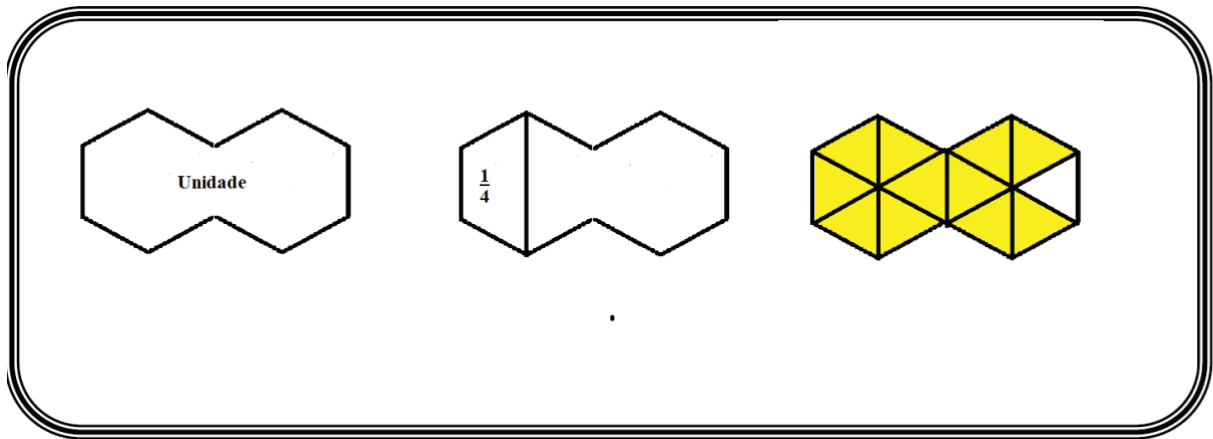


Figura 7: Representação da expressão $\frac{11}{12} : \frac{1}{4}$

Fonte: (indicar)

Por meio da imagem foi possível ao grupo de alunos perceber que um trapézio equivale a $\frac{1}{4}$ da unidade (2 hexágonos adjacentes); que ele é equivalente a 3 triângulos; ($\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$) e que os 11 triângulos cabem em 3 trapézios inteiros mais 2 triângulos ou seja $3\frac{2}{3}$ trapézios.. A representação da Figura 7 nos permitiu perceber a expressão: $\frac{11}{12} : \frac{1}{4} = \frac{11}{12} : \frac{3}{12} = 3\frac{2}{3}$ trapézios cobrem os 11 triângulos.. Tal situação nos permitiu analisar o algoritmo do denominador comum para a divisão de frações, qual seja, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$. Tal fato levou o Futuro Professor I a chamar a atenção do grupo:

É verdade o que está escrito no artigo [referindo-se a análise do artigo de Pinto e Monteiro (2008)]: quando as partes têm o mesmo tamanho, o resultado da divisão vai depender apenas da relação entre o número de partes envolvidas e não do seu tamanho. Olha, eu nunca pensei que, para dividir frações com o mesmo denominadores, basta dividir os numeradores, eu nunca vi isso na escola. (Futuro Professor I)

Analisando a tarefa, observamos que, inicialmente, nos pareceu que os alunos tiveram dificuldades para resolvê-la por meio de uma expressão aritmética que modelasse com correção a situação proposta, pois não se chamou a atenção dos alunos para que partissem da primeira tarefa, mas ao final, consideramos que foi possível ampliar o conhecimento do conteúdo e do ensino.

Em seguida apresentamos o *Caso de Ensino*, a fim de aprofundar a discussão e a reflexão

acerca da necessidade de observar e registrar qual seria a unidade de referência. Aliado a isso, buscamos, além de (re)significar os conhecimentos dos futuros profissionais envolvidos, analisar o Conhecimento do Conteúdo e do Estudante do ponto de vista de Ball, Thames e Phelps (2008).

Com a análise do *Caso de Ensino* no qual apresentamos uma resolução de um aluno fictício, pretendíamos que os participantes percebessem dificuldades relativas à compreensão do papel da unidade em situações-problema envolvendo frações. Nossa escolha se deu porque estudos nacionais e internacionais (CAMPOS; RODRIGUES, 2007; KIEREN, 1980; MACK, 1990; e RODRIGUES, 2005) indicam que esse tipo de dificuldade é recorrente tanto em estudantes do Ensino Fundamental como em alunos que cursavam o final da Educação Básica e iniciavam o Ensino Superior.

Assim sendo, consideramos que esse *Caso* apresentado poderia favorecer a discussão e a reflexão do grupo sobre essa temática. Além disso, como já afirmamos anteriormente, procuramos dotar de significado o que é realmente a tarefa de ensinar a divisão entre frações.

Como a resolução ocorreu antes da discussão da tarefa anterior, os protocolos dos participantes mostram que nove deles descreveram a resposta dada pelo aluno, porém não mencionaram a mudança de unidade de referência (trapézio). Na Figura 8 encontramos dois desses protocolos.

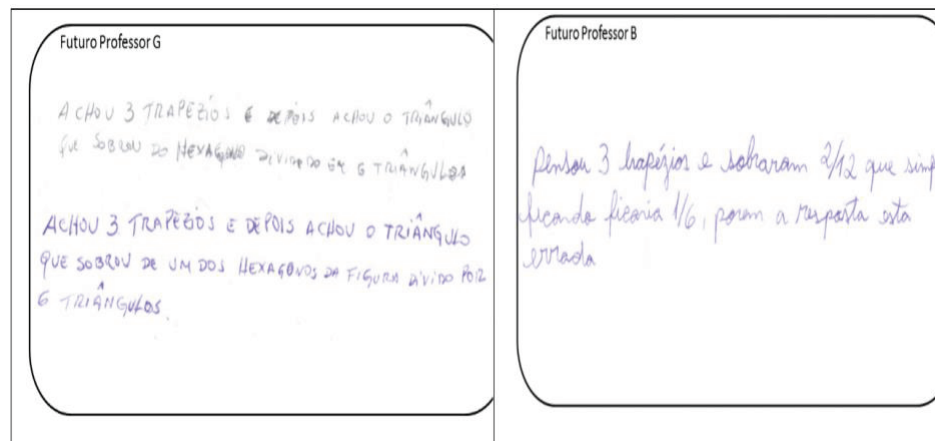


Figura 8 – Respostas apresentadas pelos Futuros Professores G e B
Fonte: acervo pessoal

Outro participante (Figura 9) apresentou também a descrição, mas optou por expor sua resposta também utilizando representações pictóricas.

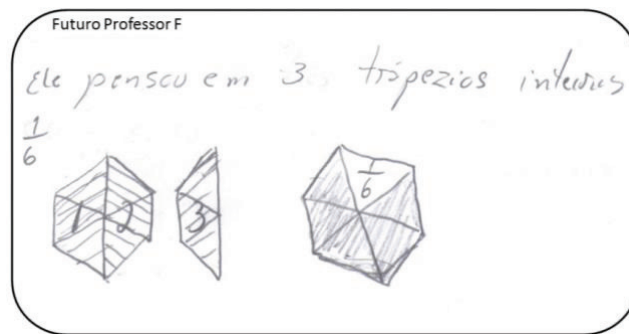


Figura 9 – Resposta apresentada pelo Futuro Professor F
Fonte: acervo pessoal

O Futuro Professor D (Figura 10) argumentou fundamentado na imagem ($3\frac{1}{6}$). Partindo desse princípio, consideramos que ele procurou verificar a incorreção da resposta do estudante.

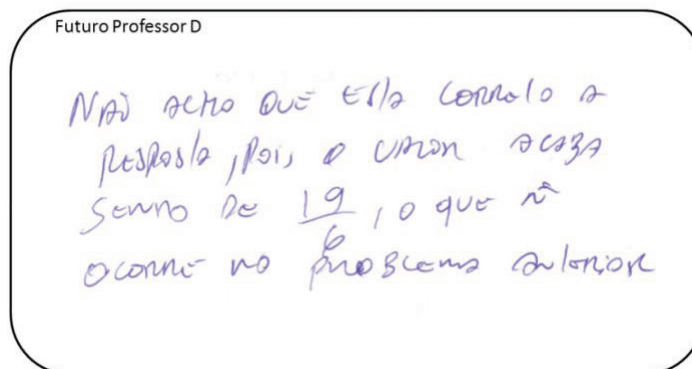


Figura 10 – Resposta apresentada pelos Futuro Professor D
Fonte: acervo pessoal

Ainda houve, entre os futuros professores, um participante (FPK) que apresentou uma análise inconsistente, como podemos observar na Figura 11:

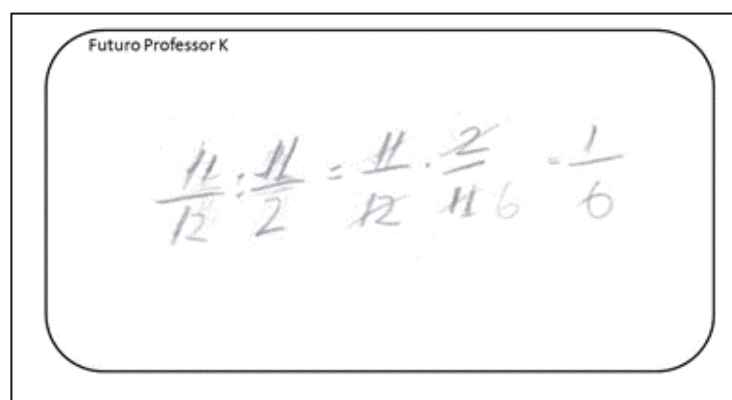


Figura 11 – Resposta apresentada pelo Futuro Professor K
Fonte: acervo pessoal

Os futuros professores A e C não deixaram claro que a parte desprezada do desenho se referia aos dois triângulos restantes, que formariam o quarto trapézio $\left(\frac{2}{3}\right)$.

Essas respostas foram dadas antes da discussão da tarefa anterior, e indicam lacunas nos conhecimentos dos futuros professores em relação as essas dificuldades possivelmente encontradas por alunos na compreensão do papel da unidade na situação apresentada. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes relaciona a compreensão do conteúdo matemático ao conhecimento da forma como pensam os alunos, possibilitando ao professor a previsão e a análise de erros comuns de estudantes e a busca de encaminhamentos, a fim de superá-los.

Tendo posse dessa informação, discutimos a tarefa 2 a partir da Figura 7 e, ao analisar, retomamos a discussão acerca do papel da unidade de referência, apresentando aos futuros professores alguns estudos contendo resultados de pesquisa, como o de Campos e Rodrigues (2007), por exemplo. Em seguida, solicitamos que retomassem a análise da situação anterior e planejassem intervenções. Das sugestões apresentadas, destacamos duas:

O trabalho com o Tangram poderia ser uma boa intervenção. Lembra quando nós trabalhamos com ele na aula? A senhora pegou a peça pequena e pediu para dizer que fração ele representava do quadrado grande e, depois, perguntou que fração representava da metade dele. (Grupo 1)

Nós achamos que aquelas situações que vimos no artigo [referindo-se às situações apresentadas no artigo]. (Grupo 2)

Consideramos que nesse momento fizemos o que Llinares (2013) considera como “dotar de significado aspectos da realidade do ensino da matemática”, ou seja, (re)significar essa atividade, que para o autor é uma atividade profissional multifacetada. Portanto, consideramos que a apresentação e a discussão da situação durante a intervenção favoreceram o processo de reflexão sobre a necessidade de reconhecer a existência de diferentes unidades de referência.

6 Considerações Finais

As informações revelaram que os estudantes participantes deste estudo eram dotados do conhecimento acerca dos procedimentos de cálculo para realizar a divisão entre frações e utilizar a partição para representar a fração. Entretanto, eles não tinham a preocupação de discutir a necessidade de manutenção da unidade de referência para proceder à medida.

Consideramos que, ao propor a modelagem da situação por meio de uma expressão

aritmética, o pesquisador poderia ter chamado a atenção dos futuros professores para que relacionassem as representações da primeira tarefa à segunda tarefa. Notamos ainda que, se a discussão gerada pela análise tivesse sido feita antes da resolução do caso de ensino, possivelmente as reflexões do grupo teriam sido ampliadas.

Analisando os resultados aqui encontrados, observamos convergências com o que Ball, Thames e Phelps (2008) vêm discutindo, e ficou explícito que a ausência de domínio dessa temática (Conhecimento do conteúdo) implicaria na igual dificuldade de propor estratégias de ensino e analisar estratégias de seus futuros alunos – Conhecimentos do Conteúdo e do Ensino e ao Conhecimento do Conteúdo e do estudante.

Diante do exposto, de nosso ponto de vista, ainda há a necessidade latente de se observar a importância de que as disciplinas do curso de Licenciatura se preocupem com a proposição de análise de casos que permitam a esses futuros profissionais articular a teoria e a prática.

Referências

ALARCÃO, Isabel. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. São Paulo: Cortez, 2005.

BALL, D. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 21, n. 2, p. 132-144, 1990.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, p. 389-407, Nov./Dec. 2008.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – UFSC**, Florianópolis, v. 2, n.1, p. 68-93, 2007.

COBB, P. et al. Design experiment in educational research. **Educational Researcher**, Washington, v. 32, n.1, p. 9-13, 2003.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP, São Paulo, 2007.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas?/The place of mathematics in mathematics degree programs: Which mathematics and what educational practices?. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917, 2013.

FREIRE, P. **A educação na cidade**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

KIEREN, T. E. The rational number construct: Its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E. (Ed.). **Recent research on number learning**. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. p. 125-149, 1981. Conferir data. No texto está 1980.

LLINARES, Salvador. Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. **Sisyphus - Journal of Education**, Lisboa, v. 1, n. 3, p. 76-93, 2013.

MA, L. **Aprender e ensinar matemática elementar**. Lisboa: SPM/Gradiva, 2009. Conferir data. No texto está 1999.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 21, p.16-32, 1990.

MELLO, Guiomar Namó de. **Formação inicial de professores para a educação básica uma (re)visão radical**. São Paulo em Perspectiva. vol.14, p. 98-110. N°1 São Paulo Jan./Mar. 2000. On-line version ISSN 1806-9452. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/spp/v14n1/9807.pdf> Acesso em: janeiro/2018.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. 2004. 195f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

NEVES, R. S. P. **A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

PINTO, H.; MONTEIRO, C. A. Divisão de números racionais. In: BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. **O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Lisboa: Escolar, 2008.

PONTE, J. P. Os desafios do Processo de Bolonha para a formação inicial de professores. **Revista da Educação**, v. 14, n. 1, p.19-36, 2006.

RODRIGUES, W. R. **Números racionais: um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, n. 15, p. 4-14, 1986.

TIROSH, D. Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 31, n. 1. p. 5-25, 2000.

TIROSH, D. et al. **Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers**. Agosto de 1998. Disponível em: <<http://jwilson.coe.uga.edu/texts.folder/tirosh/pros.el.tchrs.html>>. Acesso em: 10 mar. 2016.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Ed.). **Research agenda in mathematics education, number concepts and operations in the middle grades**. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988.

VERGNAUD, G. Epistemologia e psicologia da educação matemática. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of Mathematics Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. p. 1-18. (ICMI Study Series).