¿CAOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA?[1]

José Carlos Fernandes Rodrigues

Resumo: Há 37 anos tenho me feito algumas perguntas relacionadas com minhas ações docentes em matemática.

¿Ensino de matemática nos ensinos fundamental e médio são "absolutamente" necessários?

¿Quais seriam os impactos sobre a formação de uma (¿pequena?) parcela da população, em cada geração, se a matemática não fizesse parte dos assuntos explorados nos ensinos fundamental e médio?

Admitindo, por meio de algum tipo de consenso, que um ensino de matemática deva fazer parte dos ensinos fundamental e médio, então ¿quanta matemática deveria (ou poderia) estar presente neles? ¿Qual, ou quais?

Num breve histórico e em uma superficial (¿auto?) crítica, o que vimos "ensinando" (¿com aprendizagem?) sobre matemática nos ensinos fundamental e médio no século 20 e no início do século 21 remonta à geometria dos gregos, a alguns métodos de resolução de equações, a linguagens algébricas, a regras de contagem, a resolução de sistemas de equações, à probabilidade, à aritmética dos números complexos, ao conceito de função matemática, à geometria analítica, às operações com matrizes, para citar alguns temas.

Todos os temas citados, e alguns não citados, são anteriores ao século 20.

A questão a ser proposta sob a forma de provocação é: ¿estaríamos nós professores e professoras dispostos e preparados para introduzir nos ensinos fundamental e médio temas "mais atuais", "menos tradicionais e conservadores" aos nossos e às nossas estudantes? No caso afirmativo, ¿quais?

Uma crítica possível à provocação aqui lançada talvez seja: "Se já tem sido difícil trabalhar com o que se faz hoje em dia, então ¿como poderíamos pensar em trabalhar com temas não tão tradicionais?"

A proposta deste texto seria a de lançar às pessoas que trabalham com matemática esse possível desafio.

¿Seria o tema CAOS uma possibilidade de mudança?

Talvez uma leitura crítica do texto possa criar subsídios para uma resposta.

Palavras-chave: Caos, sistema, determinístico, estocástico, iteração, sistema dinâmico discreto, sistema periódico, convergência, mapa logístico, ponto fixo, ponto de equilíbrio, trajetória de sistema dinâmico, bifurcação, órbita avançada (Forward Orbit), órbita para trás (Backward Orbit), retratos de fase, análise gráfica de sistemas dinâmicos, planilha eletrônica.

¿Como interpretar o título apresentado?

Caso procuremos em algum dicionário algum(ns) significado(s) para a palavra “caos”, poderemos encontrar algo como:

> **caos**, [2] s. m. (gr. *khaos*). 1. Confusão geral dos elementos, antes da formação do mundo.
> 2. Total confusão, ou desordem.

Levando em conta **2.** como significado para “**caos**”, o título apresentado pode significar: “¿Total confusão (desordem) no ensino de matemática?”.

Porém, **Ian Stwart**, autor do livro **¿Será que Deus joga dados**?, propõe um outro significado àquela palavra que poderá ser acrescentado, futuramente, nos dicionários. Acompanhe:

> **caos**, s. m. (mat.). ... 3. Comportamento estocástico em um sistema determinístico.

Ocorrem na última interpretação três (talvez quatro) palavras que podem merecer alguns comentários: “**sistema**”, “**determinístico**” e “**estocástico**” (e, talvez, **comportamento**).

[1] Estou usando, por abuso, o sinal "¿" (importado da língua espanhola) no início de cada sentença interrogativa, com o objetivo de explicitar o momento a partir do qual ela começa a ser "interrogativa".

[2] Do verbo klainen, abrir-se, entreabrir-se. Esse termo parece ter sido utilizado pela primeira vez na Teogonia de Hesíodo (séc. 8 A.C.).

SOBRE "SISTEMA".

Existem algumas interpretações e alguns significados para "**Sistema**".

Uma delas é fornecida por **Mario Bunge (1919)**, físico e filósofo argentino que, em **Epistemologia: curso de atualização** (1980), assim se expressa:

"Um sistema é algo complexo cujas partes, ou componentes, se relacionam de tal modo que o objeto se comporta, em certos aspectos, como uma unidade e não como um conjunto de elementos".[3]

Além desta, podemos encontrar no "**Dicionário básico de filosofia**", de **Hilton Japiassú** e **Danilo Marcondes,** os seguintes significados:

sistema (do lat. tardio e do gr. *systema*, de *synstanai*). 1. Em um sentido geral, conjunto de elementos relacionados de acordo com determinados princípios, formando um todo, ou uma unidade. Ex.: sistema solar.

2. Conjunto de pensamentos, teses ou doutrinas desenvolvidas articuladamente e formando uma unidade teórica: sistema de Hegel. .... .

DETERMINÍSTICO E ESTOCÁSTICO.

Antes da explicitação de, pelo menos, um significado para as expressões "**sistema determinístico**" e "**sistema estocástico**", pode ser conveniente uma "conversa" a respeito de: **experimentos, problemas** e **modelos.**

SOBRE EXPERIMENTOS E PROBLEMAS.

Para não corrermos o risco de uma regressão "sem fim", faremos "poucos" comentários sobre os termos "**experimento**" e "**problema**". Entre eles, veja o tipo de interpretação que se pretende dar a essas palavras:

> *"Há vários tipos de experimentos e problemas que podem estar preocupando as pessoas neste momento. Por exemplo, a procura por um remédio para a cura de determinada doença, a busca de condições sociais, habitacionais, educacionais aceitáveis para as populações carentes desses valores, a pesquisa de mercado para o lançamento de um novo produto, o investimento em um projeto espacial, a otimização do uso de recursos governamentais para construção de escolas e hospitais, o estudo de novas tecnologias de comunicação e transmissão de informações, a construção de um novo motor que não irá utilizar combustíveis não renováveis, a melhoria de equipamentos robotizados que realizam tarefas nocivas às pessoas."* [4]

A última lista pode ser aumentada enormemente. Para cada um dos problemas citados (e para os não citados), é possível que existam vários caminhos para uma busca de sua(s) solução(ões) [caso exista(m)], nem todos conduzindo a um mesmo destino. Um desses caminhos consiste em "construir" **modelos** para representá-los.

SOBRE MODELOS.

Mas, ¿o que é "**modelo**"?

Para uma reflexão sobre a questão proposta, veja alguns dos usos desse termo nos textos seguintes:

"Aquela moça tornou-se um **modelo fotográfico** no Japão."

"O engenheiro de obras da prefeitura duma cidade do interior construiu um **modelo** da usina que fornecerá eletricidade aos agricultores da região."

"O escultor fez, em primeiro lugar, um **modelo** em barro da obra que pretendia fazer em mármore."

"Aquele economista do governo disse que o **modelo** macroeconômico precisa ser revisto."

"Os militares da segunda guerra mundial utilizaram **modelos** de **Pesquisa Operacional** para otimizar as suas operações de transporte de tropas, equipamentos, combustíveis e alimentação."

[3] Em "Concepções em termodinâmica: o senso comum e o conhecimento científico.", tese de doutorado em Educação da professora A-nildes Cafgne, da PUCSP.

[4] Em "Matemática: abstração × aplicação", material didático utilizado nas aulas de matemática para estudantes do curso de Administração de Empresas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP).

"Aquele físico está se aprofundando na compreensão do **modelo atômico** com base na física das partículas subatômicas".

"Um **modelo** para uma teoria formal **T** é uma estrutura na qual todos os axiomas de sua linguagem são fórmulas 'verdadeiras'." [5]

Estaremos interessados, *grosso modo*, na seguinte caracterização para esse termo: "um **modelo** para um **experimento** pode ser considerado 'um conjunto de procedimentos' com o objetivo de **representar** aquele experimento, responder adequadamente às **questões** que aquele experimento levanta e tomar algumas **decisões** 'cabíveis' a respeito daquelas questões".

Há, basicamente, dois tipos de **modelos** para um experimento: **modelo matemático** e **modelo não matemático**. Iremos nos concentrar nos experimentos para os quais são adequados **modelos matemáticos**.

Por sua vez, os **modelos matemáticos** podem ser classificados em **modelos determinísticos** e **modelos não determinísticos**.

SOBRE MODELOS DETERMINÍSTICOS

Nas palavras de **Paul L. Meyer**, em **"Probabilidade: aplicações à estatística"**:

"Por essa expressão (**modelo determinístico**) pretendemos nos referir a um modelo que estipule que as condições sob as quais um experimento seja executado **determinem** o resultado do experimento."

Em outros termos, se um particular experimento for repetido algumas vezes nas mesmas condições iniciais e utilizando-se os mesmos recursos a ele inerentes, então se espera obter os mesmos resultados.

Cabe aqui um exemplo (¿"simples"?): conhecidas, por exemplo, as massas de dois "corpos" e a "distância" entre eles (entre seus centros), é possível obter a "força de interação" entre aqueles corpos, denominada **força de atração gravitacional**, por meio da "lei da gravitação de **Newton**".

É possível afirmar, sem muito medo de errar, que "ensinos de matemática" nos ensinos fundamental e médio se caracterizam, em geral, por enfatizarem, quase essencialmente, situações determinísticas, muito embora possam existir, nesses trabalhos, algumas incursões por situações probabilísticas e estatísticas.

Nessas condições, quase sempre, as ações em "ensinos de matemática" se concentram nos aspectos quantitativos e analíticos dos temas trabalhados.

SOBRE SISTEMAS DETERMINÍSTICOS

Um **sistema determinístico** é um sistema (no sentido **Bunge**) que é representado por um **modelo determinístico**, ou um por um **conjunto** (¿ou um **sistema**?) de **modelos determinísticos**.

Por exemplo, o **sistema planetário** no qual vivemos [um **sistema complexo** cujos componentes (planetas, satélites, asteróides) se relacionam "gravitacionalmente" como uma unidade] pode ser considerado um **sistema determinístico**, pois os **modelos** que o representam e que são utilizados para determinar as posições (em relação ao Sol) dos componentes e suas velocidades são determinísticos. Conhecidas a posição e a velocidade de um dos componentes do **sistema planetário** em um determinado momento, é possível **determinar** sua posição e a sua velocidade em qualquer momento no futuro, ou no passado, segundo os modelos que representam o **sistema**.

SOBRE MODELOS NÃO DETERMINÍSTICOS

Um **modelo não determinístico** pode ser caracterizado como um **modelo** para um experimento no qual as condições em que ele é realizado **determinam um** "comportamento" probabilístico (¿imprevisível?) dos resultados observáveis.

Ou seja, se um particular experimento for repetido algumas vezes nas mesmas condições iniciais e utilizando-se os mesmos recursos a ele inerentes, então se espera obter apenas um "comportamento" probabilístico dos resultados observáveis.

Um **modelo não determinístico** pode ser denominado, também, **modelo probabilístico**, ou então de **modelo estocástico**.

[5] Em "Lógica & Algoritmos", capítulo dois: Teoria da Quantificação, notas de aula de Alberto Augusto Júnior, curso de verão no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973.

Cabe aqui um exemplo (¿"simples"?): na produção em série de parafusos por meio de um equipamento industrial deseja-se conhecer a quantidade de parafusos sem defeito em uma produção diária. Durante alguns dias, são escolhidos, "**ao acaso**", lotes da produção diária e é feita uma contagem dos parafusos com (ou sem) defeito. Se o experimento for realizado algumas vezes nas mesmas condições, os resultados particulares podem ser distintos dois a dois. Porém, se o experimento é repetido "muitas vezes" sob as mesmas condições, o que se espera é "estimar" (**medir**) probabilisticamente os resultados observáveis: qual é a porcentagem de parafusos sem defeito e parafusos com defeito que são produzidos diariamente.

Segundo **Ian Stwart**, "**estocástico**" significa "**aleatório**". Numa situação como essa, corre-se o risco de uma troca de "seis" por "meia dúzia", pois "explicar" o significado de um termo por outro que lhe é sinônimo pode implicar o estabelecimento de um "círculo vicioso" ("**estocástico**" <=> "**aleatório**").

¿E o que significa "**aleatório**"? ¡Não "vale" afirmar que é "**estocástico**"!
Bem, ¿que tal afirmar que "**aleatório**" significa "**ao acaso**"?

Segundo **Henri Atlan**, em "**Entre o cristal e a fumaça**" pode-se ler: "'**acaso**' é a interseção entre duas seqüências independentes de acontecimentos de 'causa e efeito'" [Estou andando pela calçada de uma rua logo após uma chuva. Paro próximo à guia da rua, a uma poça d'água que a chuva ali formou e à faixa de pedestre que pretendo usar para atravessá-la. Nesse instante, um automóvel, em alta velocidade, passa pela poça d'água ....].

SOBRE A "DEFINIÇÃO" DE CAOS, SEGUNDO IAN STWART

Não sei quanto a você, mas tomar consciência de que uma "definição" de "caos" reúne em seu escopo duas situações que são (aparentemente) antagônicas [um "comportamento" **estocástico (aleatório, ao acaso, probabilístico, ¿imprevisível?)** em um **sistema determinístico (não aleatório, previsível)**] causa, em um primeiro momento, um "desconforto" que pode (¿deve?) ser enfrentado e entendido.

Tendo isso em vista, podemos retornar à questão inicial "¿Caos no ensino de matemática?" e interpretá-la da seguinte forma:

¿Comportamento estocástico em sistemas determinísticos no ensino de matemática?

É possível afirmar que, ao tratarmos de **sistemas caóticos**, estamos diante de **sistemas** que podem conter (¡e contêm!) "grandes" dificuldades conceituais e técnicas, pois são muitos os aspectos que fazem parte desse tipo de sistema e que transcendem tudo (ou quase tudo) daquilo que faz parte dos ensinos fundamental e médio atuais (neste 7° ano do século 21).

A questão presente é: ¿Você "acha" (ou melhor, ¿acredita?) que existe alguma possibilidade de se tratar esse assunto nos ensinos fundamental e médio?

Uma tentativa de resposta à questão será fornecida a seguir. Uma análise crítica dessa tentativa fica a seu critério.

1° PARTE: APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E DOS CONCEITOS INTRODUTÓRIOS.

SOBRE A POSSIBILIDADE DE SE INTRODUZIR "CAOS" NO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO.

A tentativa de resposta não tem a menor pretensão de originalidade. Ela foi inspirada em três livros: o primeiro já foi citado (¿**Será que Deus joga dados**?); o segundo é: "**An introduction to chaotic dynamical system**" de **Robert L. Devaney;** e o terceiro é **Caos: uma introdução** de **Nelson Fiedler-Herrara** e **Carmen P. Cintra do Prado**.

Para essa tentativa, é conveniente que você tenha em mãos uma calculadora eletrônica (de preferência, uma científica). Você poderá utilizar, também, uma planilha eletrônica que permitirá uma razoável economia de tempo.

Vamos começar com uma calculadora (uma das "tradicionais").

- Vamos imaginar que a calculadora possua as teclas

x^2 1/x √ y^x e^x Log Ln sen cos tg, além das teclas usuais.

UTILIZANDO A TECLA x^2

- Digitemos um valor arbitrário maior que **1**. Por exemplo, **2,** e, em seguida, as teclas x^2 e $=$ (¿O que aconteceria se escolhêssemos **1**?).
- Mantendo o valor obtido no visor da calculadora, continue pressionando, sucessivamente, as teclas x^2 e $=$. Logo, fica estabelecida a "seqüência" numérica:
  2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, 18446744073709551616, ...
- É bastante provável que, após um determinado número de vezes que você repetir aquela seqüência de teclas, a calculadora exiba alguma mensagem de "**erro**".
- Dizemos que a seqüência **diverge**, ou seja, **não tem limite**, ou ainda, que a seqüência **tende** a $+\infty$, pois, para todo valor real positivo **M** que se possa imaginar, existe "um passo" daquela seqüência para o qual o seu correspondente valor supera **M**.
- Introduzindo um pouco de simbologia e nomenclatura:
  - $f(x) = x^2$;
  - $x_0 = 2$;
  - a seqüência:
    x_0; $f(x_0)$; $f(f(x_0))$; $f(f(f(x_0)))$; $f(f(f(f(x_0))))$; $f(f(f(f(f(x_0)))))$; $f(f(f(f(f(f(x_0))))))$; . . . . ;
    é a mesma anterior, porém representada simbolicamente;
  - o "processo" utilizado para obter cada termo da seqüência, a partir do anterior, é denominado ***iteração***, que significa "repetição continuada de um mesmo procedimento".
  - a seqüência é um exemplo de um **sistema dinâmico discreto**;
  - é possível "modificar" a simbologia introduzindo-se a seguinte "simplificação":
    $f(f(x_0)) = f^2(x_0)$; $f(f(f(x_0))) = f^3(x_0)$; $f(f(f(f(x_0)))) = f^4(x_0)$; . . . . ; [6]
  - por extensão: $f(x_0) = f^1(x_0)$ e $x_0 = f^0(x_0)$;

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico (determinístico)** obtido pelo processo *iterativo* da função $\mathbf{f(x) = x^2}$, a partir de $\mathbf{x_0 = 2}$, é "**estocástico**"?

- Repita a última seqüência de procedimentos para $\mathbf{x^0 = 0{,}5}$.
- Nesse caso, após um determinado número de vezes que as teclas x^2 e $=$ são pressionadas, o visor da calculadora deverá exibir o resultado **0** (¿Por que a calculadora exibe o valor **0** após um número de vezes que as teclas x^2 e $=$ são sucessivamente pressionadas?)
- Nesse caso, dizemos que a seqüência **converge**, ou seja, **tem limite**, ou ainda, que a seqüência **tende** a **0**, pois, para todo real positivo **M** que se possa imaginar, existe "um passo" daquela seqüência para o qual o seu correspondente valor é inferior a **M**.

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico (determinístico)** obtido pelo processo *iterativo* da função $\mathbf{f(x) = x^2}$, a partir de $\mathbf{x_0 = 0{,}5}$, é "**caótico**"?

UTILIZANDO A TECLA $\sqrt{\ }$.

- Escolha um número distinto de **1** e repita as ações já mencionadas anteriormente. ¿Qual é a conclusão?

[6] É conveniente destacar que os índices superiores em $f^2, f^3, f^4, \ldots$ representam o número de ***iterações*** e não um indicativo de **expoente** de uma **potência**. Pode ser conveniente trocar f^2 **por** $f^{(2)}$.

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico** (**determinístico**) obtido pelo processo *iterativo* da função $\mathbf{g(x) = \sqrt{x}}$, a partir de $\mathbf{x_0 \neq 1}$, é "**caótico**"?

UTILIZANDO A TECLA 1/x.

- Escolha um número diferente de **0** e repita as ações já mencionadas anteriormente. ¿Qual é a conclusão?

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico** (**determinístico**) obtido pelo processo *iterativo* da função $\mathbf{h(x) = \frac{1}{x}}$, a partir de $\mathbf{x_0 \neq 0}$, é "**caótico**"?

UTILIZANDO AS DEMAIS TECLAS.

- Fica como exercício o processo *iterativo* para as demais teclas (exceto a tecla tg, que iremos exibir na seqüência).

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** de cada **sistema dinâmico** (**determinístico**) obtido pelo processo *iterativo* das demais funções é "**caótico**"?

UTILIZANDO A TECLA tg E UMA PLANILHA ELETRÔNICA.

- **Ian Stwart** afirma, em seu livro "**¿Será que Deus joga dados?**", que realizou **300000** ***iterações*** da tecla tg, a partir do valor $\mathbf{x_0 = 0{,}54321}$. Ele afirma, ainda, que o **sistema** não **convergiu** e nem se tornou **periódico** [você obteve um exemplo de **sistema dinâmico periódico**, ao utilizar a tecla 1/x].

Não temos a pretensão de realizar o mesmo trabalho de **Ian Stwart**, mas vamos exibir uma planilha eletrônica com **286** ***iterações*** daquela tecla (todas visíveis em uma mesma tela), a partir do valor inicial $\mathbf{x_0 = 0{,}5}$. Estamos admitindo que você possua alguma "intimidade" com esse tipo de "ferramenta computacional" (usamos, aqui a planilha **Excel™, da Microsoft**).

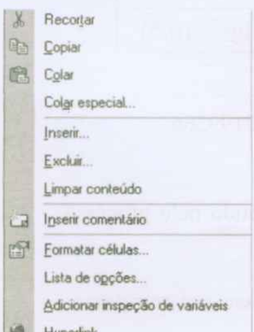
Caso seja necessário, acompanhe alguns procedimentos possíveis:

° Digite na célula **A1** o texto "$\mathbf{x_0}$ =" (sem as aspas) e na célula **B1,** o número **0,5**;

° Digite na célula **A2** a "fórmula": "**=b1**", ou "**=B1**" (sem as aspas);

° Digite na célula **A3** a "fórmula": "**=tan(a2)**", ou "**=TAN(A2)**" (sem as aspas), ou qualquer "combinação" de dígitos maiúsculos e minúsculos;

° Copie essa fórmula na célula **A4** até a célula **A27** [caso você queira relembrar como fazer isso, segue uma sugestão para realizar essa cópia (existem outras)]:



(i) com o ponteiro do rato sobre a célula **A3**, "clique" o seu botão direito;

(ii) deverá aparecer o **menu**:

(iii) "clique" sobre Copiar (com qualquer botão do rato);

(iv) em seguida, com o ponteiro do rato sobre **A3** (ou **A4**), pressione o seu botão esquerdo, mantenha-o pressionado e arraste-o até a célula **K27**;

(v) solte o botão;

(vi) ficaram selecionadas as células da região da planilha de **A3** até **K27**;

(vii) sobre a seleção feita em (iv), pressione o botão direito do rato para aparecer, novamente, o **menu** anterior;

(viii) "clique" sobre Colar (com qualquer botão do rato);

° Introduza a fórmula "=tan(a27)" [ou "=TAN(A27)"] na célula **B2** e copie-a até a célula **K2**;

° Veja se sua planilha se parece com a da figura seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x_0 =	0,5										
2	0,5	0,28956	0,16214	0,22304	0,657235	0,242556	-0,19796	-0,36183	-1,94837	-0,33319	-1,06652	
3	0,546302	0,297934	0,163576	0,226814	0,771684	0,247427	-0,20059	-0,37849	2,521385	-0,34609	-1,81204	
4	0,608029	0,307074	0,165051	0,230785	0,97294	0,252603	-0,20332	-0,39766	-0,71422	-0,3606	4,064454	
5	0,69599	0,317104	0,166566	0,234972	1,468442	0,258117	-0,20617	-0,42004	-0,8669	-0,37709	1,321089	
6	0,835456	0,328179	0,168124	0,239394	9,735806	0,264006	-0,20914	-0,44662	-1,17789	-0,39605	3,92111	
7	1,105483	0,340491	0,169726	0,244074	0,321461	0,270316	-0,21224	-0,47889	-2,41281	-0,41814	0,988307	
8	1,991702	0,35429	0,171375	0,249039	0,333012	0,277098	-0,21549	-0,51921	0,892731	-0,44434	1,518067	
9	-2,23384	0,369898	0,173072	0,254319	0,345894	0,284415	-0,21889	-0,57151	1,241516	-0,4761	18,9471	
10	1,280408	0,387745	0,174821	0,259947	0,360382	0,292341	-0,22245	-0,6431	2,926365	-0,51566	0,097854	
11	3,346325	0,408422	0,176624	0,265965	0,376839	0,300964	-0,22619	-0,74937	-0,21861	-0,56681	0,098167	
12	0,207641	0,432756	0,178484	0,272419	0,395752	0,310392	-0,23013	-0,93042	-0,22216	-0,63648	0,098484	
13	0,210678	0,461961	0,180404	0,279364	0,417795	0,32076	-0,23428	-1,34204	-0,22589	-0,73909	0,098804	
14	0,213851	0,497893	0,182387	0,286866	0,44393	0,332233	-0,23867	-4,29497	-0,22982	-0,91142	0,099126	
15	0,217172	0,54357	0,184437	0,295003	0,475591	0,345022	-0,2433	-2,2549	-0,23395	-1,29015	0,099452	
16	0,220652	0,604293	0,186557	0,303869	0,515019	0,359397	-0,24822	1,22628	-0,23831	-3,4692	0,099781	
17	0,224304	0,690458	0,188752	0,313581	0,565967	0,375715	-0,25345	2,786863	-0,24293	-0,33985	0,100114	
18	0,228143	0,826107	0,191026	0,32428	0,635293	0,394453	-0,25902	-0,3704	-0,24782	-0,35357	0,10045	
19	0,232185	1,084922	0,193384	0,336147	0,737253	0,416269	-0,26497	-0,38832	-0,25302	-0,36908	0,100789	
20	0,236449	1,893577	0,195831	0,349407	0,908065	0,442105	-0,27135	-0,40909	-0,25857	-0,38681	0,101132	
21	0,240957	-2,98973	0,198373	0,364357	1,281245	0,473355	-0,27821	-0,43355	-0,26449	-0,40733	0,101478	
22	0,245731	0,153045	0,201017	0,381385	3,356561	0,512194	-0,28562	-0,46293	-0,27083	-0,43146	0,101828	
23	0,2508	0,154252	0,203769	0,40102	0,218342	0,562243	-0,29365	-0,4991	-0,27765	-0,46039	0,102181	
24	0,256194	0,155487	0,206637	0,423996	0,221879	0,630078	-0,30239	-0,54514	-0,28501	-0,49593	0,102538	
25	0,26195	0,156752	0,209629	0,451374	0,225593	0,729234	-0,31196	-0,60643	-0,29299	-0,54104	0,102899	
26	0,268111	0,158049	0,212755	0,484751	0,229499	0,89354	-0,32249	-0,69362	-0,30167	-0,60084	0,103264	
27	0,274725	0,159378	0,216024	0,526664	0,233615	1,243574	-0,33415	-0,83144	-0,31117	-0,68537	0,103632	

Figura 1

Podem ser convenientes algumas palavras sobre a planilha exibida na **Figura 1**, pois quem se dispuser a lê-la sem maiores informações sobre como foi construída, poderá não identificar o "sentido" da leitura.

O roteiro da leitura pode ser visto esquematicamente na tabela seguinte na próxima página:

	A	B	C	....	K
1	x_0 =	0,5			
2	0,5	$tg^{(26)}(0,5)$	$tg^{(52)}(0,5)$	$\ddots$	$tg^{(260)}(0,5)$
3	tg(0,5)	$tg^{(27)}(0,5)$	$tg^{(53)}(0,5)$	$\ddots$	$tg^{(261)}(0,5)$
4	$tg^{(2)}(0,5)$	$tg^{(28)}(0,5)$	$tg^{(54)}(0,5)$	$\ddots$	$tg^{(262)}(0,5)$
5	$tg^{(3)}(0,5)$	$tg^{(29)}(0,5)$	$tg^{(55)}(0,5)$	$\ddots$	$tg^{(263)}(0,5)$
⋮	⋮	⋮	⋮	$\ddots$	⋮
27	$tg^{(25)}(0,5)$	$tg^{(51)}(0,5)$	$tg^{(77)}(0,5)$	$\ddots$	$tg^{(285)}(0,5)$

na qual, por exemplo, $\mathbf{tg^{(3)}(0,5)}$ significa:
$tg(tg(tg(0,5))) \cong tg(tg(0,546302)) \cong tg(0,608029) \cong 0,695989531093422694417312199366$.

Questão para reflexão:

¿Você diria que o **comportamento** do **sistema dinâmico (determinístico)** obtido pelo processo ***iterativo*** da função **t(x) = tg(x)**, a partir de $\mathbf{x_0 = 0,5}$, é **"caótico"**?

Digite em **B1** outros valores e tire suas conclusões.

É provável que ficaremos sem saber se o **sistema dinâmico** e **determinístico** possui um **comportamento caótico** por causa das dificuldades técnicas aqui presentes.

UM OUTRO EXEMPLO DE SISTEMA DINÂMICO DISCRETO.

Neste exemplo, a seqüência: P_0, P_1, P_2, ... P_n, ... representa a "evolução" do "tamanho" da população de uma particular comunidade biológica nas "gerações" **0**, **1**, **2**, ... , **n**, ...

Uma preocupação com relação ao estudo da população dessa comunidade consiste em "determinar" algum tipo de "**padrão de comportamento**" para que se possa "estimar" o tamanho da população dessa comunidade após **n** gerações da geração **0**.

Uma "estimativa" para $\mathbf{P_n}$ pode depender de um "imenso" conjunto de fatores que podem estar influenciando a "evolução" populacional daquela comunidade.

Alguns desses fatores podem ser os seguintes: alimentação, condições climáticas, predadores, existência de água, destruição do meio ambiente, ...

Sem que se entre no mérito da existência dessas condições, é possível estabelecer algumas hipóteses a respeito da comunidade para que se possam realizar as estimativas desejadas. Vejamos três delas:

1) Uma hipótese, que pode ser considerada apenas uma primeira (e grosseira) aproximação do que pode ocorrer em um "sistema real", consiste em afirmar que o tamanho da população da geração **n + 1** é **proporcional** ao tamanho da população da geração **n**. Nesse caso, é possível escrever que:

$P_{n+1} = k.P_n$, em cuja expressão **k** representa uma constante. Assim, se $\mathbf{P_0}$ representa a população dessa comunidade em um momento considerado inicial, então:

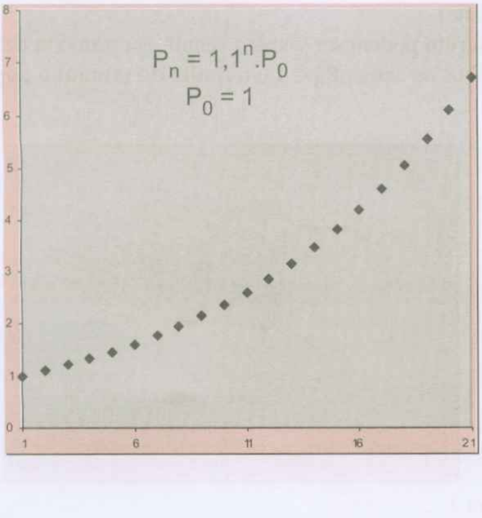
$$\begin{gathered} P_1 = k.P_0 \\ P_2 = k.P_1 = k^2.P_0 \\ P_3 = k.P_2 = k^3.P_0 \\ \vdots \\ P_{n+1} = k.P_n = k^{n+1}.P_0 \\ \vdots \end{gathered}$$

Algumas hipóteses sobre a constante **k** são as seguintes:

- Se **k = 0**, então a população "desaparece" na **1ª** geração após a geração **0**.
- Se **k = 1**, então o tamanho da população permanece constante.
- Se **k > 1**, então a população tende a crescer exponencialmente, caminhando para a superpopulação.
- Se **0 < k < 1**, então a população tende a decrescer exponencialmente, caminhando para a sua extinção.

Veja as representações gráficas desse **sistema dinâmico** na **Figura 2**, com $\mathbf{P_0 = 1}$, nos seguintes casos:

° **k = 1,1** (à esquerda).
° **k = 0,85** (à direita).



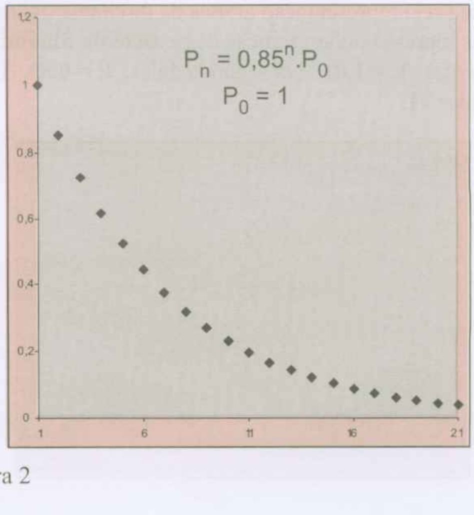


Figura 2

Questão para reflexão:

¿Você diria que os **comportamentos** do **sistema dinâmico (determinístico)** obtido pelo processo ***iterativo,*** descrito anteriormente para as diversas gerações daquela população nos casos em que $k > 1$ e $0 < k < 1$, são "**caóticos**"?

2) Por causa dos mesmos fatores que influenciam a "evolução" do tamanho da população daquela comunidade, então é possível ocorrer o estabelecimento de um **limite do tamanho populacional** para aquela comunidade naquele meio ambiente.

Assim, uma segunda hipótese que pode ser colocada para "estimar" o tamanho da população em uma determinada geração, tomando como base o tamanho da população da geração anterior, consiste em afirmar que a população da geração $n + 1$ é **proporcional** à **diferença** entre o **limite do tamanho populacional** dessa população e o tamanho da população na geração n.

Nesse caso, se o **limite do tamanho populacional** ao qual está sujeita a comunidade em estudo é **L**, então é possível escrever que: $P_{n+1} = k.(L - P_n)$, com **k** representando uma constante positiva.

A seqüência que se pode escrever nessas novas condições é:

$$P_1 = k.(L - P_0)$$
$$P_2 = k.(L - P_1) = k.[L - k.(L - P_0)]$$
$$P_3 = k.(L - P_2) = k.[L - k.[L - k.(L - P_0)]] = k.[(1 - k).L + k^2.(L - P_0)]$$
$$P_4 = k.(L - P_3) = k.[L - k.[(1 - k).L + k^2.(L - P_0)]] = k.[(1 - k + k^2).L - k^3.(L - P_0)]$$
$$\vdots$$
$$P_{n+1} = k.(L - P_n) = \ldots = k.[(1 - k + k^2 - k^3 + \ldots + (-1)^{n-1}.k^{n-1}).L - k^n.(L - P_0)]$$
$$\vdots$$

Algumas hipóteses sobre a constante **k** são as seguintes:

• Se $k = 0$, então a população "desaparece" na **1ª** geração após a geração **0**.

• Se $k = 1$, então o tamanho da população alterna de $L - P_0$ para P_0 em cada geração seguinte, a partir da primeira.

• Se $k > 1$, então, para cada valor possível para **L**, parece existir algum valor para **n,** para o qual:

$$(1 - k + k^2 - k^3 + \ldots + (-1)^{n-1}.k^{n-1}).L < k^n.(L - P_0)],$$

pois k^n cresce exponencialmente, com o aumento de **n**, "mais rapidamente" que a correspondente expressão polinomial de **grau** $n - 1$. Isso torna esse **sistema** não adequado para os fins a que se propõe, pois P_n torna-se negativo para algum **n** (veja representação gráfica da esquerda na figura seguinte).

• Se $0 < k < 1$, então os tamanhos da população, de uma geração para a outra, ocorrem aos "saltos" de crescimento e de decrescimento, porém esses valores parecem tender a um valor comum quando o número de gerações cresce (veja representação gráfica da direita na figura seguinte).

As representações gráficas desse **sistema dinâmico discreto** podem ser vistas a seguir. Na primeira delas (à esquerda), $k = 1{,}01$. Na segunda delas, $k = 0{,}85$. Em ambos os casos, $P_0 = 1$ e o **limite do tamanho populacional** $= 21$.

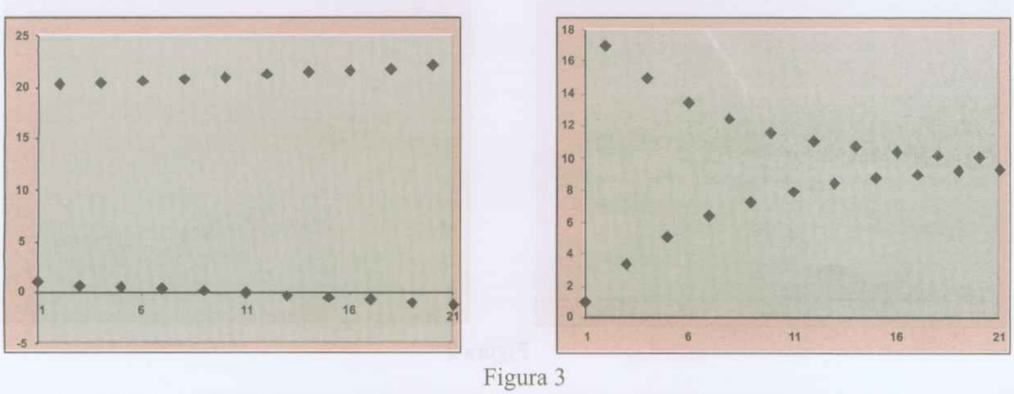


Figura 3

Questão para reflexão:

¿Você diria que os **comportamentos** do **sistema dinâmico (determinístico)** obtido pelo processo ***iterativo,*** descrito anteriormente para as diversas gerações daquela população nos casos em que $\mathbf{k > 1}$ e $\mathbf{0 < k < 1}$, são "**caóticos**"?

Pode ser conveniente exibir as representações gráficas exibidas na **Figura 3** por meio de curvas "contínuas".

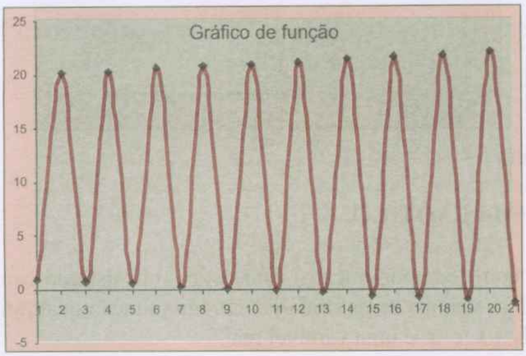


Figura 4

É possível que nós concordemos (você e eu) que é pouco provável que alguma população possua uma "evolução" do seu tamanho que tenha como **modelo** o **sistema dinâmico** recém-descrito. Porém . . . .

3) A **1ª hipótese** levantada para aquela população pode ser considerada "pouco adequada" para descrever a "evolução" do seu tamanho, pois a sua taxa de (de)crescimento é constante.

A **2ª hipótese** levantada para aquela população pode ser considerada, em princípio, como sendo "extravagante" para descrever a "evolução"do seu tamanho, pois os seus valores se alternam em crescimento e decrescimento $[P_0 < P_1; P_1 > P_2; P_2 < P_3; P_3 > P_4; \dots]$.

A **3ª hipótese** sobre aquela população irá incorporar, em único caso, a **1ª** e a **2ª** hipóteses já mencionadas, ou seja, vamos admitir que o tamanho da população na geração $\mathbf{n+1}$ é **proporcional** ao tamanho da população da geração $\mathbf{n}$ e é **proporcional** à **diferença** entre o **limite do tamanho populacional** e o seu tamanho na geração $\mathbf{n}$.

Nesse caso, se o **limite do tamanho populacional** ao qual está sujeita a comunidade em estudo é **L**, então é possível escrever que: $P_{n+1} = k.P_n.(L - P_n)$, com **k** representando uma constante positiva.

A seqüência que se pode escrever nessas novas condições é:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= k.P_0.(L - P_0)\\
P_2 &= k.P_1.(L - P_1)\\
P_3 &= k.P_2.(L - P_2)\\
&\vdots\\
P_{n+1} &= k.P_n.(L - P_n)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nesse caso, não nos atreveremos a expressar $\mathbf{P_n}$ em função de $\mathbf{P_0}$ por causa das dificuldades de "escrita" e de generalização aqui presentes.

A fórmula recorrente: $P_{n+1} = k.P_n.(L - P_n)$

denomina-se **Mapa Logístico**.

Veja algumas representações gráficas desse **sistema dinâmico discreto**.

Na primeira delas (à esquerda), $\mathbf{k = 3}$ e $\mathbf{P_0 = 0{,}2}$.

Na segunda delas, $\mathbf{k = 3{,}7}$ e $\mathbf{P_0 = 0{,}7}$.

Em ambos os casos, $\mathbf{L = 1}$.

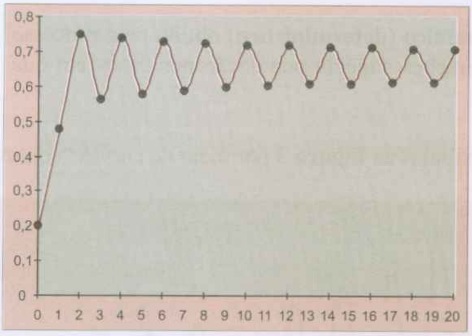
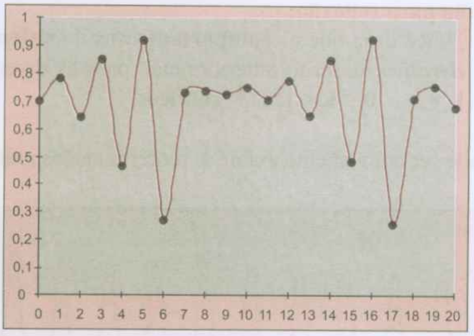



Figura 5

UMA INTRODUÇÃO "ELEMENTAR" A UM SISTEMA CAÓTICO.

Para uma tentativa de observar um **sistema dinâmico** com "comportamento" estocástico (um **sistema caótico**), com base na "lei" de recorrência: $P_{n+1} = k.P_n.(L - P_n)$, vamos "transformá-la" em uma função quadrática **contínua** da seguinte forma: $f_k(x) = k.x.(1 - x)$, na qual $\mathbf{L = 1}$ e $\mathbf{x}$ é uma variável real.

Alguns possíveis exercícios (identificados na seqüência por E#) para os ensinos fundamental e médio, utilizando a função $\mathbf{f_k(x)}$, podem ser:

E1) ¿Para que valores de $\mathbf{x}$, $\mathbf{f_k(x) = 0}$? ¿Para que valores de $\mathbf{x}$, $\mathbf{f_k(x) = x}$?

Os valores encontrados para $\mathbf{f_k(x) = x}$ são denominados **ponto fixo** da função. Um deles é **0**. O outro é $p_k = \dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k}$. Um **ponto fixo** também recebe o nome de **ponto de equilíbrio**.

E2) ¿O que é possível afirmar sobre $\mathbf{p_k}$ se: (i) $k = 1$? (ii) $k > 1$? (iii) $0 < k < 1$?

E3) ¿Para qual valor de $\mathbf{x}$, $\mathbf{f_k(x)}$ atinge seu valor máximo? ¿Qual é o valor máximo para $\mathbf{f_k(x)}$?

E4) Esboçar a representação gráfica de $\mathbf{f_k(x)}$ para: (i) $k = 0{,}5$; (ii) $k = 1$; (iii) $k = 4$; (iv) $k = 5$.

E5) Escolha um valor para $\mathbf{x}$, $\mathbf{x > 1}$, ou $\mathbf{x < 0}$. Elabore uma tabela com os valores: x; $f_k(x)$; $f_k^2(x)$; ... ; $f_k^8(x)$, para algum valor para $\mathbf{k > 0}$.

¿Quais são as suas conclusões?

E6) Escolha um valor para $\mathbf{x}$, $\mathbf{0 < x < 1}$. Elabore uma tabela com os valores: x; $f_k(x)$; $f_k^2(x)$; ... ; $f_k^8(x)$, escolhendo um valor para $\mathbf{k}$ tal que: (i) $\mathbf{0 < k \leq 4}$; (ii) $\mathbf{k > 4}$;

¿Quais são as suas conclusões?

E7) A figura seguinte exibe as representações gráficas da função $f_k(x) = k.x.(1 - x)$, com $3 < k \leq 4$,[7] e da função $\Delta(x) = x$, denominada função "diagonal", ou "identidade" (pois a cada $\mathbf{x}$ associa o próprio $\mathbf{x}$).

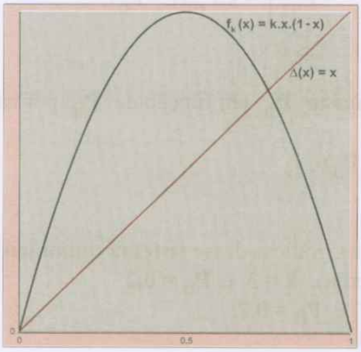


Figura 6

[7] Esse tipo de sistema dinâmico com $\mathbf{0 < k < 3}$ é mais "bem comportado" do que os com $\mathbf{k > 3}$.

O exercício proposto a seguir pode ser uma novidade do ponto de vista dos ensinos fundamental e médio. Esse exercício não é quantitativo, nem algébrico, pois envolverá ações qualitativas e gráficas.

(i) Peça para alguém [esse "alguém" poderá ser você mesmo(a)] fazer uma "marca" no eixo das abscissas (que, na seqüência, será denominado **eixo x**) e que irá representar um valor x_0, $0 < x_0 < 1$.

(ii) Peça para esse alguém traçar um segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas (que, na seqüência, será denominado **eixo y**), que vai da "marca" feita no **eixo x** até o ponto da curva com coordenadas x_0 e $f_k(x_0)$.

(iii) Em seguida, peça para traçar um segmento de reta paralelo ao **eixo x** do ponto $(x_0; f_k(x_0))$ ao ponto $(f_k(x_0); f_k(x_0))$ da diagonal Δ.

(iv) Peça, em seguida, para traçar um segmento de reta paralelo ao **eixo y**, do ponto $(f_k(x_0); f_k(x_0))$ até o ponto da curva de coordenadas $f_k(x_0)$ e $f_k(f_k(x_0)) = f_k^2(x_0)$.

Veja que o processo ***iterativo*** começou a funcionar explicitamente aqui, pois, após esses passos, passamos, no **eixo x,** de x_0 para $f_k(x_0)$ e, depois, para $f_k^2(x_0)$].

(v) Trace um segmento de reta paralelo ao **eixo x** do ponto $(f_k(x_0); f_k^2(x_0))$ ao ponto $(f_k^2(x_0); f_k^2(x_0))$ da diagonal Δ.

(vi) Repita os passos (iv) e (v) mais algumas vezes.

(vii) Veja na Figura 7, na página seguinte, 8 (¿ou seriam 8,5?) ações análogas às que foram descritas:

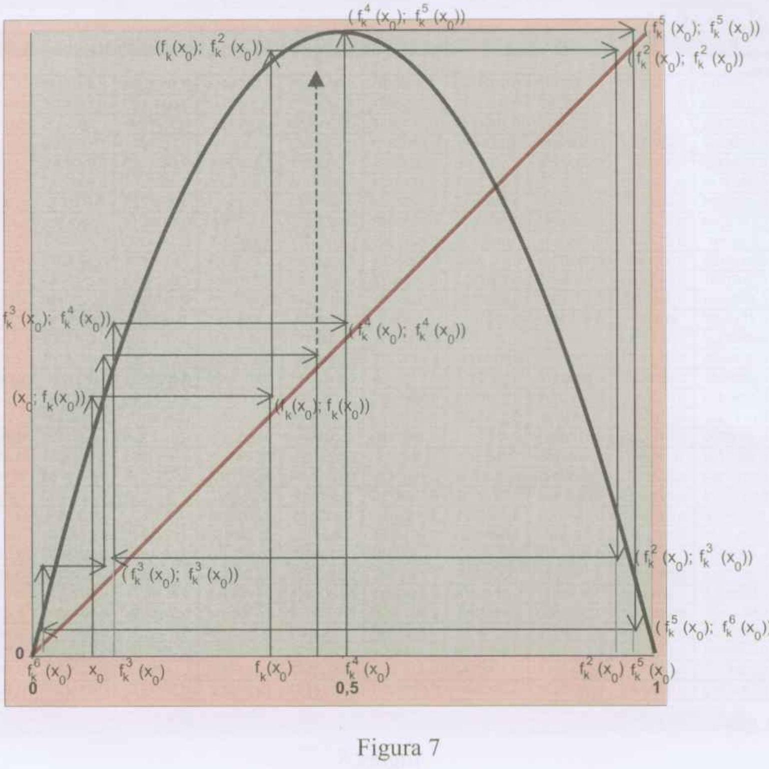


Figura 7

(viii) A Figura 7, convenhamos, está muito "congestionada". Nem todas as informações foram lá colocadas para não aumentar o "congestionamento".

Para tentar acompanhar as ações efetuadas na figura, comece pelo **eixo x** na "marca" $\mathbf{x_0}$ [que corresponde ao ponto $(\mathbf{x_0; 0})$] e siga as setas.

Veja a seguinte seqüência de pontos:

$(x_0;\ 0) \rightarrow (x_0;\ f_k(x_0)) \rightarrow (f_k(x_0);\ f_k(x_0)) \rightarrow (f(x_0);\ f_k^2(x_0)) \rightarrow (f_k^2(x_0);\ f_k^2(x_0)) \rightarrow (f_k^2(x_0);\ f_k^3(x_0)) \rightarrow$
$\rightarrow (f_k^3(x_0);\ f_k^3(x_0)) \rightarrow \ldots$

A última seqüência de pontos determina a **trajetória** desse **sistema dinâmico** com início no **eixo x** a partir do ponto **$(x_0; 0)$**.

(ix) Em correspondência, fica determinada no **eixo x** a seqüência *iterativa*:

$$x_0\ ;\ f_k(x_0)\ ;\ f_k^2(x_0)\ ;\ f_k^3(x_0)\ ;\ f_k^4(x_0)\ ;\ f_k^5(x_0)\ ;\ f_k^6(x_0)\ ;\ f_k^7(x_0)\ ;\ f_k^8(x_0)\ ;\ \ldots\ ;\ f_k^n(x_0)\ ;\ \ldots$$

Questões para reflexão:

¿É possível prever alguma "tendência" dessa seqüência?
¿Será que essa seqüência irá "se aproximar" de algum valor previsível?
¿Será que existe algum termo dessa seqüência que coincide com algum termo anterior dela?
¿Será que os termos dessa seqüência são distintos dois a dois?

Talvez seja conveniente "olhar" para uma planilha com alguns termos dessa seqüência em um caso particular: **$x_0 = 0,2$** e **$k = 4$**.

Microsoft Excel - Pasta2

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

B1 = 0,2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x_0 =	0,2	k = 4									
2	0,64	0,9899016	0,7642096	0,0227147	0,0205198	0,466387	0,0649268	0,0529414	0,1851398	0,9630179	0,553197	0,3785125
3	0,9216	0,0399856	0,7207731	0,088795	0,0803948	0,9954807	0,2428453	0,2005544	0,6034522	0,1424575	0,9886803	0,9409631
4	0,2890138	0,1535472	0,805037	0,3236418	0,2957259	0,0179957	0,7354859	0,6413293	0,9571906	0,4886535	0,0447661	0,2222062
5	0,8219392	0,5198817	0,6278097	0,8755911	0,8330884	0,0706873	0,7781856	0,9201041	0,1639071	0,999485	0,1710485	0,6913223
6	0,5854205	0,9984189	0,9346587	0,4357252	0,5562086	0,2627625	0,6904511	0,2940501	0,5481662	0,0020588	0,5671635	0,8535831
7	0,9708133	0,0063145	0,2442872	0,983475	0,9873624	0,7748734	0,8549136	0,8303385	0,9907201	0,0082183	0,9819562	0,499916
8	0,1133392	0,0250985	0,7384438	0,0650077	0,0499116	0,6977784	0,4961454	0,5635059	0,0367753	0,032603	0,0708727	1
9	0,4019738	0,0978744	0,7725783	0,2431267	0,1896818	0,8435348	0,9999406	0,983868	0,1416914	0,1261602	0,263399	1,128E-07
10	0,9615635	0,35318	0,7028043	0,7360644	0,6148105	0,5279355	0,0002377	0,063487	0,4864598	0,4409751	0,7760799	4,513E-07
11	0,1478366	0,9137756	0,8354816	0,7770944	0,9472742	0,9968784	0,0009506	0,2378257	0,9992666	0,9860642	0,6951195	1,805E-06
12	0,5039236	0,3151591	0,5498083	0,6928749	0,1997833	0,0124473	0,0037988	0,7250586	0,0029313	0,0549662	0,8477135	7,221E-06
13	0,9999384	0,8633354	0,9900765	0,8511972	0,6394796	0,0491694	0,0151377	0,7973945	0,0116907	0,2077798	0,5163813	2,888E-05
14	0,0002463	0,4719497	0,0393	0,5066422	0,9221817	0,187007	0,059634	0,6462261	0,046216	0,6584295	0,9989266	0,0001155
15	0,000985	0,9968527	0,1510219	0,9998235	0,2870503	0,6081416	0,2243113	0,9144717	0,1763204	0,8996004	0,004289	0,0004621
16	0,003936	0,0125495	0,5128571	0,0007058	0,8186097	0,9532215	0,695983	0,3128529	0,5809262	0,3612781	0,0170622	0,0018475
17	0,0156821	0,0495681	0,9993388	0,0028211	0,5939515	0,1763609	0,8463627	0,8599038	0,9738038	0,923025	0,0671617	0,0073763
18	0,0617448	0,1884445	0,0026431	0,0112526	0,9646925	0,5861932	0,5201316	0,481877	0,1020398	0,2841995	0,250604	0,0292876
19	0,2317295	0,6117327	0,0105445	0,044504	0,1362436	0,9702829	0,9963789	0,9986862	0,3665107	0,8137205	0,7512066	0,1137192
20	0,7121239	0,9500632	0,0417334	0,1700935	0,4707253	0,1153359	0,006474	0,0052482	0,9287224	0,6063178	0,7475809	0,4031486
21	0,8200139	0,1897724	0,159967	0,5646468	0,996572	0,408134	0,0257283	0,0208825	0,2647883	0,9547861	0,7548147	0,9624792
22	0,5903645	0,6150354	0,5375103	0,9832832	0,0136652	0,9662425	0,1002654	0,0817856	0,7787018	0,1726784	0,7402778	0,144452
23	0,967337	0,9470674	0,9943719	0,0657494	0,0539137	0,1304716	0,360849	0,300387	0,6893013	0,5714422	0,7690663	0,4943425
24	0,1263844	0,200523	0,0223857	0,2457058	0,2040281	0,453795	0,922548	0,8406186	0,85666	0,979584	0,7104133	0,999872
25	0,4416454	0,6412541	0,0875383	0,7413378	0,6496026	0,9914604	0,2858126	0,5359158	0,4911745	0,0799966	0,822905	0,0005121
26	0,986379	0,9201891	0,3195012	0,7670243	0,9104762	0,0338668	0,8164951	0,9948402	0,9996884	0,2943886	0,5829293	0,0020472
27	0,053742	0,2937644	0,8696808	0,7147922	0,326037	0,1308792	0,5993235	0,0205327	0,0012458	0,8308958	0,9724909	0,0081719
28	0,2034151	0,8298675	0,4533445	0,8154573	0,8789475	0,4549993	0,9605394	0,0804443	0,0049771	0,5620318	0,1070093	0,0324208
29	0,6481496	0,5647497	0,9912931	0,6019468	0,4255951	0,9918998	0,1516139	0,2958919	0,0198094	0,9846082	0,3822334	0,1254781
30	0,9122067	0,9832299	0,0345245	0,9584274	0,9778556	0,0321385	0,5145086	0,8333595	0,0776681	0,0606194	0,9445241	0,4389333
31	0,3203424	0,0659554	0,1333303	0,1593772	0,0866159	0,1244224	0,999158	0,5554857	0,2865431	0,2277788	0,2095933	0,9850834
32	0,8708926	0,2464212	0,4622134	0,5359045	0,3164544	0,4357659	0,0033652	0,9876854	0,8177446	0,7035825	0,6626558	0,0587763
33	0,4497546	0,7427912	0,9942887	0,9948435	0,8652441	0,9834959	0,0134153	0,048652	0,5961536	0,8342166	0,8941724	0,2212865
34												

Plan1 Plan2 Plan3

Figura 8

A leitura da última tabela segue a seguinte seqüência:

A2	A3	...	A33	B2	B3	...	B33	C2	...	L2	...	L33
$f_4(0,2)$	$f_4^2(0,2)$	...	$f_4^{32}(0,2)$	$f_4^{33}(0,2)$	$f_4^{34}(0,2)$	...	$f_4^{64}(0,2)$	$f_4^{65}(0,2)$	...	$f_4^{353}(0,2)$	...	$f_4^{384}(0,2)$

Apesar da "pequena" quantidade de passos ***iterativos*** exibidos na Figura **8**, a seqüência parece ter um "**comportamento estocástico**", pois, a cada passo, a partir de algum termo já determinado, o termo seguinte na seqüência nos parece "imprevisível".

Em particular, veja nas células **L8** e **L9** algo que pode nos surpreender:

$$f_k^{359}(0{,}2) = 1 \text{ e } f_k^{360}(0{,}2) = 0{,}0000001128.$$

Questão para reflexão:

¿Como se podem explicar esses dois últimos resultados?

Caso você queira algum subsídio (¿optativo?) para formular (mais) uma resposta à questão proposta, veja o texto sob a forma de **apêndice.**

Além disso, se a última hipótese se confirmar (isto é, se os termos da seqüência são distintos dois a dois), então os valores $\mathbf{f_k^n(x_0)}$ começarão a se "adensar" no intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$ a medida que o número **n** de ***iterações*** cresce indefinidamente.

Em termos "mais formais", o conjunto: $\{f_k^n(x_0) \mid \text{com } \mathbf{n} \text{ inteiro, } \mathbf{n \geq 0}, \text{ crescendo indefinidamente}\}$ é "**denso**" no intervalo **[0; 1]** [8].

Nessas condições, é possível que estejamos diante de um **sistema dinâmico determinístico discreto** [obtido da função "bem comportada" $\mathbf{f_k(x) = k.x.(1 - x)}$, com $\mathbf{k > 3}$], cujas ***iterações***, a partir de $\mathbf{x_0}$, geram uma seqüência que pode ter um comportamento **estocástico**].

Em resumo, a **1ª PARTE** deste texto teve como objetivo a introdução de um "novo" problema (a possibilidade de se introduzir nos ensinos fundamental e médio algumas noções sobre "caos matemático"), e deixa, a quem se dispuser a ler este texto, as seguintes:

Questões para reflexão:

Diante de "novas" tendências nos estudos de sistemas "reais", ¿você acredita que é possível introduzir algumas delas nos ensinos fundamental e médio?

¿Será que algumas dessas "novas" tendências são "acessíveis" a estudantes dos ensinos fundamental e médio?

Ao ler neste texto algumas poucas informações sobre sistemas dinâmicos determinísticos com comportamento estocástico, ¿você se sentiu à "margem" desses "novos" conhecimentos?

Se sua resposta à questão anterior foi "sim" , então ¿você sentiu algum desejo, ou necessidade, de receber participativamente essas informações e, possivelmente, construir alguma formação sobre "essas novidades"?

Na **2ª PARTE** deste texto, tentaremos fornecer alguns subsídios para que possamos juntos responder criticamente às últimas questões.

APÊNDICE:

Neste (sub) texto, estamos sugerindo que você "construa" uma planilha análoga à exibida na Figura **8**, porém com uma conveniente modificação na "precisão" dos valores numéricos que lá foram apresentados. Para isso, veja alguns procedimentos (se você considerar isso necessário):

- Vamos imaginar, inicialmente, que você "construiu" a planilha exibida na Figura **1**, página **9**.
- Realize, então, as seguintes modificações:
  - ° Mantenha o texto da célula **A1** ("$\mathbf{x_0}$ =") e digite na célula **B1** o número **0,2**;
  - ° Digite na célula **C1** o texto "**k =**" e na célula **D1,** o número **4**;
  - ° Digite na célula **A2** a "fórmula": "**=d1*b1*(1-b1)**";
  - ° Digite na célula **A3** a "fórmula": "**=d1*a2*(1-a2)**"; (o símbolo "$" foi incluído na fórmula digitada na célula **A3** para que, ao se "copiar" o seu conteúdo em outras células, o valor digitado na célula **D1** permaneça fixo nesse ato);

[8] Apenas para lembrar, o conjunto citado é **denso** no intervalo **[0; 1]**, pois é enumerável e, para cada **x** em **[0; 1]**, existe um termo daquela seqüência "arbitrariamente" próximo de **x**.

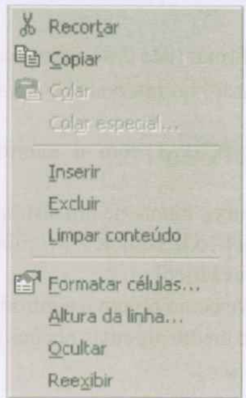
° Copie o conteúdo da célula **A3** na região da planilha que vai da célula **A3** até a célula **L33**;
° Digite na célula **B2** a "fórmula": "**=d1*a33*(1-a33)**";
° Copie o conteúdo da célula **B2** na região que vai da célula **B2** até a célula **L2**;

Com isso, sua planilha pode se parecer com a exibida na Figura **8**.

Para modificar a "precisão" da sua planilha, você pode, por exemplo, realizar as seguintes ações (há outras):

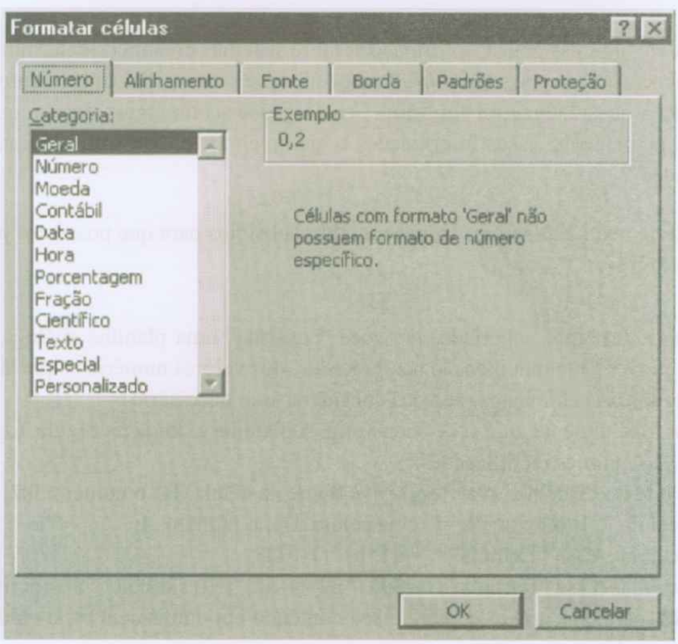
• Pressione a tecla Ctrl, mantenha-a pressionada e pressione a tecla T. Com isso, toda a planilha fica selecionada.

• Sobre essa seleção, pressione o botão direito do rato para fazer aparecer o seguinte "menu".

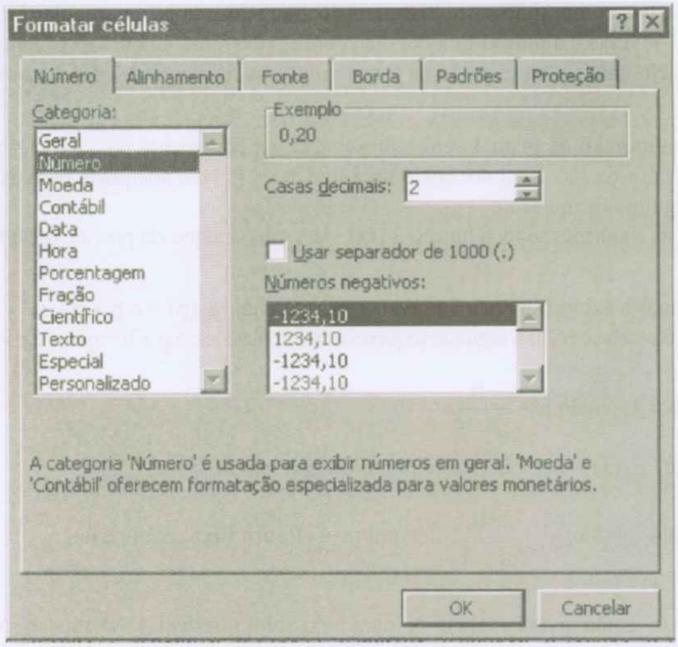


• Como o objetivo consiste em modificar a "precisão" dos valores contidos na planilha, então clique sobre Formatar células... .

• Com essa ação, deverá aparecer a "janela" seguinte:



• Clique sobre a opção Número. Essa ação deverá modificar a "janela" anterior na seguinte:



• Aumente o número de Casas decimais, por exemplo, para **15**.

• Veja o resultado disso e tire suas conclusões (poderá ser necessário aumentar a largura da coluna **L** para observar os valores contidos nas células **L8** e **L9**).

2ª PARTE: ALGUMAS DEFINIÇÕES "ELEMENTARES" PARA SISTEMAS DINÂMICOS.

As definições que serão apresentadas na seqüência do texto podem ser classificadas como "elementares", pois possuem, em seu bojo, conceitos que costumam fazer parte de currículos dos ensinos fundamental e médio. O caráter "elementar" dessas definições não significa que elas são "simples", ou "fáceis", para esses tipos de estudantes.

Sempre que possível, antes da apresentação teórica formal de cada definição, serão apresentadas situações introdutórias sob a forma de **exemplos**.

• Sobre "ponto fixo" de função.

Esse primeiro conceito vinculado com o tema deste texto já foi mencionado superficialmente na **1ª PARTE**, no exercício **E7**, na página **15**. Por causa disso, iremos explicitar uma definição de ponto fixo antes de exibir alguns exemplos e propor algumas atividades para explorar alguns de seus significados.

• Ponto fixo de uma função: uma definição.

Dada uma função $\mathbf{y = f(x)}$, dizemos que um valor $\mathbf{p}$ de seu domínio é "**ponto fixo**" dela se $\mathbf{f(p) = p}$.

O(s) ponto(s) fixo(s) de uma função $\mathbf{y = f(x)}$, se existir(em), pode(m) ser obtido(s) graficamente quando ela for representada, em um mesmo sistema de coordenadas, "junto" com a função diagonal $\mathbf{\Delta(x) = x}$ (essa função já foi mencionada no exercício **E7**, na página **15**). O número de pontos "comuns" às suas representações gráficas corresponde ao número de pontos fixos de $\mathbf{y = f(x)}$.

Talvez fosse "mais" rigoroso afirmar que um "**ponto fixo**" de $\mathbf{y = f(x)}$ é o ponto da diagonal Δ [9] cujas coordenadas são $\mathbf{p}$. Porém, existem algumas situações no ensino de matemática nas quais uma espécie de "tradição" acaba prevalecendo, mesmo que inadequadamente, sem que haja "maiores" conseqüências para um "significativo" entendimento daquilo que se está tratando. Esse parece ser o caso aqui.

Na seqüência, aparecem alguns exemplos com o objetivo de explorar esse conceito com um pouco "mais" de profundidade. Iremos nos concentrar preferencialmente em algumas funções que costumam ocorrer nos ensinos

[9] O símbolo Δ estará representando, na seqüência do texto, o conjunto dos pontos do plano R×R cujas coordenadas são iguais. Em símbolos, $\Delta = \{ (a; b) \text{ em } R\times R \mid a = b \}$.

fundamental e médio, tais como: funções polinomiais de graus um e dois, a particular função polinomial de grau três $g(x) = x^3$ e sua "inversa", algumas funções "trigonométricas", as funções exponencial e logarítmica e uma função definida no ciclo unitário no plano (uma função que associa "ângulos" expressos em radiano).

• **Exemplo 1:**

1) Uma função polinomial de **grau 1** será representada genericamente por $\mathbf{g_1(x) = a.x + b}$. Para verificar se ela "**fixa**" algum valor de seu domínio, então uma iniciativa (talvez adequada para os ensinos fundamental e médio) pode ter a seguinte formulação:

E8) [10] ¿Quais são as condições sobre a função $g_1(x) = a.x + b$ para que ela possua (pelo menos) um ponto fixo?

• **Resolução:**

Imagine que exista um valor **p** para a variável **x** para o qual: $g_1(p) = a.p + b = p$.

Nessas condições, é possível exibir a seguinte seqüência de implicações: $a.p + b = p \Rightarrow a.p - p = -b \Rightarrow (a-1).p = -b$.

Se $a \neq 1$, então: $p = \dfrac{-b}{a-1}$.

Logo, $g_1(x) = a.x + b$ possui ponto fixo, se $a \neq 1$.

O valor obtido, $p = \dfrac{-b}{a-1}$, denomina-se **Ponto Fixo** da função.

• **Comentários:**

• Se $a = 1$ e $b = 0$, então $g_1(x) = \Delta(x) = x$ para todo valor possível x. A função $\Delta(x) = x$ "fixa" todos os valores de seu domínio.

• Se $a = 1$ e $b \neq 0$, então a representação gráfica de $g_1(x) = x + b$ é paralela à diagonal Δ, ou seja, $g_1(x)$ "não fixa" qualquer valor de seu domínio.

• Se $a = -1$ e $b = 0$, então $g_1(x) = \Delta_{-1}(x) = -x$ para todo valor possível x. A função $\Delta_{-1}(x) = -x$ "fixa" apenas o valor 0 e será denominada de "diagonal" dos quadrantes "pares".

• Representações gráficas de $g_1(x) = a.x + b$, com $a \neq 1$, podem ser:

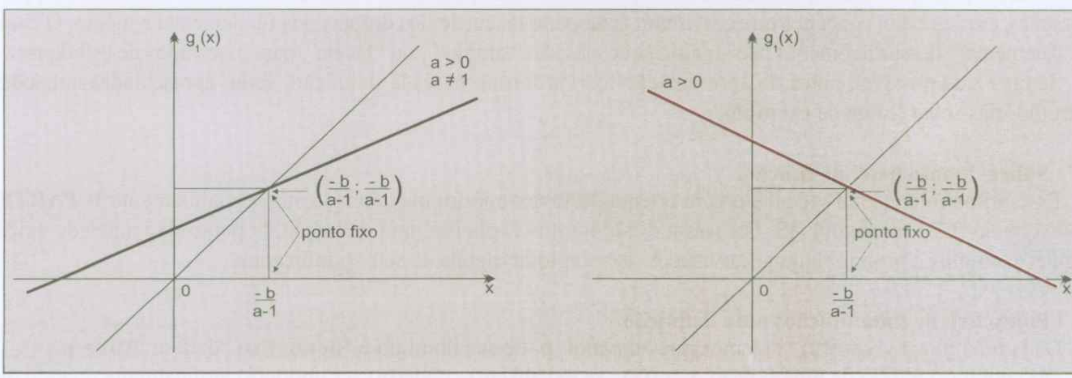


Figura 9

Questão para reflexão:

¿É possível que a função de grau 1 "fixe" mais que um valor para $a \neq 1$?

2) Uma função polinomial de **grau 2** será representada genericamente por $\mathbf{g_2(x) = a.x^2 + b.x + c}$. Para verificar se ela "**fixa**" algum valor de seu domínio, então uma iniciativa (talvez adequada para os ensinos fundamental e médio) pode ter a seguinte formulação:

E9) ¿Será que a função $g_2(x) = a.x^2 + b.x + c$ pode "fixar" algum(ns) valor(es) de seu domínio? Ou: ¿quais são as condições sobre os coeficientes a, b e c para que $g_2(x)$ "fixe" algum(ns) valor(es) de seu domínio?

[10] O símbolo **E8** representa o oitavo exercício neste texto. Os sete primeiros foram propostos na primeira parte do texto.

• **Resolução:** Imagine que exista um valor p para o qual $g_2(p) = a.p^2 + b.p + c = p$.

É possível escrever a seguinte seqüência de igualdades:

$a.p^2 + b.p + c = p \Rightarrow a.p^2 + (b - 1).p + c = 0$.

Seja: $D = (b - 1)^2 - 4.a.c$. Nessas condições, $g_2(x)$ "fixa" algum valor de seu domínio, se $D \geq 0$, ou seja, se $(b - 1)^2 \geq 4.a.c$. A seqüência dessa resolução fica como exercício.

Podem ser convenientes alguns exemplos particulares na forma de exercícios (talvez) adequados para os ensinos fundamental e médio.

E10) Em cada caso seguinte:

a) Verifique que a função $g_2(x) = x^2 - 1$ "fixa" dois valores de seu domínio: $p_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ [11].

b) Verifique se o mapa logístico $f_k(x) = k.x.(1 - x)$, mencionado nas páginas 14 e 15 da 1ª PARTE, "fixa" algum valor de seu domínio. ¿Qual é a análise que se pode realizar sobre o mapa logístico para os diversos valores que se podem atribuir a k?

• **Resolução do item b:** Imagine que exista um valor p_k para o qual $f_k(p_k) = k.p_k.(1 - p_k) = p_k$.

• Se $p_k = 0$, então $f_k(0) = k.0.(1 - 0) = 0$, ou seja, 0 é ponto fixo do mapa logístico.

• Se $p_k \neq 0$, então é possível a seguinte seqüência de igualdades:

$k.p_k.(1 - p_k) = p_k \quad \Rightarrow \quad k.(1 - p_k) = 1 \quad \Rightarrow \quad k.p_k = k - 1$, ou seja: $p_k = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$.

Questão para reflexão:

¿Qual é o valor "proibido" para k na expressão de p_k?

• Uma análise sobre o mapa logístico, com relação aos possíveis valores que podem ser atribuídos a k, pode ser a seguinte:

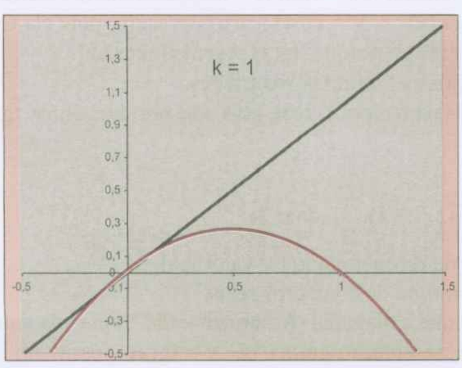
° Se $k = 1$, então o mapa logístico possui um só ponto fixo, a saber, $p_1 = 0$.

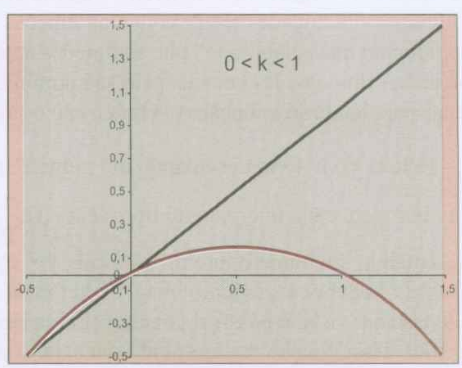
° Se $k > 1$, então $0 < p_k = 1 - \frac{1}{k} < 1$.

° Se $0 < k < 1$, então $p_k < 0$.

° Se $k < 0$, então $p_k = 1 - \frac{1}{k} > 1$.

• Podem ser convenientes algumas figuras para ilustrar os quatro casos mencionados.





[11] ¿Quais são as semelhanças e/ou diferenças que os valores $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ têm com o "número de ouro"?

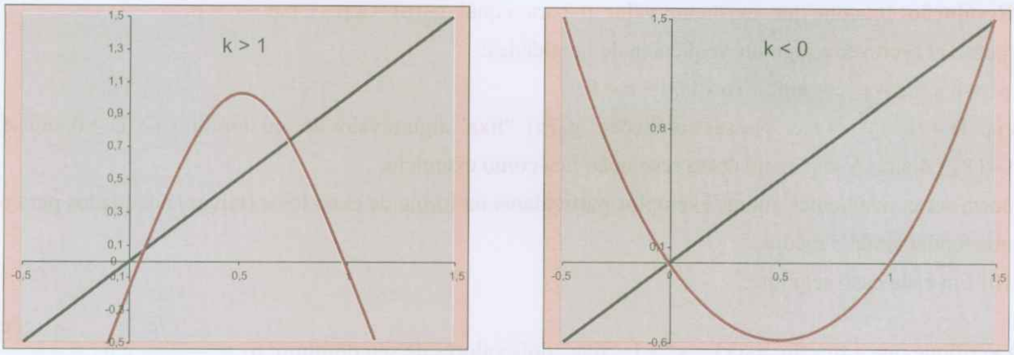


Figura 10

3) A função **g3(x) = x3** "fixa" três valores de seu domínio, a saber: **0**, **1** e **-1**. Para obter esses valores, basta obter as soluções da equação **g3(p) = p3 = p**, que é equivalente à equação **p.(p2 - 1) = 0**.

4) A função **y = sen(x)** "fixa" apenas **p = 0**.

Veja a figura a seguir:

5) A função **y = cos(x)** "fixa" um único valor de seu domínio. Um resultado aproximado para esse valor é **0,739085133** e foi obtido por meio de "aproximações sucessivas", utilizando-se uma planilha eletrônica. Veja, a seguir, uma representação gráfica das funções **y = cos(x)** e **Δ(x) = x,** feita em uma planilha eletrônica.

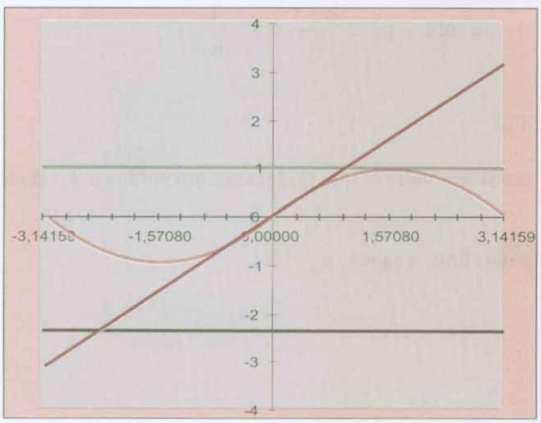


Figura 11

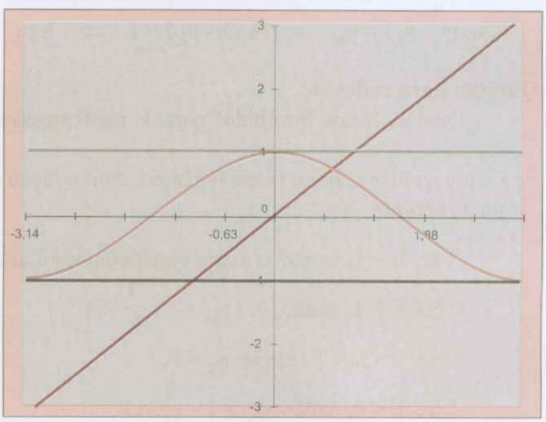


Figura 12

6) A função **y = tg(x)** [que também costuma ser representada por "**tan(x)**" nas calculadoras eletrônicas] possui algumas dificuldades técnicas que as funções **y = sen(x)** e **y = cos(x)** não possuem, pois ela tem um "comportamento mais elaborado" que as funções anteriores [talvez porque **tg(x) = sen(x)÷cos(x)**].

Uma dessas dificuldades começa pelo seu domínio, que possui "infinitas" restrições.

Apenas para lembrar, a função **y = tg(x)** não está definida para todo **x** real, pois só é possível obter **tg(x)** se

$x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, com **k** representando um número inteiro.

Além disso, em cada intervalo do tipo $(2.k - 1).\frac{\pi}{2} < x < (2.k + 1).\frac{\pi}{2}$, com **k** representando um número inteiro, a função **y = tg(x)** pode receber qualquer valor real.

Em outras palavras, o conjunto imagem da função é o conjunto dos números reais.

Tendo isso em vista, é possível concluir (informalmente) que a diagonal Δ "cruza" cada "ramo" da representação gráfica dessa função em um ponto, ou seja, como a representação gráfica de **y = tg(x)** possui "infinitos" ramos equipotentes ao conjunto dos números reais [12], então essa função possui "infinitos pontos fixos".

[12] Um conjunto **A** é **equipotente** a um conjunto **B** se ambos podem ser colocados em correspondência bi-unívoca, isto é, se existe uma função **f** de **A** em **B,** que é bijetora.

Pode ser conveniente apresentar uma representação gráfica dessa função junto com a diagonal Δ.

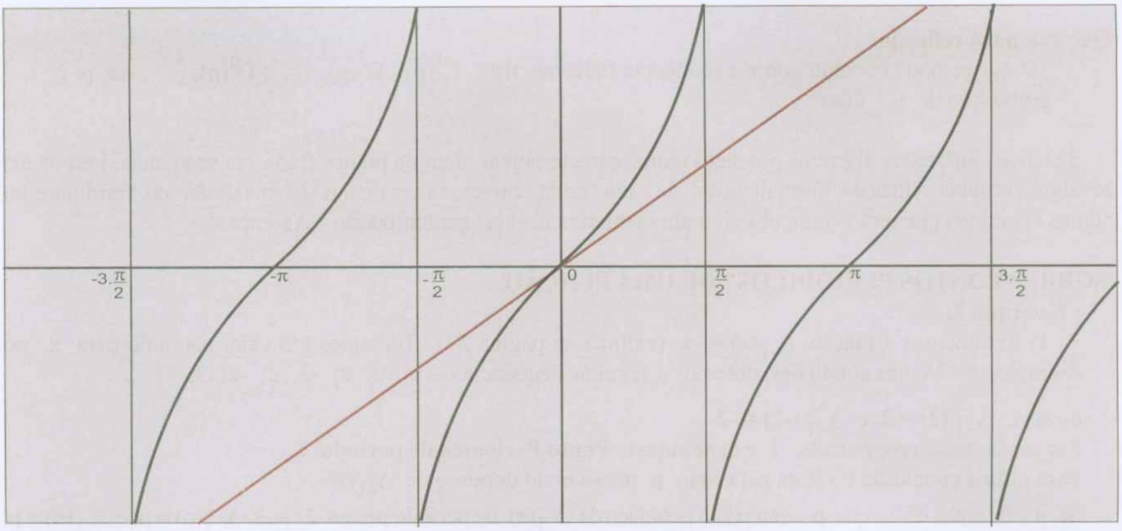


Figura 13

7) As funções $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ não "fixam" qualquer valor de seus domínios, pois $2^x \neq x$ e $\log_2 \neq x$, para todo x possível. Veja a Figura **14**.

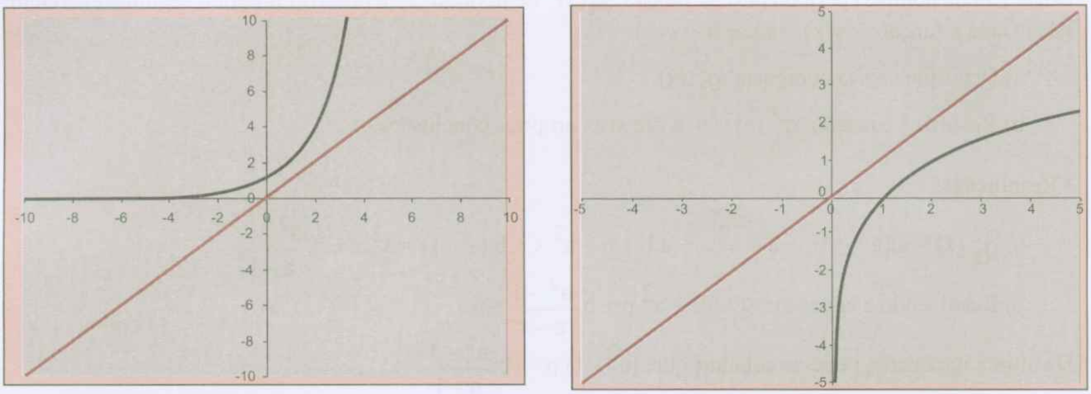


Figura 14

Por sua vez, toda função exponencial $y = a^x$, com $0 < a < 1$, possui um ponto fixo. Como a determinação desse ponto fixo requer a resolução de uma equação "complicada" [13], do ponto de vista dos ensinos fundamental e médio, então uma "conclusão" de sua existência será feita por meio da figura seguinte:

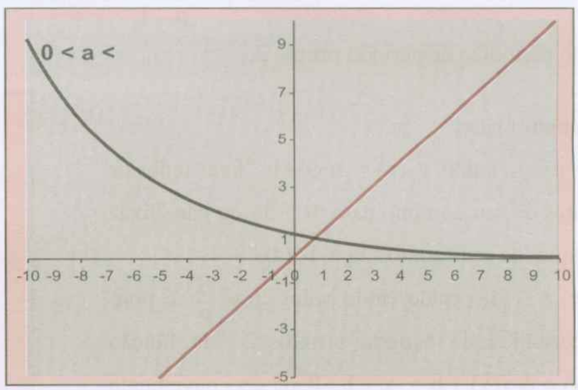


Figura 15

[13] A equação **ax = x** é denominada **equação transcendente**, pois reúne uma igualdade de uma expressão algébrica polinomial e uma expressão exponencial.

Para vincular o estudo sobre pontos fixos de uma função ao tema deste texto, pense sobre a seguinte:

Questão para reflexão:

¿O que se pode concluir sobre a seqüência *iterativa* $f(p)$; $f^{1}(p)$; $f^{2}(p)$; . . . ; $f^{n}(p)$; . . . , se p é ponto fixo de $y = f(x)$?

Sistemas dinâmicos discretos possuem outras características além de pontos fixos. Na seqüência, iremos exibir algumas delas. Antes da "formalização" de cada "nova" característica de um sistema dinâmico, formularemos alguns exemplos que terão como objetivo uma tentativa de sua "generalização". Acompanhe:

SOBRE "PONTOS PERIÓDICOS" DE UMA FUNÇÃO.

• Exemplo 2:

1) Retomemos a função $\Delta_{-1}(x) = -x$ (exibida na página **27**). Tomemos um valor não nulo para **x**, por exemplo, **2**. Nessas condições, obtemos a seguinte seqüência *iterativa*: 2; -2; 2; -2; 2; -2; ... , ou seja, $\Delta_{-1}^{2}(2) = 2$ e $\Delta_{-1}^{2}(-2) = -2$.

Por causa dessa propriedade, **2** é denominado **Ponto Periódico de período 2**.

Essa última conclusão é válida para todo **p** possível do domínio de $\Delta_{-1}(x)$.

Se $p \neq 0$, então diz-se que **p** é um ponto periódico de $\Delta_{-1}(x)$ de **período primo 2**, pois $\Delta_{-1}^{2}(p) = p$ e $\Delta_{-1}(p) \neq p$.

Se $p = 0$, então diz-se que **0** também é um ponto periódico de **período 2**, porém **2** não é seu **período primo** (que, nesse caso, é **1**).

2) A função de **grau 1** $g_1(x) = a.x + b$ **¿pode ter ponto periódico de período 2**? Para tentar estabelecer a existência de ponto(s) periódico(s) da função $g_1(x)$, de período **2**, é possível propor o seguinte exercício.

E11) Dada a função $g_1(x) = a.x + b$:

a) Determine a sua composta $g_1^2(x)$.

b) Resolva a equação $g_1^2(p) = p$ e tire suas próprias conclusões.

• Resoluções:

a) $g_1^2(x) = a.[a.x + b] + b = a^2.x + a.b + b = a^2.x + b.(a + 1) = a^2.x + b.\dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$;

b) Resolvendo a equação: $g_1^2(p) = a^2.p + b.\dfrac{a^2 - 1}{a - 1} = p$.

Da última igualdade, pode-se concluir que: $(a^2 - 1).p = -b.\dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$.

Supondo que $a \neq 1$ e $a \neq -1$, então: $p = \dfrac{-b}{a - 1}$, ou seja, a função g_1 só possui um ponto fixo e não possui ponto periódico de período primo 2.

• Comentários:

• Se $a = 1$, então $g_1(x) = \Delta(x) + b$ "fixa" todos os valores de seu domínio para $b = 0$, ou não "fixa" qualquer de seus pontos para $b \neq 0$.

• Se $a = -1$, então todo valor $p \neq \dfrac{b}{2}$ é ponto periódico de período primo 2 da função $g_1(x) = \Delta_{-1}(x) + b = -x + b$. Pode ser conveniente uma representação gráfica de $g_1(x) = -x + b$:

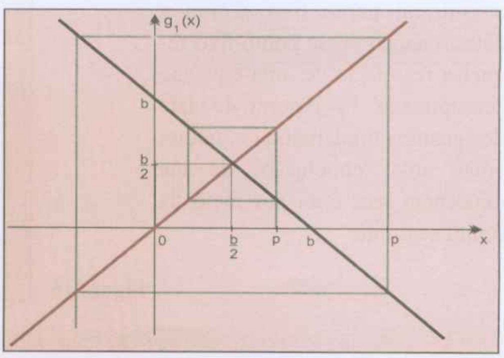


Figura 16

3) Vamos investigar se a função **g2(x) = x2 - 1** (apresentada no exercício **E10**, na página **28**) possui ponto(s) periódico(s) de período primo **2**, **3**, **4**, ...

• Vamos iniciar pelo segundo passo *iterativo*: $g_2^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2.x^2 + 1 -1 = x^4 - 2.x^2 = x^2.(x^2 - 2)$.

Imaginando que a função g_2^2 possua algum ponto periódico **p**, então, impondo-se que $\mathbf{g_2^2(p) = p}$, segue que: $\mathbf{p^2.(p^2 - 2) = p}$. Logo: $p = 0$, ou $p.(p^2 - 2) = 1$, ou ainda $p^3 - 2.p - 1 = 0$.

Já é possível concluir que **0** é ponto periódico de **período primo 2** da função $\mathbf{g_2}$ realizando as seguintes ações: $g_2(0) = 0^2 - 1 = -1$ e $g_2^2(0) = g_2[g_2(0)] = g_2(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$.

Além disso, como $\mathbf{p_1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\mathbf{p_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são pontos fixos da função original, então é possível propor a seguinte atividade na forma de exercício:

E12) Verifique que os pontos fixos $p_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $p_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ da função $g_2(x) = x^2 - 1$ são pontos periódicos de período 2 dessa função.

Questão para reflexão:

¿Os pontos periódicos p_1 e p_2 de $g_2(x) = x^2 - 1$ têm período primo 2?

O exercício **E12** permite concluir que a equação $\mathbf{p^2.(p^2 - 2) = p}$, que é uma equação de grau **4**, possui duas soluções reais $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$, além da solução **0**.

Isso significa, também, que a equação $\mathbf{p^2.(p^2 - 2) = p}$ possui uma quarta solução. Essa conclusão pode suscitar a seguinte atividade (talvez para estudantes das séries finais do ensino médio)

E13) Obtenha todas as soluções da equação $p^2.(p^2 - 2) = p$ sabendo que $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são duas de suas soluções.

• Comentários:

• A função $\mathbf{g_2(x) = x^2 - 1}$ possui dois pontos fixos $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ e dois pontos periódicos de período primo **2**, a saber, **0** e **-1**.

• A seqüência *iterativa* obtida de $\mathbf{g_2}$ e **0** é: 0; -1; 0; -1; 0; -1; ... .

• A seqüência *iterativa* obtida de $\mathbf{g_2}$ e **-1** é: -1; 0; -1; 0; -1; 0; -1; ... .

• Uma investigação sobre pontos periódicos de período primo **3** da função $\mathbf{g_2(x) = x^2 - 1}$ traz algumas dificuldades técnicas que estão além do que se pode explorar nos ensinos fundamental e médio.

Veja alguns comentários sobre isso:

° Obtenção de $\mathbf{g_2^3(x)}$: $g_2^3(x) = g_2^2[g_2(x)] = g_2^2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2.[(x^2 - 1)^2 - 2] = (x^2 - 1)^2.(x^4 - 2.x^2 - 1)$, que é uma função de grau **8**.

° Admitindo que $\mathbf{g_2(x) = x^2 - 1}$ possua ponto periódico **p** de período **3**, então é possível escrever a seguinte equação de grau **8**: $(p^2 - 1)^2.(p^4 - 2.p^2 - 1) = p$,

° Os pontos fixos $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ são duas de suas soluções.

° Com a última informação, falta-nos a determinação de **6** de suas soluções (se existirem) que, convenhamos, é uma tarefa difícil.

° As representações gráficas das funções: $g_2^3(x) = (x^2 - 1)^2.(x^4 - 2.x^2 - 1)$ e $f(x) = (x^2 - 1)^2.(x^4 - 2.x^2 - 1) - x$, elaboradas em uma planilha eletrônica, podem fornecer alguns subsídios a respeito das questões colocadas.

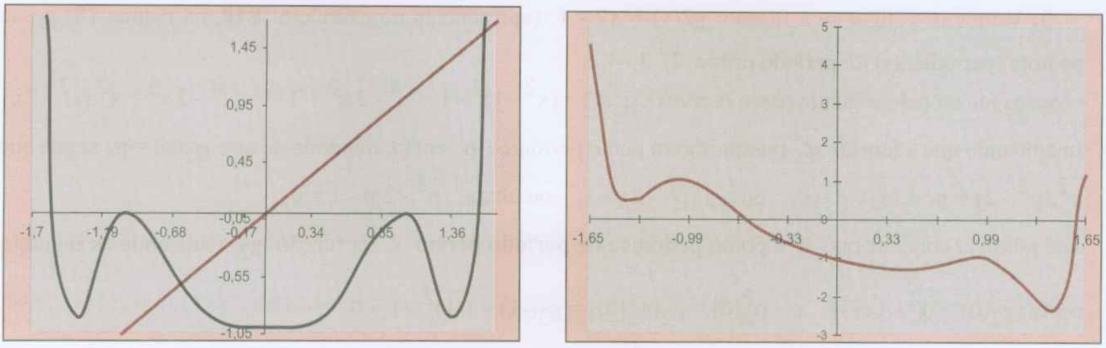


Figura 17

4) Esse exemplo tem como objetivo exibir uma função que possui **ponto periódico** de qualquer período primo **n**.

Por causa das dificuldades que esse exemplo possui, ele está sendo apresentado apenas para complementar este estudo, muito embora os seus conteúdos façam parte (¿será?) de currículos do ensino médio.

Na seqüência do texto, o símbolo C_1 estará representando o círculo unitário no plano (círculo cujos raios têm medida unitária). Com base no círculo C_1 será definido o conjunto S^1 da seguinte forma:

• α está em S^1 se α é a medida do ângulo formado pela semi-reta com origem no centro do círculo que passa por um ponto da fronteira de C_1 e o eixo **0x**, medido em radiano e orientado no sentido anti-horário. Veja a figura seguinte:

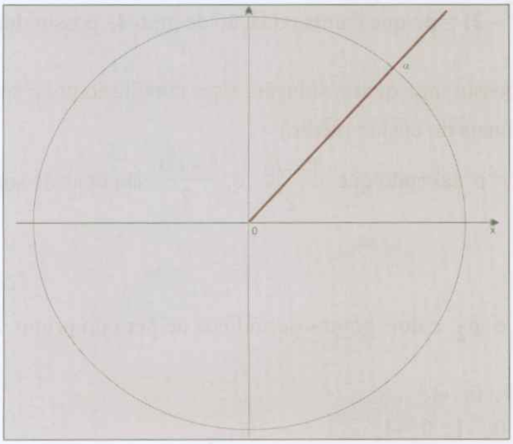


Figura 18

Portanto, um elemento de S^1 fica determinado por um ângulo cuja medida, em radiano, é da forma $\alpha + 2.k.\pi$, com **k** representando um número inteiro.

Seja a função **f** definida em S^1 por: $f(\alpha) = 2.\alpha$.

Como: $f(\alpha + 2.\pi) = 2.(\alpha + 2.\pi) = 2.\alpha = f(\alpha)$, então **f** está bem definida em S^1.

Para α em S^1, o sistema dinâmico que **f** determina é o seguinte: $\alpha,\ f(\alpha),\ f^2(\alpha),\ f^3(\alpha), \dots ,\ f^n(\alpha), \dots$, com:

$$f^2(\zeta\zeta) = f(2.\alpha) = 4.\alpha = 2^2.\alpha$$
$$f^3(\alpha) = f(2^2.\alpha) = 8.\alpha = 2^3.\alpha$$
$$f^4(\alpha) = f(2^3.\alpha) = 16.\alpha = 2^4.\alpha$$
$$\vdots$$
$$f^n(\alpha) = f(2^{n-1}.\alpha) = 2^n.\alpha.$$
$$\vdots$$

¿Em que condições pode-se afirmar que $fn(\alpha) = \alpha$?

Para que isso ocorra, deve-se impor que: $f^n(\alpha) = 2^n.\alpha = \alpha + 2.k.\pi$, ou seja: $\alpha = \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$,

com $\mathbf{k = 0, 1, 2, 3, \dots , 2^n - 2}$ [14]. Anotaremos α por $\alpha_{\mathbf{n,k}}$, $\mathbf{k = 0, 1, \dots , 2^n - 2}$.

Pode ser conveniente um exemplo particular: **n = 3** e **k = 1**.

Com isso, obtém-se: $\alpha = \dfrac{2.\pi}{7}$, $2.\alpha = \dfrac{4.\pi}{7}$, $4.\alpha = \dfrac{8.\pi}{7}$ e $8.\alpha = \dfrac{16.\pi}{7} = \dfrac{2.\pi}{7} + 2.\pi = \dfrac{2.\pi}{7}$

e a seguinte seqüência *iterativa*: $\dfrac{2.\pi}{7}, \dfrac{4.\pi}{7}, \dfrac{8.\pi}{7}, \dfrac{2.\pi}{7}, \dfrac{4.\pi}{7}, \dfrac{8.\pi}{7}, \dfrac{2.\pi}{7}, \dots$,

ou seja, a seqüência obtida é periódica de período **3**.

[14] Nessas condições, α é **raiz (2n-1)-ésima** de **1**, pois **[cos(α) + i.sen(α)]2.n-1 = 1**.

No caso geral, dizemos que $\alpha = \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$ é **ponto periódico de período primo n** da função **f**(α) = **2.**α para **n = 1, 2, 3, ...** .

PONTO PERIÓDICO DE PERÍODO n DE UMA FUNÇÃO: Definição.

Dada uma função **y = f(x)**, dizemos que um valor **p** de seu domínio é **ponto periódico de período n** se ele é **ponto fixo** da **n-ésima composição** dessa função. Em símbolos, **p** é **ponto periódico de período n** se $f^n(p) = p$.

O menor inteiro positivo **n** para o qual $f^n(x) = x$ se denomina **período primo** de **x**. Em particular, se **n = 1**, então **x** é **ponto fixo** de **y = f(x)**.

De posse dos conceitos de **ponto fixo** e **ponto periódico** de uma função, são possíveis algumas atividades sob a forma de exercícios, tais como:

E14) Para cada função f seguinte, determine:

(i) o conjunto formado pelos termos da seqüência *iterativa* x, f(x), $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... , $f^n(x)$, ... , para os valores indicados para x do domínio de f;

(ii) o conjunto formado pelos seus pontos fixos;

(iii) o conjunto formado pelos seus pontos periódicos de período 1, 2, 3, 4, ...

1) A função identidade $\Delta(x) = x$, para todo valor possível x de seu domínio.

2) A função $\Delta_{-1}(x) = -x$, para: (i) x = 0; (ii) para $x \neq 0$.

3) A função de grau 1, $g_1(x) = a.x + b$ para: (i) $x = \dfrac{-b}{a-1}$; (ii) $x \neq \dfrac{-b}{a-1}$, com $a \neq 1$.

Nesse caso, podem ser convenientes algumas representações gráficas:

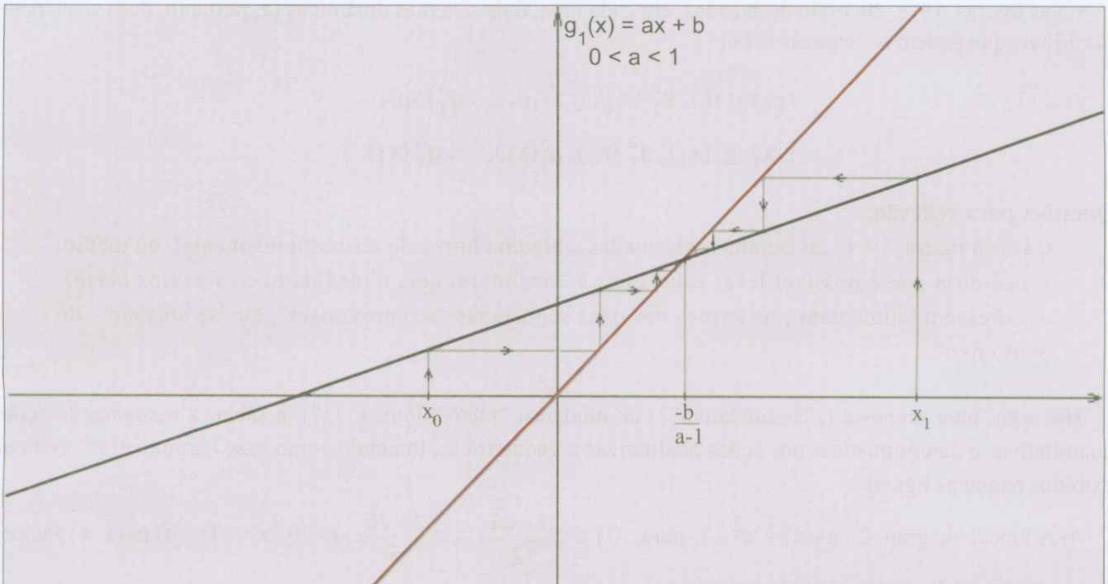


Figura 19

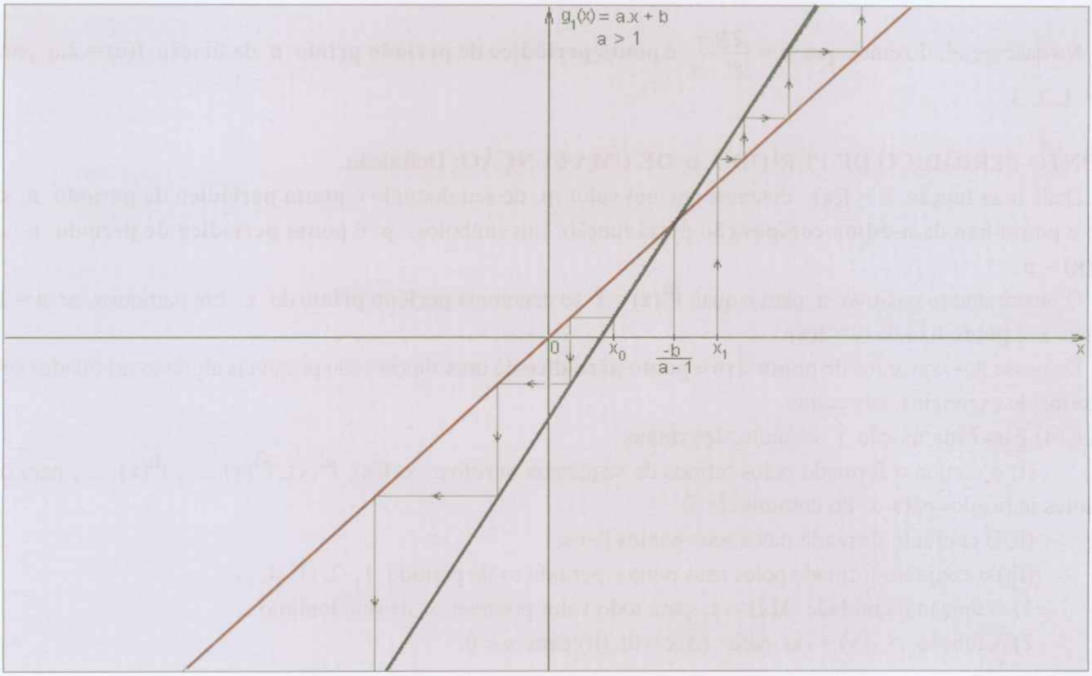


Figura 20

• Comentários:

• O caso em que **a < 0** fica por sua conta.

• Nas figuras **19** e **20** estão destacados, em cada uma, dois sistemas dinâmicos (e, portanto, duas seqüências *iterativas*) que podem ser expressos por:

$$x_0,\ g_1(x_0),\ g_1^2\ (x_0),\ g_1^3(x_0), \ldots,\ g_1^n\ (x_0), \ldots \quad \text{e}$$

$$x_1,\ g_1(x_1),\ g_1^2\ (x_1),\ g_1^3(x_1), \ldots,\ g_1^n\ (x_1), \ldots$$

Questões para reflexão:

Caso as figura 19 e 20 sejam apresentadas a alguma turma do ensino fundamental, ou médio, ¿você diria que é possível levar estudantes a concluírem que, à medida que os passos *iterativos* crescem (aumentam), os termos das duas seqüências "se aproximam", ou "se afastam", do ponto fixo?

Há, aqui, uma proposta (¿"significativa"?) de mudança "metodológica" (¿?), a saber, a mudança de ações quantitativas e determinísticas por ações qualitativas e geométricas, tomando como base "argumentos" gráficos exibidos naquelas figuras.

4) A função de grau 2, $g_2(x) = x^2 - 1$ para: (i) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = 0$, $x = -1$; (ii) para x distinto dos pontos periódicos mencionados em (i).

Aqui também pode ser conveniente uma representação gráfica:

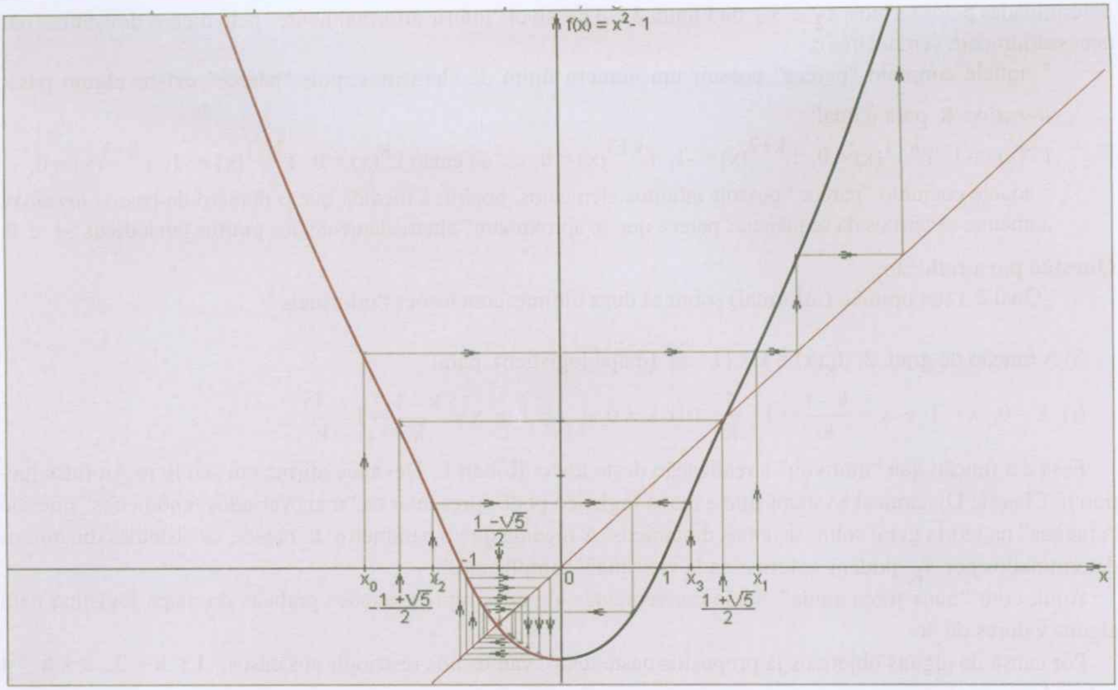


Figura 21

• **Comentários:**

• Observe as "setas" que "partem" de **-1**, **0**, $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$.

• As tabelas seguintes ilustram alguns casos da Figura **21**.

0,9	f(0,9)	$f^2(0,9)$	$f^3(0,9)$	$f^4(0,9)$	$f^5(0,9)$	$f^6(0,9)$	$f^7(0,9)$	$f^8(0,9)$	$f^9(0,9)$	$f^{10}(0,9)$	$f^{11}(0,9)$	$f^{12}(0,9)$
0,9	-0,19	-0,9639	-0,0708968	-0,9949737	-0,0100275	-0,9998995	-0,00020	-1	0	-1	0	-1

1,2	f(1,2)	$f^2(1,2)$	$f^3(1,2)$	$f^4(1,2)$	$f^5(1,2)$	$f^6(1,2)$	$f^7(1,2)$	$f^8(1,2)$	$f^9(1,2)$	$f^{10}(1,2)$	$f^{11}(1,2)$	$f^{12}(1,2)$
1,2	0,44	-0,8064	-0,34972	-0,8777	-0,22965	-0,94726	-0,1027	-0,98945	-0,02098	-0,99956	-0,00088	-0,9999992

• As duas tabelas foram elaboradas em uma planilha eletrônica.

• Na tabela na qual $\mathbf{x = 0{,}9}$, o termo $\mathbf{f^8(x) = -1}$ é um "arredondamento" feito pelo processador numérico do computador no qual "rodou" aquela planilha. Usando a calculadora do **Windows™**, encontramos $\mathbf{f^8(x) \cong -0{,}9999999595631283602641903235777 1}$.

• Na tabela na qual $\mathbf{x = 1{,}2}$, há a possibilidade de que os termos $\mathbf{f^{13}(1{,}2)}$ e $\mathbf{f^{14}(1{,}2)}$ sejam "arredondados" para **0** e **-1**, respectivamente, na planilha.

• Se $\mathbf{x} < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou $\mathbf{x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então o conjunto $\mathbf{\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ... , f^n(x), ...\}}$, "parece" possuir "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se afastam" cada vez mais do ponto fixo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Veja as trajetórias de $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_1}$ na Figura **21**.

• Se $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \mathbf{x} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\mathbf{x \neq -1}$ e $\mathbf{x \neq 0}$ e $\mathbf{x \neq 1}$, então o conjunto $\mathbf{\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ... , f^n(x), ...\}}$, tem um "comportamento mais elaborado" (¿difícil?) que os casos já mencionados. "Olhando" para as trajetórias determinadas pelos termos x_2 e x_3 na Figura **21**, é possível "inferir informalmente" pelo menos dois fatos (não necessariamente verdadeiros):

° aquele conjunto "parece" possuir um número finito de elementos, pois "parece" existir algum passo *iterativo* **k** para o qual:

$f^k(x) = -1,\ f^{k+1}(x) = 0,\ f^{k+2}(x) = -1,\ f^{k+3}(x) = 0, \ldots$, ou então $f^k(x) = 0,\ f^{k+1}(x) = -1,\ f^{k+3}(x) = 0, \ldots$

° aquele conjunto "parece" possuir infinitos elementos, porém, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "parece que se aproximam" alternadamente dos **pontos periódicos -1** e **0**.

Questão para reflexão:

¿Qual é a sua opinião (informal) sobre as duas últimas conclusões "informais"?

5) A função de grau 2, $f_k(x) = k.x.(1 - x)$ (mapa logístico) para:

(i) $x = 0,\ x = 1$ e $x = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$; (ii) $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e $x \neq \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$.

Essa é a função que "motivou" a realização deste texto. Robert L. Devaney afirma em seu livro An Introduction to Chaotic Dynamical Systems que o mapa logístico pode apresentar os "mais variados fenômenos" que são "cruciais" na teoria geral sobre sistemas dinâmicos. À medida que o parâmetro **k** cresce, os sistemas dinâmicos determinados por $\mathbf{f_k}$ podem se tornar cada vez "mais complicados"

Aqui, com "mais força ainda", serão convenientes algumas representações gráficas do mapa logístico para alguns valores de **k**.

Por causa de alguns objetivos já propostos neste texto, vamos nos restringir aos casos: $\mathbf{1 \leq k < 3}$, $\mathbf{3 \leq k \leq 4}$ e $\mathbf{k > 4}$.

O caso em que $\mathbf{k < 0}$ foi descartado, pois o ponto fixo $\mathbf{1 - \frac{1}{k} > 1}$ (veja Figura a **10**, inferior, à direita, na página **29**) e o caso $\mathbf{0 < k < 1}$ também foi descartado, pois o ponto fixo $\mathbf{1 - \frac{1}{k} < 0}$ (veja Figura **10**, superior, à direita).

1) $\mathbf{k = 1}$. Nesse caso, o mapa logístico possui um único ponto fixo: **0**.

• Veja a Figura **22**. Na seqüência, a diagonal Δ poderá não formar ângulo com **45°** com o **eixo x**, pois as escalas nos eixos coordenados poderão ser distintas.

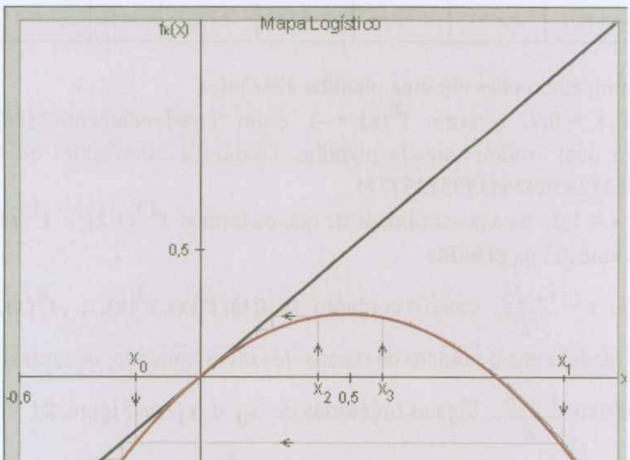


Figura 22

• A determinação do conjunto formado pelos termos da seqüência *iterativa*:

x ; $f_k(x)$; $f_k^2(x)$; $f_k^3(x)$; $f_k^4(x)$; $f_k^5(x)$; $f_k^6(x)$; $f_k^7(x)$; $f_k^8(x)$; .... ; $f_k^n(x)$; .... ,

para $x = 0$, $x = 1$ e $x = 1 - \frac{1}{k}$, será deixada como exercício.

- Os demais casos serão divididos nos subcasos:
  - $x < 0$, ou $x > 1$;
  - $0 < x < 1$.

Questões para reflexão:

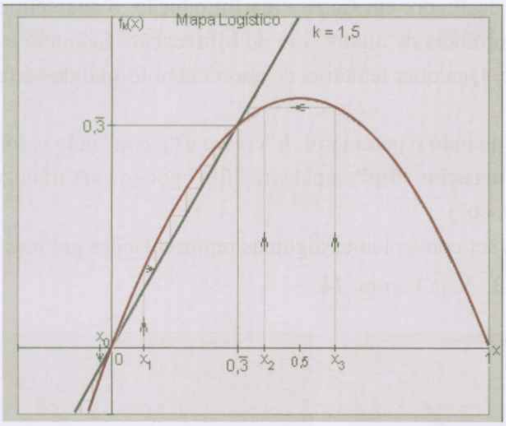
¿Qual é a sua conclusão (informal) sobre o conjunto dos termos da seqüência *iterativa* se $x < 0$, ou $x > 1$? (veja as "trajetórias" de x_0 e x_1 na Figura 22).

¿Qual é a sua conclusão (informal) sobre o conjunto dos termos da seqüência *iterativa* se $0 < x < 1$? (veja as "trajetórias" de x_2 e x_3 na Figura 22).

- O que se espera que você tenha observado na Figura 22 é o seguinte:
  - Se $x < 0$, ou $x > 1$, então $f_k(x) < 0$ e os valores subseqüentes de $f_k^n(x)$ ($n = 2, 3, ...$) são negativos e "parece" que "crescem sem limite", em valores absolutos.
  - No caso em que $0 < x < 1$, "parece" que, à medida que os passos *iterativos* se sucedem, os valores de $f_k^n(x)$ se "aproximam" cada vez mais do ponto fixo 0.

2) $1 < k < 3$. Nesse caso, seus pontos fixos são 0 e $p_k = 1 - \frac{1}{k}$, com $0 < p < \frac{2}{3}$. Iremos separar esse caso nos subcasos: $1 < k \leq 2$ e $2 < k < 3$.

- Veja a Figura 23.



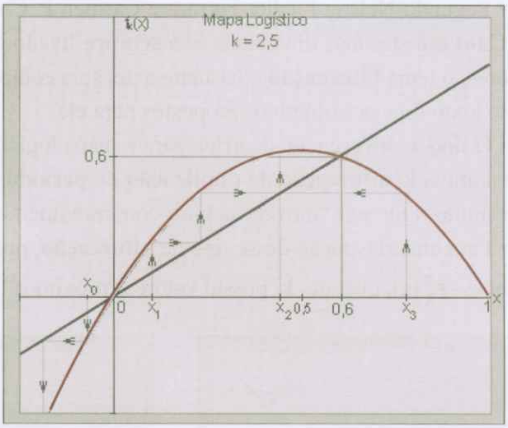


Figura 23

- Como no primeiro caso, a determinação do conjunto formado pelos termos da seqüência *iterativa*:

x ; $f_k(x)$; $f_k^2(x)$; $f_k^3(x)$; $f_k^4(x)$; $f_k^5(x)$; $f_k^6(x)$; $f_k^7(x)$; $f_k^8(x)$; .... ; $f_k^n(x)$; .... , para $x = 0$, $x = 1$ e $x = 1 - \frac{1}{k}$ será deixada como exercício.

- Os demais casos serão divididos nos subcasos: $x < 0$; $0 < x < 1$.

Questões para reflexão:

¿Qual é a sua conclusão (informal) sobre o conjunto dos termos da seqüência *iterativa* se $x < 0$? (veja a "trajetória" de x_0 na Figura 23).

¿Qual é a sua conclusão (informal) sobre o conjunto dos termos da seqüência *iterativa* se $0 < x < 1$? (veja as "trajetórias" de x_1, x_2 e x_3 na Figura 23).

• Ao observar a Figura **23,** espera-se concluir que:

° Se $x < 0$, então os valores subseqüentes de $f_k^n(x)$ são negativos ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e "parece" que se afastam "sem limite", em valores absolutos, do ponto fixo **0**.

° Se $x > 0$ e x "está próximo" de **0**, então os valores subseqüentes de $f_k^n(x)$ também "parece" que se afastam de **0**.

° Por causa dos dois últimos casos, o ponto fixo **0** é denominado **ponto fixo repulsor** (fonte, "source"), pois "pontos próximos" a ele "se afastam" dele no processo *iterativo*.

° Se $0 < x < 1$, então os valores subseqüentes de $f_k^n(x)$ "parece" que se aproximam de p_k.

° Por causa do último caso, o ponto fixo p_k é denominado **ponto fixo atrator** (sorvedor, "sink"), pois "pontos próximos" a ele "se aproximam" dele no processo *iterativo*.

• Os últimos comentários são, na "realidade", (seja lá o que isso significa) um teorema da teoria. Uma demonstração dele está um pouco além dos objetivos propostos para um texto como este. Uma possível "constatação" das afirmações feitas passa por ações já mencionadas neste texto (página **39**), a saber, uma estratégica mudança de ações quantitativas e determinísticas (¿"precisas"?) por ações qualitativas e geométricas. Esta é uma pretensiosa proposta de mudança de "paradigma" de ensino de matemática e que já ocorreu na ciência há mais de **100** anos (final do século **19**).

• Uma demonstração do caso $1 < k < 3$ pode ser vista em "An introduction to chaotic dynamical system", páginas **32** e **33**.

3) $k \geq 3$. Daqui em diante, as "coisas" começam a ficar "mais complicadas".

• Segundo Robert L. Devaney, quando **k** "cresce" passando por $k = 3$, a estrutura dos pontos periódicos dos sistemas gerados por f_k passa por uma **bifurcação**. Uma **bifurcação** pode ser entendida, *grosso modo*, como sendo uma mudança na "estrutura" dos pontos periódicos dos sistemas.

• Segundo Nelson Fiedler-Ferrara e Carmen P. Cintra do Prado, em Caos, uma Introdução, o aparecimento do **Caos** em sistemas dinâmicos está **sempre** ligado à ocorrência de algum tipo de **bifurcação**. Segundo esses autores, o tema **bifurcação** é bastante extenso e complexo. Qualquer tentativa de abordagem formal desse tema neste texto foge aos objetivos propostos para ele.

• O tipo de **bifurcação** ocorrida para o mapa logístico, quando o parâmetro **k** cresce e "passa" pelo valor **3**, é denominado **bifurcação de duplicação de período** (**bifurcação "flip"**; a palavra "flip" poderia ser traduzida, sem muito rigor, por "mover, ou girar com movimento brusco").

• Para uma ilustração desse tipo de **bifurcação**, podem ser convenientes algumas representações gráficas das funções $f_k^2(x)$, quando **k** possui valores "próximos" de **3**. Veja Figura **24**.

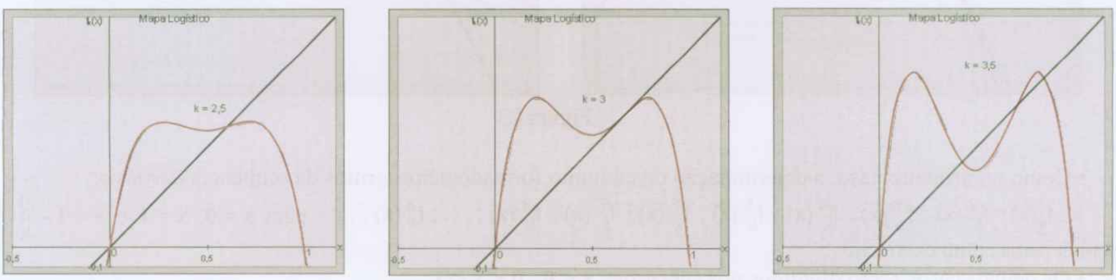


Figura 24

• Observando as três representações gráficas apresentadas na Figura **24**, é possível observar que:

° para $k < 3$, $f_k^2(x)$ possui um único ponto fixo não nulo;

° para $k = 3$, $f_3^2(x)$ também possui um único ponto fixo, porém a diagonal Δ "parece" ser tangente à sua representação gráfica no ponto fixo de abscissa $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ [15], o que "parece" não acontecer para $k < 3$;

° para $k > 3$, $f_k^2(x)$ possui dois pontos fixos, ou seja, $f_k(x)$ passa a ter "dois novos" pontos periódicos de período primo **2**. Ocorreu uma "mudança" na estrutura dos pontos periódicos de $f_k(x)$. É esse tipo de "mudança" que caracteriza uma **bifurcação**.

• Com o crescimento de **k** além de **3**, então o sistema "sofre" novas **bifurcações de período,** resultando em uma seqüência de **bifurcações** do tipo **"flip"**.

• Veja as representações gráficas de $f_k(x)$, de Δ e da seqüência *iterativa*:

$$p_k;\ f_k(p_k);\ f_k^2(p_k);\ f_k^3(p_k);\ ....;\ f_k^{200}(p_k),$$

para:

° $k = 3{,}5$ e $p_{3,5} = 1 - \frac{1}{3,5}$;

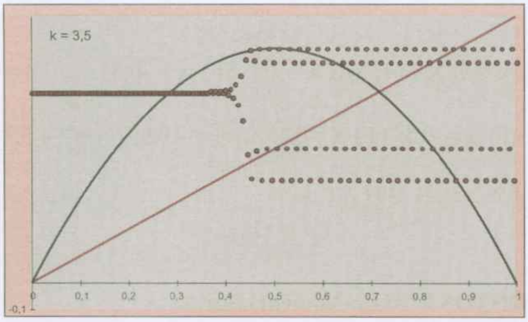


Figura 25

° $k = 3{,}7$ e $p_{3,7} = 1 - \frac{1}{3,7}$;

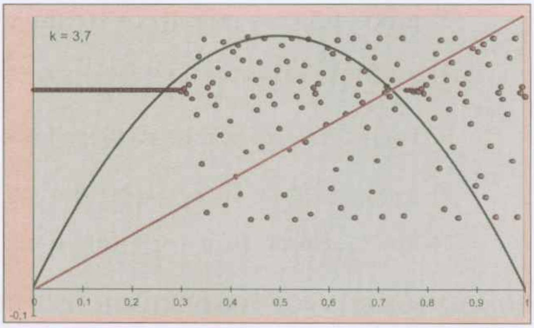


Figura 26

° $k = 3{,}9$ e $p_{3,9} = 1 - \frac{1}{3,9}$;

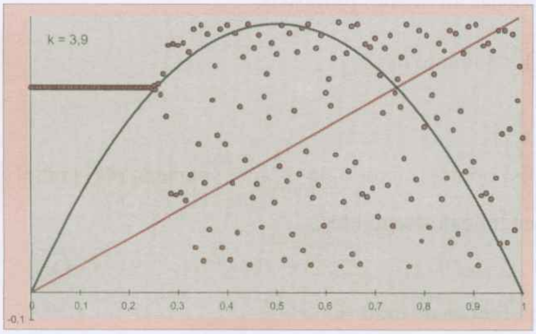


Figura 27

• Para $k > 3{,}9$ ocorrem seqüências **não periódicas** [com "**comportamentos estocásticos**", de acordo com o que definiu **Ian Stwart** (página **1**)].

• Para $k = 3{,}9825$ e $x = 0{,}7$ obtém-se:

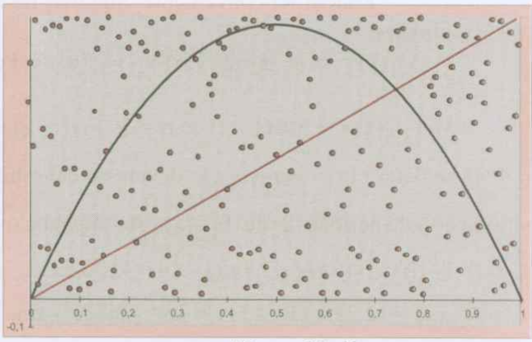


Figura 28 [16]

[15] Afirmar que Δ é tangente à representação gráfica de $f_3^2(x)$ significa que a "inclinação" da curva no "ponto" de abscissa $\frac{2}{3}$ é de **45°**, ou seja, que a derivada de $f_3^2(x)$ no "ponto" $x = \frac{2}{3}$ é **1**.

[16] As quatro últimas informações sobre fk(x), com $k \geq 3$, podem ser vistas em Caos: uma Introdução, na página 111.

4) **k > 4**. Aqui, outras situações distintas e "complicadas" podem ocorrer, pois, nesses casos, existem valores para **x** no intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$ para os quais valores de $\mathbf{f_k(x)}$ "escapam" do intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$. Como conseqüência, existirão outros valores no intervalo $\mathbf{0 < x < 1}$ para os quais valores de $\mathbf{f_k^2(x)}$ também "escapam" de $\mathbf{0 < x < 1}$. E isso ¡pode não ter fim [17]!

Por causa das dificuldades dês\e caso, não faremos maiores comentários.

ÓRBITA AVANÇADA (FORWARD ORBIT): Definição.

Dada uma função **f** e a seqüência "iterativa": p, f (p), $f^2(p)$, $f^3(p)$, ... , $f^n(p)$, ... , com **p** um valor possível para **x**, o seu conjunto "imagem" (formado pelos termos **p, f (p),** $\mathbf{f^2(p)}$, $\mathbf{f^3(p)}$, **...** , $\mathbf{f^n(p)}$, **...**) denomina-se **Órbita Avançada** (**Forward Orbit**) de **p**. Esse conjunto será anotado por $\mathbf{O^+(p)}$.

De posse do conceito de **Órbita Avançada** de um valor **p** do domínio de uma função **f,** são possíveis algumas atividades sob a forma de exercícios, tais como:

E15) Para cada função f seguinte e para cada x destacado, determine $O^+(x)$ correspondente:

1) $\Delta(x) = x$, para todo valor possível x de seu domínio.

2) $\Delta_{-1}(x) = -x$, para: (i) $x = 0$; (ii) para $x \neq 0$.

3) $g_1(x) = 0{,}5.x + 8$ para: (i) $x = 16$; (ii) $x = 0$.

4) $g_2(x) = x^2 - 1$ para: (i) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = 0$, $x = -1$; (ii) $x = -2$; (iii) $x = -0{,}5$.

5) $f_2(x) = 2.x.(1 - x)$ para: (i) $x = 0$, $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$; (ii) $x = -0{,}5$; (iii) $x = 0{,}25$; (iv) $x = 0{,}9$; (v) $x = 1{,}5$.

6) $g_3(x) = x^3$ para: (i) $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$; (ii) $x = -1{,}5$; (iii) $x = 1{,}5$.

7) $f(\alpha) = 2.\alpha$ para: (i) $\alpha = \frac{\pi}{5}$; (ii) $\alpha = 3$.

CONJUNTOS DOS PONTOS PERIÓDICOS E DOS PONTOS FIXOS: Nomenclaturas.

O conjunto dos pontos periódicos (não necessariamente de período primo) de ordem **n** de **f** será anotado por $\mathbf{Per_n(f)}$ e o conjunto dos pontos fixos de **f** será anotado por **Fix(f)**.

São possíveis algumas atividades sob a forma de exercícios, tais como:

E16) Para cada função f seguinte, determine Fix(f) e $Per_n(f)$ nos casos indicados:

1) $\Delta(x) = x$ e $n = 1$; 2) $\Delta_{-1}(x) = -x$ e $n = 2$; 3) $g_1(x) = 0{,}5.x + 8$ e $n = 2$; 4) $g_2(x) = x^2 - 1$ e $n = 2$; 5) $f_{3,5}(x) = 3{,}5.x.(1 - x)$ e $n = 2$; 6) $g_3(x) = x^3$ e $n = 2$; 7) $f(\alpha) = 2.\alpha$ e $n = 4$.

Podem ser convenientes algumas resoluções das atividades propostas.

• **Resoluções:**

2) $\Delta_{-1}(x) = -x$ e $n = 2$: $Fix(\Delta_{-1}) = \{0\}$ e $Per_2(f) =$ domínio de Δ_{-1};

5) $f_{3,5}(x) = 3{,}5.x.(1 - x)$ e $n = 2$: $Fix(f_{3,5}) = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$;

Para se determinar $Per_2(f_{3,5})$, devem-se determinar o(s) ponto(s) fixo(s) de $f_{3,5}^2(x)$, ou seja, o(s) ponto(s) periódico(s) de período 2 de $f_{3,5}(x)$. Acompanhe os procedimentos seguintes:

$$f_{3,5}^2(x) = f_{3,5}[f_{3,5}(x)] = f_{3,5}[3{,}5.x.(1 - x)] = 3{,}5.[3{,}5.x.(1 - x)].[1 - 3{,}5.x.(1 - x)] = 3{,}5.(3{,}5.x - 3{,}5.x^2).(1 - 3{,}5.x + 3{,}5.x^2) \therefore$$

$$\therefore\ f_{3,5}^2(x) = 12{,}25.x.(1 - 4{,}5.x + 7.x^2 - 3{,}5.x^3)$$, que é uma função de grau 4.

Admitindo que $f_{3,5}^2(x)$ tenha um ponto fixo p, então: $f_{3,5}^2(p) = 12{,}25.p.(1 - 4{,}5.p + 7.p^2 - 3{,}5.p^3) = p$, que é uma equação de grau 4.

De início, é possível perceber que $p = 0$ é uma de suas soluções [0 é ponto fixo de $f_{3,5}(x)$ e, portanto, é ponto periódico de período 2].

Como $p_{3,5} = 1 - \frac{1}{3{,}5} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ é outro ponto fixo de $f_{3,5}(x)$, então $\frac{5}{7}$ é outro de seus pontos periódicos

[17] Para alguns detalhes adicionais, veja "An introduction to chaotic dynamical system", páginas **34** e **35**.

de período 2, ou seja, $\frac{5}{7}$ deverá ser solução da última equação. Essa afrmação poderá ser comprovada diretamente ao se atribuir o valor $\frac{5}{7}$ a p na última equação. Acompanhe:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \left[1 - \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{7} + 7 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3\right] = \frac{35}{4} \cdot \left[1 - \frac{45}{14} + \frac{25}{7} - \frac{125}{98}\right] = \frac{35}{4} \cdot \frac{98 - 315 + 350 - 125}{98} = \frac{35}{4} \cdot \frac{8}{98} = \frac{5}{7}.$$

Como já possuímos duas soluções da equação: $12{,}25.p.(1 - 4{,}5.p + 7.p^2 - 3{,}5.p^3) = p$, então pode ser possível obter suas duas outras soluções, caso existam.

A última equação pode ser reescrita das seguintes formas:

$$42{,}875.p^4 - 85{,}75.p^3 + 55{,}125.p^2 - 11{,}25.p = 42{,}875.p.\left(p - \frac{5}{7}\right).(p - \text{solução1}).(p - \text{solução2}) = 0.$$

Um procedimento possível aqui, e que, eventualmente, poderia ser acessível a estudantes da série fnal do ensino médio, é o seguinte:

Dividir o polinômio $P = 42{,}875.p^3 - 85{,}75.p^2 + 55{,}125.p - 11{,}25$ pelo polinômio $D = p - \frac{5}{7}$.

$$\begin{array}{r|l}
42{,}875.p^3 - 85{,}75.p^2 + 55{,}125.p - 11{,}25 & p - \frac{5}{7} \\ \hline
-42{,}875.p^3 + 30{,}625.p^2 \qquad\qquad\qquad & 42{,}875.p^2 - 55{,}125.p + 15{,}75 \\
- 55{,}125.p^2 + 55{,}125.p \qquad\quad & \\
55{,}125.p^2 - 39{,}375.p \qquad\quad & \\
15{,}75.p - 11{,}25 & \\
-15{,}75.p + 11{,}25 & \\
0 \qquad &
\end{array}$$

A determinação das outras duas soluções da equação original passa pela determinação das soluções da equação: $42{,}875.p^2 - 55{,}125.p + 15{,}75 = 0$, que fca como exercício. As soluções aproximadas encontradas foram: 0,428571428573 e 0,857142857146.

Portanto: $Per_2(f_{3,5}) = \{0; 0{,}428571428573; 0{,}714285714286; 0{,}857142857146\}$.

• **Comentários:**

Essas informações podem ser anexadas à terceira representação gráfca da Figura **24**. Veja a seguir:

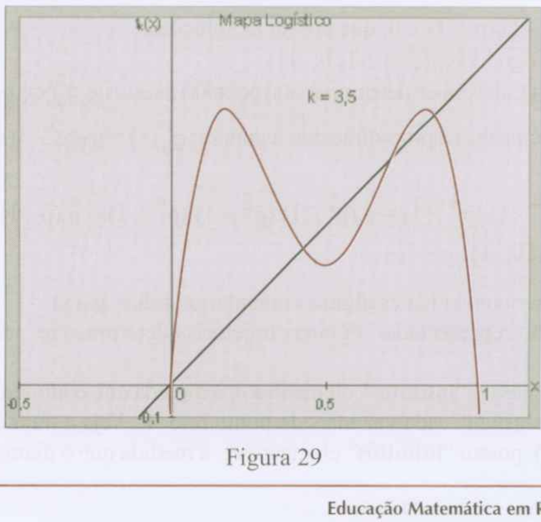


Figura 29

Figura 29

O sistema dinâmico gerado por $\mathbf{f_{3,5}(x)}$ e $\mathbf{x_0 \cong 0{,}428571428573}$ produz a seqüência periódica: $x_0; x_1; x_0; x_1; x_0; x_1; \ldots$, na qual $\mathbf{x_1 = f_{3,5}(x_0) \cong 0{,}857142857146}$. A conseqüência gráfica disso pode ser vista na figura seguinte:

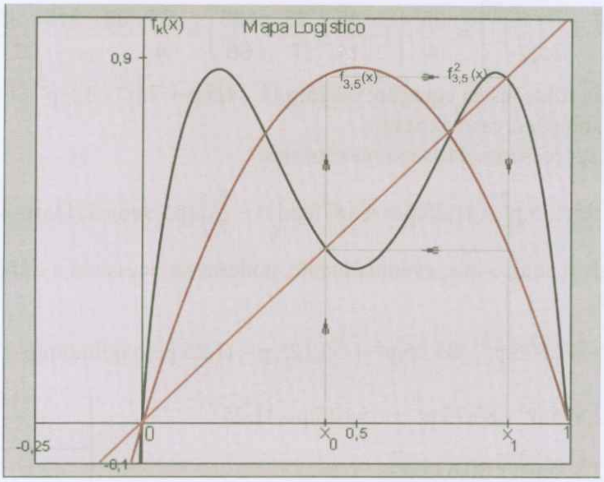


Figura 30

Na Figura **30,** é possível observar uma trajetória que começa em $(\mathbf{x_0; x_0})$, segue para $(\mathbf{x_0; f_{3,5}(x_0)) = (x_0; x_1)}$, para $(\mathbf{f_{3,5}(x_0); f_{3,5}(x_0)) = (x_1; x_1)}$, para $(\mathbf{f_{3,5}(x_0); f^2_{3,5}(x_0)) = (x_1; x_0)}$, para $(\mathbf{f^2_{3,5}(x_0); f^2_{3,5}(x_0)) = (x_0; x_0)}$, e, daí em diante, a coisa toda começa a se repetir.

Essa trajetória constitui um **ciclo limite atrativo de período 2**.

• A determinação de $\mathbf{Per_2(f_{3,5})}$, como se pôde observar, é muito trabalhosa e pode ser considerada "pouco adequada" para os ensinos fundamental e médio quando vista sob o ponto de vista quantitativo.

Uma atividade como essa poderia, eventualmente, ser colocada naqueles ensinos, caso fosse possível trabalhar, em salas de aula, numa forma **qualitativa e geométrica**. Para isso, seria conveniente a utilização de recursos computacionais, tais como a utilização de algum tipo de planilha eletrônica. **¿Um sonho?**

As figuras exibidas neste texto foram "confeccionadas" em uma dessas planilhas. Mais adiante será exibido um (sub) texto na forma de **apêndice** sobre a "confecção" de representações gráficas de funções.

6) $g_3(x) = x^3$ e $n = 2$. Para obter $\text{Fix}(g_3)$, necessita-se enfrentar a equação: $p^3 = p$, ou seja: $p^3 - p = p.(p^2 - 1) = p.(p - 1).(p + 1) = 0$, que possui as soluções:

$p = -1$, $p = 0$ e $p = 1$. Logo: $\text{Fix}(g_3) = \{-1; 0; 1\}$.

Para se determinar $\text{Per}_2(g_3)$, devem-se determinar o(s) ponto(s) fixo(s) de $g_3^2(x)$, ou seja, o(s) ponto(s) periódico(s) de período 2 de $g_3(x)$. Acompanhe os procedimentos seguintes: $g_3^2(x) = g_3(x^3) = (x^3)^3 = x^9$ e $g_3^2(p) = p^9 = p$.

Logo:

$p^9 - p = p.(p^8 - 1) = p.(p^4 - 1).(p^4 + 1) = p.(p^2 - 1).(p^2 + 1).(p^4 + 1) = p.(p - 1).(p + 1).(p^2 + 1).(p^4 + 1) = 0.$

Portanto: $\text{Per}_2(g_3) = \{-1; 0; 1\}$.

• **Comentários:** Podem ser convenientes alguns comentários sobre $\mathbf{g_3(x)}$.

• Na figura seguinte, estão representadas algumas trajetórias determinadas pela função $\mathbf{g_3(x)}$ e por alguns valores de seu domínio.

• Se $\mathbf{x > 1}$, então $\mathbf{O^+(x)}$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se afastam" cada vez mais do ponto fixo **1**. Veja a trajetória de $\mathbf{x_0}$ na Figura **31**.

• Se $\mathbf{x < -1}$, então $\mathbf{O^+(x)}$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se afastam" cada vez mais do ponto fixo **-1**. Veja a trajetória de x_1 na Figura **31**.

• Se $-1 < x < 1$, então $O^+(x)$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se aproximam" cada vez mais do ponto fixo **0**.

• Veja as trajetórias de x_2 e x_3 na Figura 31.

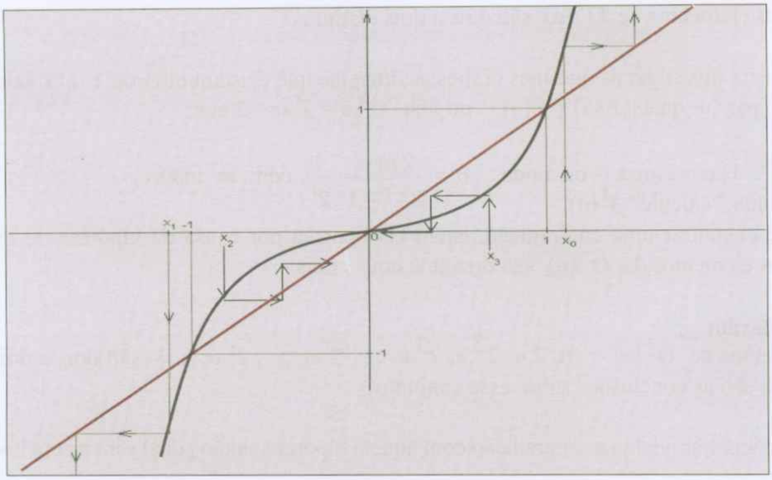


Figura 31

7) $f(\alpha) = 2.\alpha$ e $n = 4$. $Fix(f) = \{2.k.\pi | k = 0, 1, 2, ... \} = \{0\}$.

Para se determinar $Per_4(f)$, devem-se determinar o(s) ponto(s) fixo(s) de $f^4(\alpha)$, ou seja, o(s) ponto(s) periódico(s) de período 4 de $f(\alpha)$.

O ponto fixo 0 é ponto periódico de período 4. Todo ponto periódico de período 2 também é ponto periódico de período 4, pois, se α é ponto periódico de período 2, então:

$f^4(\alpha) = f^2(f^2(\alpha)) = f^2(\alpha) = \alpha$.

Questão para reflexão:

¿Um ponto periódico de período primo 3 pode ser ponto periódico de período 4?

Logo, de acordo com o resultado obtido na página 37, podem-se escrever os seguintes resultados:

° Ponto Fixo: $\alpha_{1,0} = 0$;

° Pontos Periódicos de período 2: $n = 2$ e $k = 0, 1, 2$:

$$\clubsuit \ \alpha_{2,0} = 0;\ \alpha_{2,1} = \frac{2.\pi}{3};\ \alpha_{2,2} = \frac{4.\pi}{3};$$

° Pontos Periódicos de período 4: $n = 4$ e $k = 0, 1, 2, 3, ..., 13, 14$:

$$\clubsuit \ \alpha_{4,0} = 0;\ \alpha_{4,1} = \frac{2.\pi}{15};\ \alpha_{4,2} = \frac{4.\pi}{15};\ \alpha_{4,3} = \frac{6.\pi}{15};\ ....;\ \alpha_{4,13} = \frac{26.\pi}{15};\ \alpha_{4,14} = \frac{28.\pi}{15}.$$

$$\text{Portanto: } Per_4(f) = \left\{0;\ \frac{2.\pi}{15};\ \frac{4.\pi}{15};\ \frac{6.\pi}{15};\ ...;\ \frac{26.\pi}{15};\ \frac{28.\pi}{15};\ \frac{2.\pi}{3};\ \frac{4.\pi}{3}\right\}$$

• **Comentários:** Algumas propostas e alguns comentários sobre $f(\alpha)$:

• E17) Escreva os elementos de $Per_4(f)$ em ordem crescente.

• O resultado obtido na página **37** permite concluir que, se $\alpha = \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$, com **n** inteiro, $\mathbf{n \geq 1}$ e **k** inteiro, $\mathbf{k = 0, 1, 2, ..., 2^n - 2}$, então α é **ponto periódico de período n**.

• As questões que se deseja colocar aqui, para trazer de volta o assunto que "motivou" este texto, a saber, a "caoticidade" de sistemas dinâmicos, são as seguintes:

Questões para reflexão:

¿Qual é a conclusão sobre a órbita $O^+(\alpha) = \{\alpha, 2.\alpha, 2^2.\alpha, 2^3.\alpha, \dots, 2^r.\alpha, \dots, 2^s.\alpha, \dots\}$, se $\alpha \neq \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$, nas condições já mencionadas para k e n?

¿Será que os elementos de $O^+(\alpha)$ são dois a dois distintos?

• Caso você queira investigar as questões propostas, imagine que existam inteiros **r** e **s** tais que **r > 0, s > 0** e **r < s** **(s - r > 0)** para os quais: $f^s(\alpha) = f^r(\alpha)$, ou seja, $2^s.\alpha = 2^r.\alpha + 2.m.\pi$,

ou ainda $2^r.(2^{s-r} - 1).\alpha = 2.m.\pi$, ou ainda $\alpha = \dfrac{2.m.\pi}{2^{s-r} - 1} \cdot \dfrac{1}{2^r}$, com **m** inteiro.

• Em seguida, "calcule" $\mathbf{f^r}(\alpha)$.

• Se você encontrar uma contradição, então ela ocorreu por causa da hipótese de que $\mathbf{f^r}(\alpha) = \mathbf{f^s}(\alpha)$. Daí decorre que os elementos de $\mathbf{O^+}(\alpha)$ são distintos dois a dois.

Questão para reflexão:

Se os elementos de $O^+(\alpha) = \{\alpha, 2.\alpha, 2^2.\alpha, 2^3.\alpha, \dots, 2^r.\alpha, \dots, 2^s.\alpha, \dots\}$ são dois a dois distintos, então ¿quais são as conclusões sobre esse conjunto?

• Se você **não** encontrar qualquer contradição com aquela hipótese, então ¿qual será a conclusão sobre $\mathbf{O^+}(\alpha)$?

• Pode ser instrutivo ver uma tabela que contém alguns termos de $\mathbf{O^+}(\alpha)$ para algum $\alpha \neq \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$ (feita na planilha **Excel™** da **Microsoft**).

Microsoft Excel - f(x)=2.x.xls

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda — Digite uma pergunta

B1 — 0,1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	α =	0,1	k =	2	n =	5									
2	0,1	3,50378	2,4611	4,85243	3,22717	2,46389	4,57608	1,26906	3,06947	3,96054	4,76032	3,64577	2,39313	2,19642	3,09105
3	0,2	0,72437	4,9222	3,42168	0,17116	4,92779	2,86898	2,53811	6,13893	1,63789	3,23746	1,00835	4,78627	4,39284	6,18209
4	0,4	1,44873	3,56121	0,56018	0,34232	3,57239	5,73795	5,07622	5,99468	3,27579	0,19173	2,01671	3,28935	2,5025	6,081
5	0,8	2,89746	0,83924	1,12036	0,68465	0,86159	5,19272	3,86926	5,70617	0,26839	0,38346	4,03341	0,29551	5,005	5,87881
6	1,6	5,79492	1,67849	2,24072	1,3693	1,72319	4,10225	1,45533	5,12916	0,53678	0,76691	1,78364	0,59102	3,72682	5,47443
7	3,2	5,30666	3,35697	4,48145	2,73859	3,44637	1,92132	2,91067	3,97513	1,07356	1,53382	3,56728	1,18204	1,17046	4,66567
8	0,11681	4,33014	0,43076	2,67971	5,47718	0,60956	3,84265	5,82134	1,66707	2,14711	3,06765	0,85138	2,36407	2,34092	3,04816
9	0,23363	2,37709	0,86153	5,35942	4,67118	1,21912	1,40211	5,35949	3,33413	4,29423	6,13529	1,70276	4,72815	4,68185	6,09632
10	0,46726	4,75417	1,72305	4,43566	3,05918	2,43824	2,80423	4,43579	0,38508	2,30527	5,9874	3,40551	3,17311	3,08051	5,90945
11	0,93452	3,22516	3,4461	2,58813	6,11835	4,87647	5,60845	2,5884	0,77016	4,61054	5,69161	0,52784	0,06304	6,16103	5,53571
12	1,86904	0,16714	0,60902	5,17627	5,95352	3,46976	4,93372	5,1768	1,54032	2,9379	5,10004	1,05567	0,12608	6,03887	4,78823
13	3,73807	0,33428	1,21804	4,06935	5,62386	0,65634	3,58425	4,07042	3,08064	5,8758	3,91689	2,11134	0,25216	5,79455	3,29327
14	1,19296	0,66857	2,43607	1,85552	4,96453	1,31268	0,88532	1,85765	6,16127	5,46841	1,5506	4,22269	0,50432	5,30591	0,30336
15	2,38591	1,33713	4,87215	3,71104	3,64588	2,62537	1,77065	3,7153	6,03936	4,65363	3,1012	2,16219	1,00863	4,32864	0,60673
16	4,77182	2,67427	3,46111	1,1389	1,00858	5,25074	3,5413	1,14741	5,79554	3,02407	6,2024	4,32437	2,01727	2,37409	1,21345
17	3,26045	5,34853	0,63904	2,27779	2,01716	4,21829	0,79941	2,29481	5,30789	6,04814	6,12162	2,36556	4,03453	4,74817	2,4269
18	0,23772	4,41388	1,27807	4,55559	4,03431	2,1534	1,59881	4,58962	4,3326	5,81309	5,96005	4,73112	1,78587	3,21316	4,85381
19	0,47545	2,54457	2,55614	2,82799	1,78544	4,30679	3,19762	2,89606	2,38201	5,343	5,63692	3,17906	3,57175	0,14314	3,42443
20	0,9509	5,08913	5,11229	5,65598	3,57087	2,3304	0,11206	5,79212	4,76402	4,40282	4,99065	0,07493	0,86031	0,28628	0,56567
21	1,9018	3,89508	3,94139	5,02878	0,85856	4,66079	0,22412	5,30105	3,24485	2,52245	3,69811	0,14986	1,72063	0,57255	1,13134
22	3,80359	1,50697	1,59959	3,77438	1,71713	3,0384	0,44823	4,31891	0,20652	5,04489	1,11303	0,29971	3,44126	1,1451	2,26268
23	1,324	3,01394	3,19919	1,26558	3,43425	6,0768	0,89646	2,35463	0,41304	3,8066	2,22605	0,59942	0,59932	2,29021	4,52537
24	2,648	6,02788	0,11519	2,53115	0,58532	5,87041	1,79293	4,70925	0,82608	1,33001	4,4521	1,19884	1,19865	4,58042	2,76755
25	5,29601	5,77257	0,23037	5,0623	1,17064	5,45764	3,58586	3,13532	1,65216	2,66002	2,62102	2,39768	2,3973	2,87765	5,5351
26	4,30883	5,26196	0,46074	3,84142	2,34128	4,63209	0,88853	6,27063	3,30433	5,32003	5,24205	4,79537	4,7946	5,7553	4,78701
27	2,33448	4,24074	0,92148	1,39966	4,68255	2,98099	1,77706	6,25808	0,32547	4,35688	4,20091	3,30755	3,30601	5,22741	3,29084
28	4,66896	2,1983	1,84297	2,79932	3,08192	5,96199	3,55412	6,23297	0,65093	2,43057	2,11864	0,33192	0,32884	4,17164	0,29849
29	3,05474	4,3966	3,68593	5,59864	6,16383	5,64079	0,82506	6,18276	1,30186	4,86115	4,23727	0,66383	0,65769	2,06009	0,59698
30	6,10947	2,51001	1,08868	4,91409	6,04448	4,99839	1,65011	6,08233	2,60373	3,43911	2,19136	1,32767	1,31537	4,12018	1,19396
31	5,93576	5,02003	2,17735	3,54499	5,80577	3,7136	3,30022	5,88147	5,20746	0,59504	4,38271	2,65534	2,63075	1,95718	2,38791
32	5,58833	3,75687	4,3547	0,80679	5,32836	1,14402	0,31726	5,47976	4,13173	1,19008	2,48224	5,31067	5,26149	3,91435	4,77583
33	4,89348	1,23055	2,42622	1,61359	4,37354	2,28804	0,63453	4,67633	1,98027	2,38016	4,96448	4,33816	4,2398	1,54552	3,26847
34															
35															

Plan1 / Plan2 / Plan3

Figura 32

• A leitura da última tabela obedece à seguinte seqüência:

A2	A3	...	A33	B2	B3	...	B33	C2	...	O2	...	O33
0,1	f (0,1)	...	$f^{32}(0,1)$	$f^{33}(0,1)$	$f^{34}(0,1)$	...	$f^{65}(0,1)$	$f^{66}(0,1)$	...	$f^{462}(0,1)$	...	$f^{494}(0,1)$

• Caso haja interesse, seguem alguns "procedimentos" que podem ser utilizados para confeccionar a planilha:

° Digite na célula A1 o texto "α =" (fonte Symbol) e na célula B1, o número 0,1;

° Digite na célula A2 a "fórmula": "=b1", ou "=B1";

° Digite na célula A3 a "fórmula":

=SE(E(A2<=2*PI();2*A2<=2*PI());2*A2;SE(E(A2<=2*PI();2*A2>2*PI());
2*A2-2*PI();SE(E(A2>2*PI();2*(A2-2*PI())<=2*PI());2*A2-4*PI();2*A2-6*PI())))

° Na última fórmula:

- "<=" significa "≤";
- "PI()" significa "π";
- O esquema "SE(.... ; .... ; ....)" significa "Se .... , então .... , caso contrário .... ";
- "O esquema "E(.... ; ....)" significa " .... e .... ";

° A última fórmula pode ser interpretada simplificadamente da seguinte forma:
Se (A2 ≤ 2.π e 2.A2 ≤ 2.π), então A3 = 2.A2; caso contrário, se (A2 ≤ 2.π e 2.A2 > 2.π), então A3 = 2.A2 - 2.π; caso contrário, se (A2 > 2.π e 2.(A2 - 2.π) ≤ 2.π), então A3 = 2.A2 - 4.π; caso contrário, A3 = 2.A2 - 6.π;

° Copie a última fórmula na região que vai da célula A3 até a célula O33;

° Copie a última fórmula na célula B2, trocando B1 por A33;

° Copie a "nova" fórmula em B2 na célula C2 até a célula O2;

• Troque o valor **0,1** da célula **B1** por outros valores (entre **0** e **2.π**) e verifique sua hipótese para as últimas

Questões para reflexão

• O "mapeamento" **f(α) = 2.α**, definido em $\mathbf{S^1}$ (conjunto definido nas páginas **35** e **36**), assim como o **mapa logístico**, possui algumas características que nos fazem "suspeitar" do seu caráter "caótico", pois, se $\alpha \neq \dfrac{2.k.\pi}{2^n - 1}$, nas condições já mencionadas para **n** e **k**, então a órbita:

$O^+(\alpha) = \{\alpha, 2.\alpha, 2^2.\alpha, 2^3.\alpha, \ldots, 2^r.\alpha, \ldots, 2^s.\alpha, \ldots\}$

"parece" possuir infinitos elementos dois a dois distintos, o que significaria que $\mathbf{O^+(\alpha)}$ é **denso** em $\mathbf{S^1}$. Como conseqüência, **f(α)** possui um **conjunto enumerável** de **pontos periódicos**.

AINDA SOBRE ÓRBITAS DE UMA FUNÇÃO.

Questão para reflexão:

¿Por que o conceito de órbita de uma função f(x), para algum valor p de seu domínio, apresentada na página 47, recebeu a qualificação "avançada" ("forward")?

Uma resposta plausível à questão proposta é a seguinte: "a qualificação foi feita porque deve existir algum outro tipo de órbita de uma dada função".

Para "explorar" esse "novo filão", podem ser convenientes algumas propostas na forma de exercícios.

E18) Para cada função f seguinte, determine:

(i) A função inversa de f (anotada por f^{-1}); (ii) $Fix(f^{-1})$; (iii) $Per_n(f^{-1})$ nos casos indicados:

1) $\Delta(x) = x$ e $n = 1$; 2) $\Delta_{-1}(x) = -x$ e $n = 2$; 3) $g_1(x) = 0{,}5.x + 8$ e $n = 2$; 4) $g_3(x) = x^3$ e $n = 2$; 5) $f(\alpha) = 2.\alpha$ e $n = 4$.

Podem ser convenientes algumas resoluções das atividades propostas.

• Resoluções:

3) $g_1(x) = 0{,}5.x + 8$: (i) Sua inversa é: $g_1^{-1}(x) = 2.x - 16$; (ii) $Fix(g_1^{-1}) = Fix(g_1) = \{16\}$.
(iii) Para obter $Per_2(g_1^{-1})$, basta obter $(g_1^{-1})^2(x)$ e ir em busca da(s) solução(ões) da equação: $(g_1^{-1})^2(p) = p$.
A continuação dessa resolução será deixada como exercício.

4) $g_3(x) = x^3$: (i) Sua inversa é: $g_3^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; (ii) Para obter $Fix(g_1^{-1})$, basta ir em busca da(s) solução(ões) da equação $\sqrt[3]{p} = p$ que é equivalente à equação $p^3 = p$. Sua resolução fica como exercício.

(iii) Para obter $Per_2(g_3^{-1})$, basta ir em busca da(s) solução(ões) da equação $\sqrt[9]{p} = p$, que é equivalente à equação $p^9 = p$. Sua resolução também fica como exercício.

• Comentários:

• Pode ser conveniente exibir uma figura para a função $g_3^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Se:

° $x < -1$, então $O^-(x)$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se aproximam" cada vez mais do ponto fixo **-1**. Se $x > 1$, então $O^-(x)$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se aproximam" cada vez mais do ponto fixo **1**. Veja as trajetórias de x_0 e de x_1 na Figura **33**.

° $-1 < x < 0$, então $O^-(x)$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se aproximam" cada vez mais do ponto fixo **-1**. Se $0 < x < 1$, então $O^-(x)$ possui "**infinitos**" elementos e, à medida que o número de passos *iterativos* aumenta, os termos da seqüência "se aproximam" cada vez mais do ponto fixo **1**. Veja as trajetórias de x_2 e de x_3 na Figura **33**.

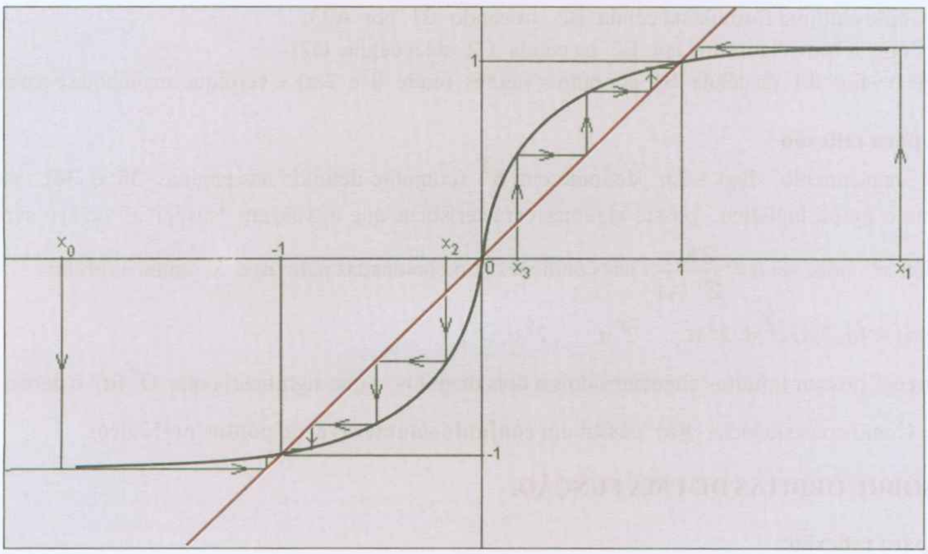


Figura 33

• Iremos propor, aqui, uma conveniente adaptação de simbologia aos termos das seqüências *iterativas* que podem ser obtidas nos itens **3)** e **4)** do exercício **E18**, com o objetivo de "ampliar" o conceito de "órbita avançada" que foi definida na página **47**. Acompanhe:

° Nos itens **3** e **4**, para as funções $g_1^{-1}(x) = 2.x - 16$ e $g_3^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e para um valor possível **p** para **x**, podemos escrever as seguintes seqüências *iterativas*:

$p;\ g_1^{-1}(p);\ (g_1^{-1})^2(p);\ (g_1^{-1})^3(p);\ (g_1^{-1})^4(p);\ ....\ ;\ (g_1^{-1})^n(p);\ ....$ e

$p;\ g_3^{-1}(p);\ (g_3^{-1})^2(p);\ (g_3^{-1})^3(p);\ (g_3^{-1})^4(p);\ ....\ ;\ (g_3^{-1})^n(p);\ ....$.

° A "conveniente" mudança de simbologia é a seguinte: representar

$(g_1^{-1})2(p)$ por $g_1^{-2}(p)$, $(g_1^{-1})3(p)$ por $g_1^{-3}(p)$, ... , $(g_1^{-1})n(p)$ por $g_1^{-n}(p)$, ... e

$(g_3^{-1})2(p)$ por $g_3^{-2}(p)$, $(g_3^{-1})3(p)$ por $g_3^{-3}(p)$, ... , $(g_3^{-1})n(p)$ por $g_3^{-n}(p)$, ...

° Nessas condições, os conjuntos:

$\{p,\ g_1^{-1}(p),\ g_1^{-2}(p),\ g_1^{-3}(p),\ ....\ ,\ g_1^{-n}(p),\ ....\ \}$ e $\{p,\ g_3^{-1}(p),\ g_3^{-2}(p),\ g_3^{-3}(p),\ ....\ ,\ g_3^{-n}(p),\ ....\ \}$

serão denominados **Órbita Para Trás** (**Backward Orbit**) de **p**. Esse conjunto será anotado por **$O^-(p)$**.

ÓRBITA PARA TRÁS (BACKWARD ORBIT) E ÓRBITA: Definições

Dada uma função **f**, que possui inversa $\mathbf{f^{-1}}$ e a seqüência "iterativa": p, $f^{-1}(p)$, $f^{-2}(p)$, $f^{-3}(p)$, ... , $f^{-n}(p)$, ... , com **p** um valor possível para **x**, o seu conjunto "imagem" (formado pelos termos **p, f(p), $f^2(p)$, $f^3(p)$, ... , $f^n(p)$, ...**) denomina-se **Órbita Para Trás** (**Backward Orbit**) de **p**. Esse conjunto será anotado por **$O^-(p)$**. Nesse caso, a reunião de **$O^+(p)$** com **$O^-(p)$** será anotada por **O(p)** que se denomina **Órbita** de **p**.

SOBRE "PONTOS EVENTUALMENTE PERIÓDICOS" DE UMA FUNÇÃO.

• **Exemplo 3: Sobre pontos eventualmente periódicos.**

1) A função **$f(x) = x^2$** tem como pontos fixos **0** e **1**. Porém, é possível notar que **f(-1) = 1** e: $f(-1) = f^2(f(-1)) = f^3(f(-1)) = ... = f^n(f(-1)) = ... = 1$, ou seja, embora **-1** não seja **ponto fixo**, ou **periódico**, sua imagem por **f**, **f(-1)**, é **ponto fixo**. Assim, **-1** é **ponto eventualmente fixo** (**eventualmente periódico** de período **1**).

2) Retomemos a função **$f_4(x) = 4.x.(1 - x)$**, apresentada anteriormente.

• Se **x = 1**, então: $x = 1$; e $f_4(1) = f_4^2(1) = f_4^3(1) = ... = f_4^n(1) = ... = 0.$

Como em **1)**, **1** é um **ponto eventualmente fixo** de **$f_4(x)$**.

• O valor para **x** que maximiza **$f_4(x)$** é $\frac{1}{2}$. Note que, se adotarmos **p** = $\frac{1}{2}$, então:

$$p = \frac{1}{2};\ f_4(p) = 1 \text{ e } f_4^2(p) = f_4^3(p) = ... = f_4^n(p) = ... = 0.$$

Nesse caso, $\frac{1}{2}$ é **ponto eventualmente periódico de período 2**.

• Existem dois valores para **x** para os quais **$f_4(x)$** = $\frac{1}{2}$, a saber, $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$. Como $\frac{1}{2}$ é **ponto eventualmente periódico** de período **2**, então os valores $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ são **pontos eventualmente periódicos** de período **3**.

• Veja que o último argumento pode ser aplicado tanto para $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ como $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$. Logo, é possível obter, para cada um deles, dois **pontos eventualmente periódicos** de período **4**.

3) Para a função **f(α) = 2.α**, dada na página **5**, se: $\alpha = \frac{2.k.\pi}{2^n}$, com **k** inteiro, então:

$$f^n(\alpha) = 2^n.\alpha = 2^n.\frac{2.k.\pi}{2^n} = 2.k.\pi \quad \text{e} \quad f^n(\alpha) = f^{n+1}(\alpha) = f^{n+2}(\alpha) = ... = f^{n+p}(\alpha) = ... = 2.k.\pi.$$

Logo, α é **eventualmente periódico** de período **n**.

PONTO EVENTUALMENTE PERIÓDICO: definição.

Dada uma função **f**, diz-se que **p** é **eventualmente periódico** de período **n** se **p** não é periódico, mas existe **m > 0**, tal que **$f^{n+k}(p) = f^k(p)$**, para todo **$k \geq m$**, ou seja, **$f^k(p)$** é periódico para **$k \geq m$**.

RETRATOS DE FASE E ANÁLISE GRÁFICA DE SISTEMAS DINÂMICOS.

Dada uma função $y = f(x)$, sua representação gráfica em coordenadas retangulares (conhecidas como coordenadas cartesianas), caso exista, fornece "boas informações" sobre as imagens de x, mas poucas informações sobre $f^2(x)$ e muito menos sobre $f^n(x)$, com $n > 2$.

Por sua vez, as representações gráficas exibidas nas figuras **7**, **16** , **19** , **20** , **21** , **22** , **23** , **30** , **31** e **33** permitiram descrever os "primeiros" termos *iterativos* dos diversos sistemas dinâmicos discretos determinados por aquelas funções, pois, em cada um deles, agregaram-se a **função identidade (diagonal)** $\Delta(x) = x$ e procedimentos gráficos específicos para obter aqueles termos. Tais representações gráficas constituem o que se costuma denominar **Análise Gráfica (Graphical Analysis)** [18].

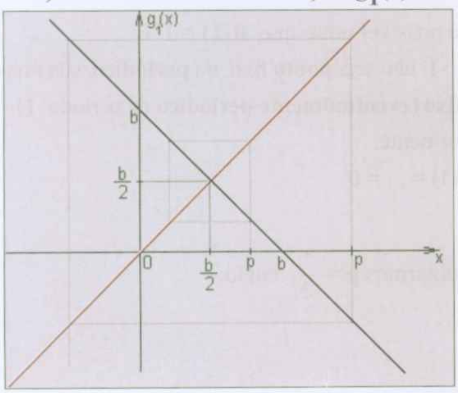
Além da **Análise Gráfica**, é possível fazer uso de um outro tipo de representação gráfica que se chama **Retrato de Fase (Phase Portrait)**.

O **Retrato de Fase** de um sistema dinâmico consiste em uma representação geométrica de seus "comportamentos" sobre a reta real, ao invés de se utilizar o plano real.

"Melhor" do que uma explanação genérica sobre o que vem a ser um **retrato de fase** de um sistema dinâmico é retomar alguns dos exemplos já mencionados no texto e exibir seus **retratos de fase** anexados às **análises gráficas** já "confeccionadas" como mais um instrumento de análise qualitativa e gráfica.

Exemplo 2

2) O **retrato de fase** da função $g_1(x) = -x + b$:



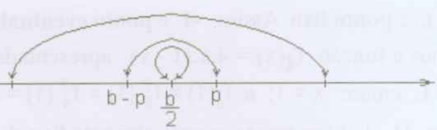
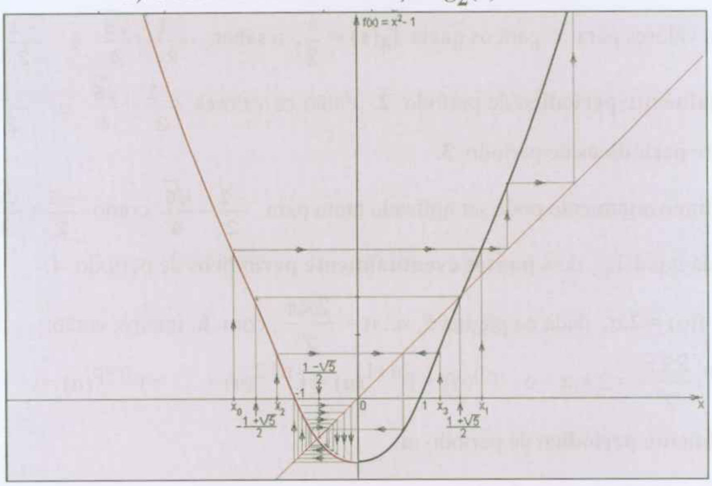


Figura 34

3) O **retrato de fase** da função $g_2(x) = x^2 - 1$:



[18] A descrição dos procedimentos gráficos da **Análise Gráfica** pode ser vista no Exercício 7, apresentado anteriormente, **1ª PARTE**. Além disso, em uma tradução "mais livre" da expressão "**Graphical Analyses**", poderíamos utilizar a expressão "**Gráfico de Análises**" no lugar de "**Análise Gráfica**".

○ 1° caso: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

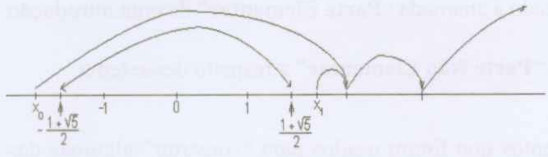


Figura 35

○ 2° caso: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nesse caso, faremos um "zoom" no intervalo especificado para tornar a visualização menos congestionada).

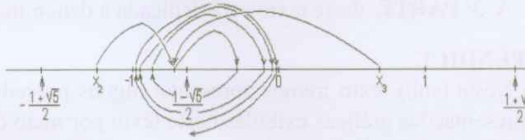


Figura 36

5) Retratos de fase do mapa logístico $\mathbf{f_k(x) = k.x.(1 - x)}$ para algum valor de **k** e para algum **x**, $\mathbf{0 < x < 1}$, podem ter os mais variados "aspectos".

Diante de tanta diversidade, iremos exibir, em um mesmo sistema de coordenadas, um fragmento da **Análise Gráfica** de $\mathbf{f_4(x)}$, para $\mathbf{x = 0,2}$ e para os pontos:

$(0; 0{,}2)$, $(0{,}01; f_4(0{,}2))$, $(0{,}02; f_4^2(0{,}2))$, $(0{,}03; f_4^3(0{,}2))$, ... , $(0{,}50; f_4^{50}(0{,}2))$, ... , $(1{,}00; f_4^{100}(0{,}2))$.

Em seguida, iremos exibir um fragmento do seu **retrato de fase**.

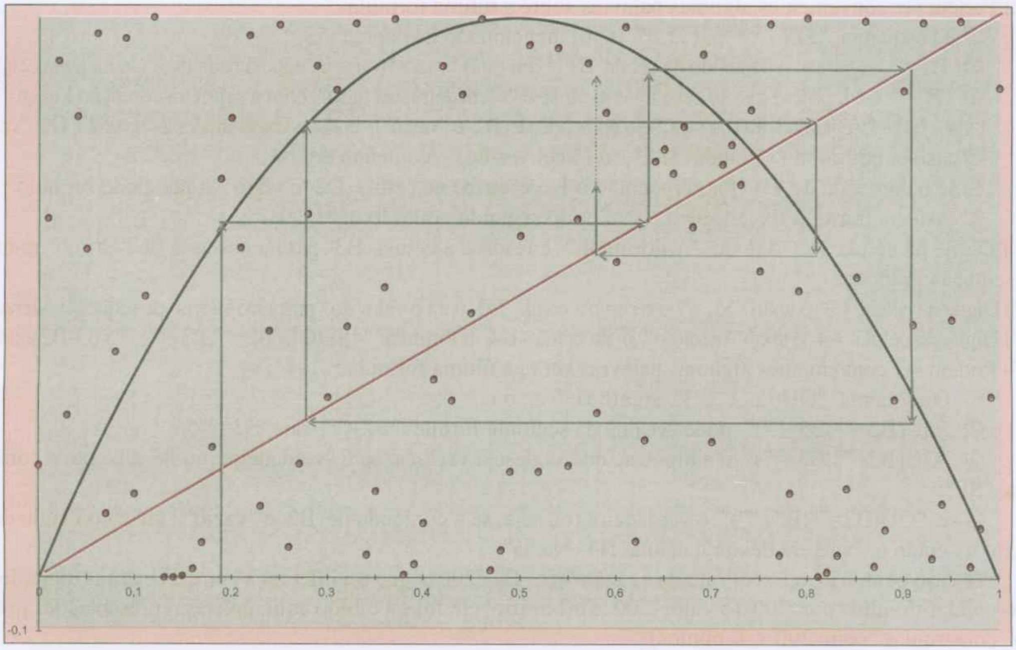
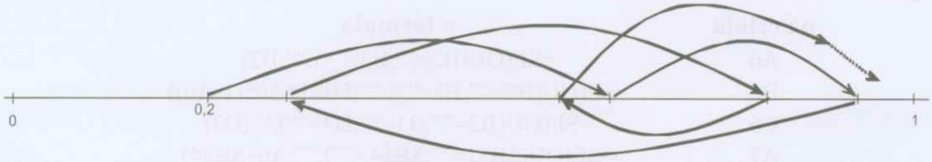


Figura 37



Caso a hipótese levantada nas páginas na 1ª **PARTE** se confirme [os termos da seqüência *iterativa* 0,2, $f_4(0,2), f_4^2(0,2), f_4^3(0,2), \ldots, f_4^n(0,2), \ldots$ formam um conjunto **denso** no intervalo $0 < x < 1$], então estaremos diante de um **sistema dinâmico discreto com "comportamento" aleatório**.

Nesse ponto, encerramos a **2ª PARTE** deste texto dedicado à chamada "**Parte Elementar**" de uma introdução ao estudo de **Sistemas Dinâmicos Discretos Caóticos**.

A **3ª PARTE** deste texto será dedicada à denominada "**Parte Não Elementar**" a respeito desse tema.

APÊNDICE:

Neste (sub) texto iremos apresentar alguns procedimentos que foram usados para "construir" algumas das representações gráficas exibidas neste texto por meio de uma planilha eletrônica. A planilha aqui utilizada foi a da **Microsoft** ™, denominada **Excel**, porém existem outras (**Lotus 123**; **Fox Pro**; ...).

Como não é objetivo deste texto entrar em detalhes sobre o uso de planilhas eletrônicas, então o texto seguinte será objetivo e sem maiores preocupações com justificativas das ações realizadas, exceto, talvez, aquelas que poderiam causar algum tipo de "ambigüidade destrutiva".

Vamos imaginar que você tenha alguma intimidade com planilhas eletrônicas e saiba como "entrar" em uma delas.

1°) Digite na célula A1 o texto "k =" (sem as aspas) e reserve a célula B1 para o valor de k;

2°) Digite na célula C1 o texto "Pto fixo1 =" e na célula D1, o valor 0;

3°) Digite na célula A2 o texto "Valor inicial:" e reserve a célula B2 para a abscissa do "primeiro" ponto da representação gráfica;

4°) Digite na célula C2 o texto "Pto fixo2 =" e na célula D2, a fórmula: "=SE(B1="";"";SE(B1=0;"k não pode ser nulo";(1-1/B1)))" [19];

5°) Podem ser convenientes algumas palavras sobre a última fórmula:

① O esquema "SE(.... ; .... ; ....)" já foi mencionado na página 53;

② ' B1="" ' significa: o conteúdo da célula B1 é (ou está) "vazio" (ou seja, não há nada digitado naquela célula);

③ "B1=" é a hipótese que se deseja verificar se é "verdadeira, ou falsa", com a primeira condição lógica "SE":

😐 se "B1=" é verdadeira (ou seja, se o conteúdo de B1 é "vazio"), então o Excel irá deixar a célula D2 "vazia";

😐 caso contrário, no segundo "SE", o Excel verifica o conteúdo de B1;

☹ se o conteúdo de B1 for zero, então o Excel exibe na célula D2 o texto "k não pode ser nulo";

☺ caso contrário, o Excel calcula o valor do segundo ponto fixo: "1-1/B1";

6°) Digite na célula A3 o texto "Valor final:" e reserve a célula B3 para a abscissa do "último" ponto da representação gráfica;

7°) Digite na célula C3 o texto "x_0 =" e reserve a célula D3 para o valor do "primeiro" termo da seqüência *iterativa*;

8°) Digite na célula A4 o texto "razão =" e na célula B4, a fórmula: "=SE(OU(B2="";B3="");"";(B3-B2)/200)";

9°) Podem ser convenientes algumas palavras sobre a última fórmula:

① O esquema "OU(.... ; ....)" significa " .... ou .... ";

② "OU(B2="";B3="")" pode ser lida da seguinte forma: "B2="", ou "B3="";

③ "OU(B2="";B3="")" é a hipótese que se deseja verificar se é "verdadeira, ou falsa", com a condição lógica "SE":

😐 se "OU(B2="";B3="")" é verdadeira (ou seja, se o conteúdo de B2 é "vazio", ou o conteúdo de B3 é "vazio"), então o Excel irá deixar a célula B4 "vazia";

☺ caso contrário, o Excel calcula a razão "(B3-B2)/200", que é a diferença entre os valores digitados naquelas células dividida por 200 (o valor 200 é arbitrário; ele foi escolhido aqui, pois as representações gráficas serão "construídas" com 200 + 1 pontos);

10°) Digite nas células A5, B5, C5 e D5 os textos "x", "Δ(x)", "f_k(x)" e "*Iterar*";

11°) Digite:

na célula	a fórmula
A6	=SE(OU(B2="";B3="");"";B2)
B6	=SE(OU(B2="";B3="");"";$B$1*A6*(1-A6))
C6	=SE(OU(B2="";B3="";D3="");"";D3)
A7	=SE(OU($B$1="";$B$4="");"";A6+$B$4)

[19] É altamente conveniente controlar o número de "parêntese aberto" e o de "parêntese fechado"!

12°) A razão da inclusão do símbolo "$" nas fórmulas exibidas na tabela já foi mencionada na página 20, da 1ª PARTE.

13°) Agora chegou a hora de "copiar" fórmulas em células convenientes. Há muitas formas de fazer isso. Uma forma já foi mencionada na página 8 da 1ª PARTE:

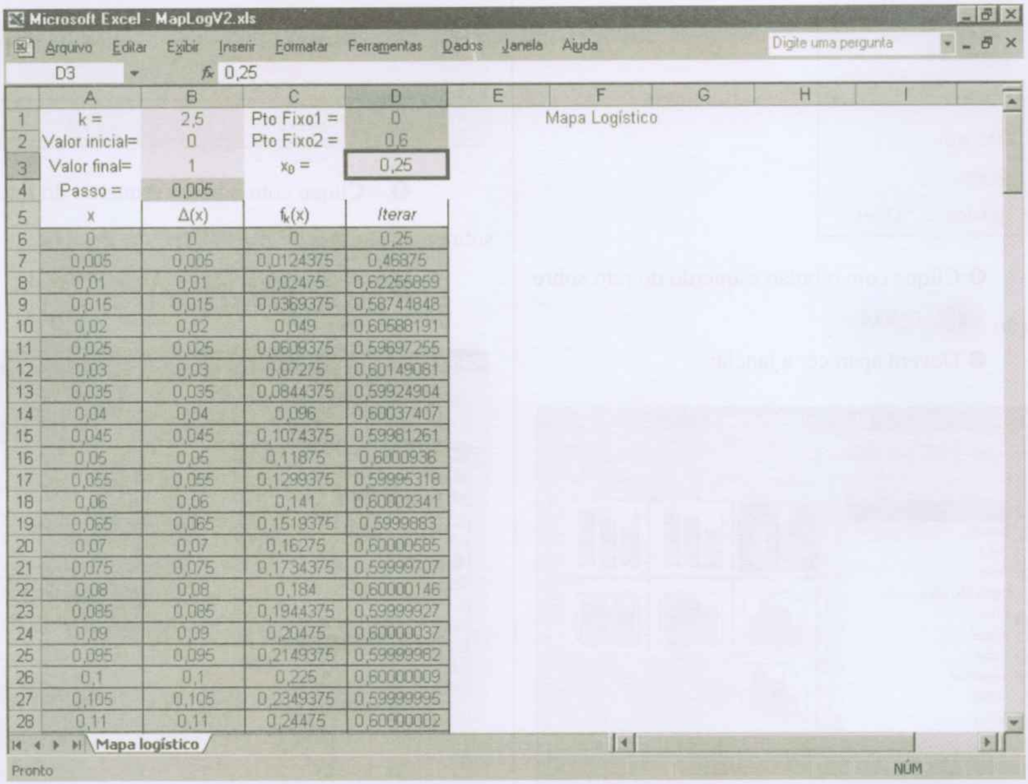
(i) Copie as fórmulas das células B6 e C6 nas células B7 e C7;

(ii) Copie a fórmula da célula C7 na célula D7. Nessa ação, a fórmula que aparece em D7 é: "=SE(OU($B$1="";$B$4=""));"";$B$1*A7*(1-A7))". Troque a referência à célula A7 na última fórmula por D3;

(iii) Copie as fórmulas das células A7, B7, C7 e D7 na região que vai da célula A7 até a célula D206;

(iv) Digite, por exemplo, em B1 "2,5", em B2, "0", em B3, "1" e em D3, "0,25"

14°) Verifique se sua "planilha" se parece com a figura seguinte:



	A	B	C	D
1	k =	2,5	Pto Fixo1 =	0
2	Valor inicial=	0	Pto Fixo2 =	0,6
3	Valor final=	1	x_0 =	0,25
4	Passo =	0,005		
5	x	Δ(x)	$f_k(x)$	Iterar
6	0	0	0	0,25
7	0,005	0,005	0,0124375	0,46875
8	0,01	0,01	0,02475	0,62255859
9	0,015	0,015	0,0369375	0,58744848
10	0,02	0,02	0,049	0,60588191
11	0,025	0,025	0,0609375	0,59697255
12	0,03	0,03	0,07275	0,60149081
13	0,035	0,035	0,0844375	0,59924904
14	0,04	0,04	0,096	0,60037407
15	0,045	0,045	0,1074375	0,59981261
16	0,05	0,05	0,11875	0,6000936
17	0,055	0,055	0,1299375	0,59995318
18	0,06	0,06	0,141	0,60002341
19	0,065	0,065	0,1519375	0,5999883
20	0,07	0,07	0,16275	0,60000585
21	0,075	0,075	0,1734375	0,59999707
22	0,08	0,08	0,184	0,60000146
23	0,085	0,085	0,1944375	0,59999927
24	0,09	0,09	0,20475	0,60000037
25	0,095	0,095	0,2149375	0,59999982
26	0,1	0,1	0,225	0,60000009
27	0,105	0,105	0,2349375	0,59999995
28	0,11	0,11	0,24475	0,60000002

Figura 38

15°) As possíveis diferenças ficam por conta dos "estilos" pessoais;

16°) Troque alguns daqueles valores por outros e verifique as mudanças;

17°) Agora, vamos representar graficamente os valores tabelados na região que vai de A6 até D206. Para isso, siga as instruções (sem maiores comentários):

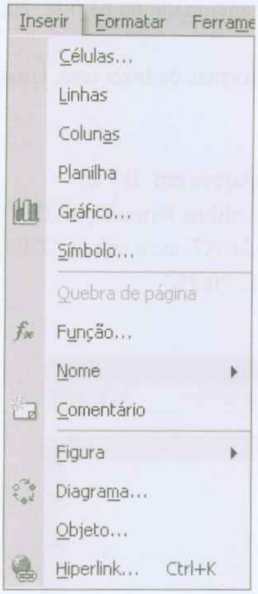
➊ Selecione a região a ser representada graficamente: nesse caso, é a região que vai de A5 a D206. Uma forma para isso é a seguinte:

- selecione as células A5, B5, C5, D5;
- Pressione a tecla Shift + a tecla Ctrl, mantenha-as pressionadas e pressione a tecla ⇩

.

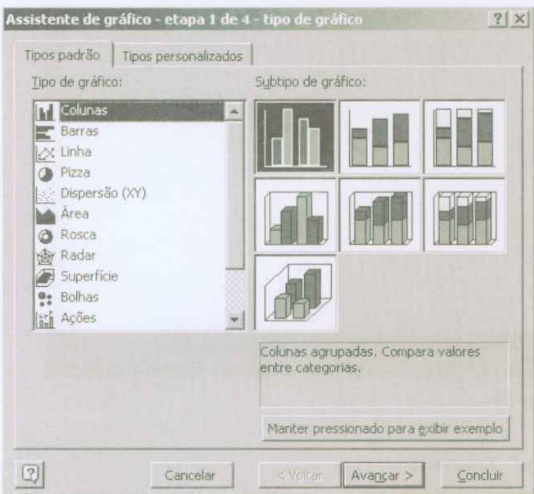
➋ Clique com o botão esquerdo do rato sobre a opção .

➌ Deverá aparecer o menu:



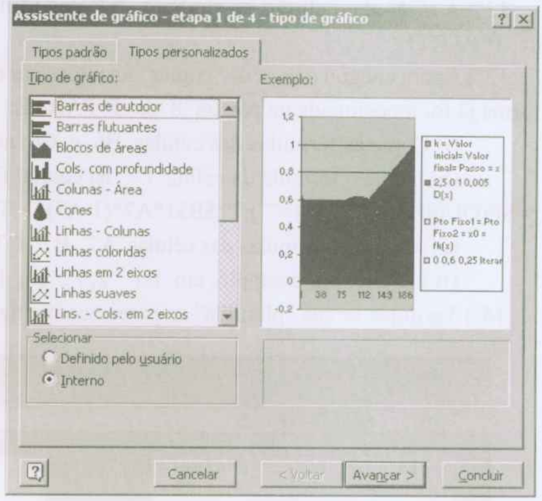
❹ Clique com o botão esquerdo do rato sobre a opção Gráfico... .

❺ Deverá aparecer a janela:



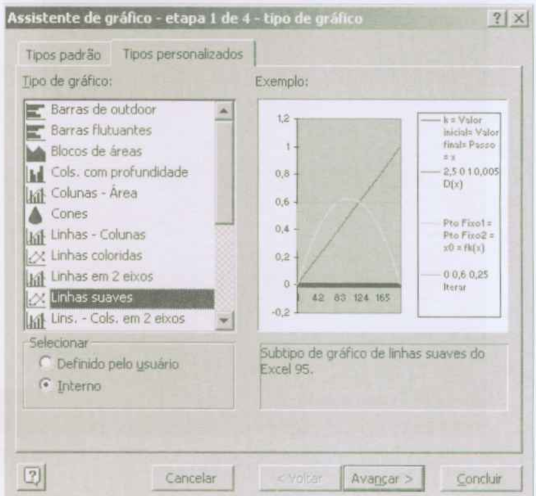
❻ Clique com o botão esquerdo do rato sobre a opção Tipos personalizados .

❼ Deverá aparecer a janela:



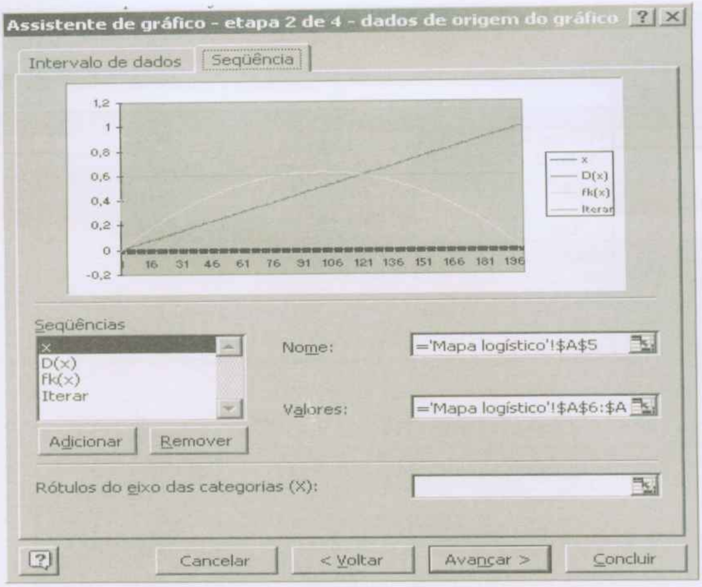
❽ Clique com o botão esquerdo do rato sobre a opção Linhas suaves .

❾ Deverá aparecer a janela:



❶⓪ Clique com o botão esquerdo do rato sobre a opção Avançar > .

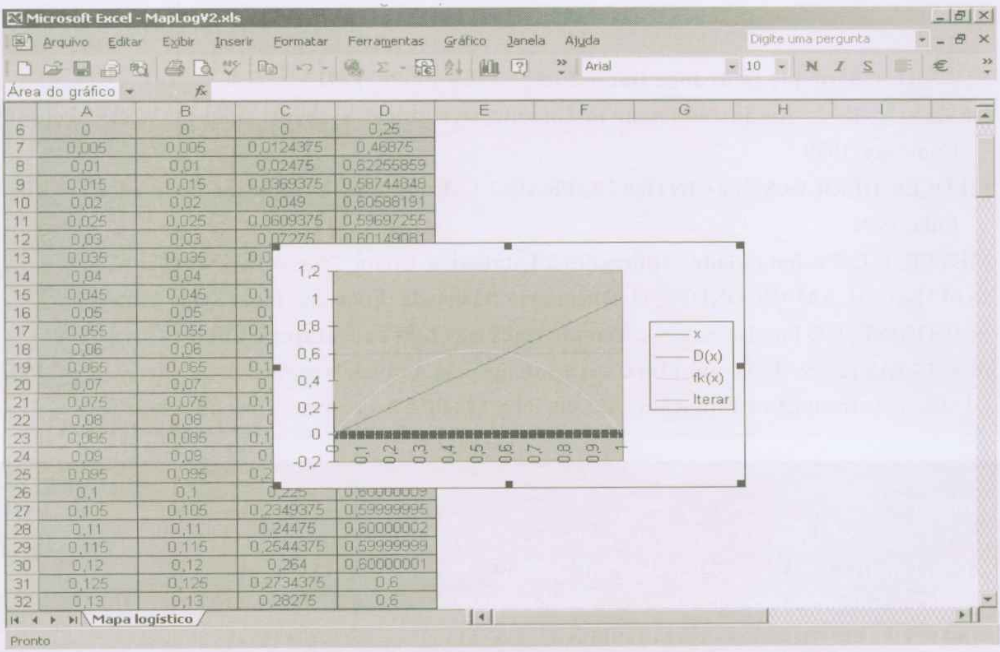
❶❶ Deverá aparecer a janela:



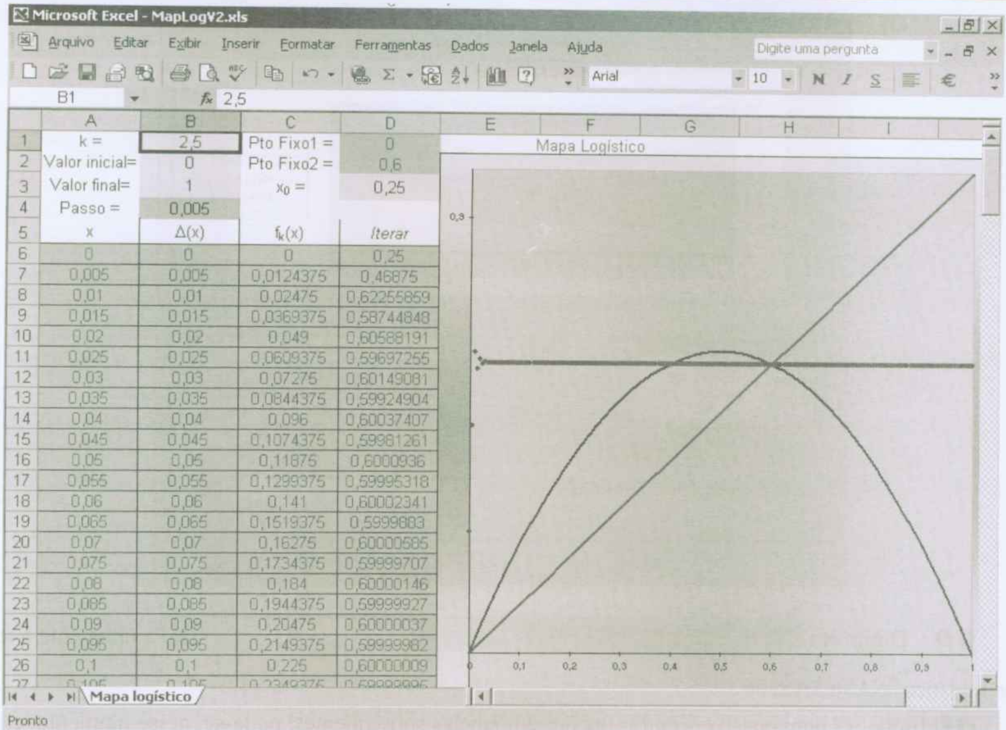
❶❷ Digite em Rótulos do eixo das categorias (X): exatamente o texto: 'Mapa logístico'!$A$6:$A$206 .

❶❸ Embora sejam possíveis outras opções em janelas subseqüentes, pode-se, nesse momento, clicar em Concluir.

❶❹ Verifique se sua planilha se parece com a figura seguinte:



❶❺ "Enfeitando-se" um pouco a última figura, pode-se obter:



	A	B	C	D
1	k =	2,5	Pto Fixo1 =	0
2	Valor inicial=	0	Pto Fixo2 =	0,6
3	Valor final=	1	x_0 =	0,25
4	Passo =	0,005		
5	x	Δ(x)	$f_k(x)$	*Iterar*
6	0	0	0	0,25
7	0,005	0,005	0,0124375	0,46875
8	0,01	0,01	0,02475	0,62255859
9	0,015	0,015	0,0369375	0,58744848
10	0,02	0,02	0,049	0,60588191
11	0,025	0,025	0,0609375	0,59697255
12	0,03	0,03	0,07275	0,60149081
13	0,035	0,035	0,0844375	0,59924904
14	0,04	0,04	0,096	0,60037407
15	0,045	0,045	0,1074375	0,59981261
16	0,05	0,05	0,11875	0,6000936
17	0,055	0,055	0,1299375	0,59995318
18	0,06	0,06	0,141	0,60002341
19	0,065	0,065	0,1519375	0,5999883
20	0,07	0,07	0,16275	0,60000585
21	0,075	0,075	0,1734375	0,59999707
22	0,08	0,08	0,184	0,60000146
23	0,085	0,085	0,1944375	0,59999927
24	0,09	0,09	0,20475	0,60000037
25	0,095	0,095	0,2149375	0,59999982
26	0,1	0,1	0,225	0,60000009

18°) Se você digitar em B1 um valor entre 3,5 e 4 e em D3 o valor do **ponto fixo** não nulo (que pode ser visto na célula D2), então você estará diante de um sistema dinâmico "surpreendente".

Referências Bibliográficas:

STWART, I. **Será que Deus Joga Dados?** Jorge Zahar Editor. 1991.

DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Addison-Wesley Publishing Company. 1989.

FIEDLER-HERRARA, N e CINTRA DO PRADO. C. **Caos: uma introdução**. Editora Edgard Blücher Ltda. 1994.

MEYER, P. L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. Livros Técnicos e Científicos. 1978

JAPIASSÚ, H. e MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. Jorge Zahar Editor. 2001.

PRIGOGINE, I. O fim das certezas: **Tempo, Caos e as Leis da Natureza**. Editora Unesp. 1996.

PESSIS-PASTERNAK, G. (org) **Do Caos à Inteligência Artificial** (entrevistas). Editora Unesp. 1992.

DIACU F. **Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações**. LTC Editora. 2004.

Erramos:

Devido a um problema de versão de software, por ocasião da impressão do último exemplar de nossa revista (nº 20/21), o artigo do Prof. José Carlos Pinto Leivas, intitulado "Tales: mil e uma Utilidades", foi impresso sem alguns símbolos matemáticos. Apresentamos ao professor Leiva e aos nossos leitores, nossos sinceros pedidos de desculpas pelo ocorrido. A versão correta do artigo pede ser encontrada em nossa página (www.sbem.com.br)