ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

Como Analisar A Questão Crucial Da Compreensão Em Matemática?[1]

How To Analyze The Crucial Problem Of Understanding Mathematics?

Raymond Duval
Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale/França
Trad. Méricles T. Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

O ensino da matemática enfrenta dificuldades sistemáticas e contumazes de compreensão que não são encontradas no ensino de outras disciplinas. Essa incompreensão surge, em todos os níveis, no momento em que os alunos estão resolvendo problemas, que é a atividade considerada por excelência na aquisição e utilização de conhecimentos matemáticos. De onde vem essa incompreensão percebida de forma duradoura e muitas vezes definitiva para tantos alunos?

Muitas explicações foram aventadas, algumas reiteram a necessidade de que se considere a complexidade epistemológica que é devida aos conceitos ensinados. Outras, afirmam ser indispensável introduzir os conhecimentos matemáticos seguindo o processo natural e comum da sua formação a partir de observações e experiências concretas. Outras ainda, simplesmente apontam para a necessidade da descoberta do interesse prático dos conhecimentos matemáticos, uma vez que são utilizados em muitas atividades quotidianas e profissionais. O que se pode observar é que todas essas explicações possuem um ponto em comum: elas refletem apenas o ponto de vista matemático para escolher aquilo que vai ser fixado como objetivo global de uma educação matemática aos alunos com idade de até 16 anos e, também, para decompor esses conhecimentos em uma progressão a ser seguida em um nível de ensino de diversos anos. E, quando um único ponto de vista subordina essas questões decisivas para o ensino de matemática, deixa-se escapar a razão profunda das dificuldades recorrentes dos alunos em sua aprendizagem. Em matemática, não se pensa ou se trabalha, de

[1]Este texto é uma tradução do artigo: Duval, R. (2014). Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques? Union, n. 37, disponível em francês em: http://www.fisem.org/www/union/revista37.php. Algumas precisões foram incluídas na tradução.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

modo algum, da mesma maneira como acontece em outros domínios do conhecimento.

O desafio maior do ensino de matemática é fazer com que os alunos entrem na maneira de pensar e de trabalhar que é específica à matemática uma vez que é essa a condição que precede a toda aquisição dos conceitos em matemática. Mas, para isso é preciso analisar o modo matemático de pensar e trabalhar naquilo que tem de radicalmente diferente dos modos mais espontâneos de pensar e trabalhar em outros domínios do conhecimento. A teoria dos registros de representação semiótica é essencialmente um instrumento que foi elaborado para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise...) tratados. De certa forma, a atividade matemática possui dois lados: o lado que aparece quando se considera o ponto de vista matemático e outro lado que se revela quando se considera o ponto de vista cognitivo.

Neste artigo, discute-se a importância e a necessidade de fazer com que os alunos se insiram no modo de pensar e de trabalhar que é específico à matemática. Para tanto, as seguintes questões serão abordadas:

– Como descrever a maneira de pensar e de trabalhar em matemática?
– A conversão de representações é o primeiro obstáculo à compreensão em matemática?
– O que significa "compreender matemática"?
– Os dois lados da atividade matemática são considerados no ensino e na pesquisa em educação matemática?

1 Como Descrever A Maneira De Pensar E De Trabalhar Em Matemática?

Essa questão é crucial na pesquisa sobre a aprendizagem matemática e, por consequência, para o ensino de matemática. Para respondê-la, será necessário comparar a matemática com outros tipos de conhecimentos. A matemática é um tipo de conhecimento como os outros conhecimentos ou é um tipo à parte? Em outras palavras, a aquisição do conhecimento em matemática envolve o mesmo processo cognitivo que ocorre em outros tipos de conhecimento ou exige o desenvolvimento de processos cognitivos específicos?

Três ideias são fundamentais para analisar o conhecimento e seu processo de desenvolvimento, quaisquer que sejam os tipos de conhecimentos considerados.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

1.1 Todo Objeto Origina Tantas Representações Possíveis E Diferentes Quanto São Os Sistemas Semióticos Utilizáveis Para Produzi-Lo

Existem duas grandes classes de sistemas produtores de representações: os sistemas semióticos, como a linguagem, e os sistemas não semióticos, como os instrumentos que fornecem imagens daquilo que não se pode perceber diretamente (telescópios, microscópios, osciloscópio, etc.). Entre os sistemas não semióticos, pode-se classificar as redes neurais de uma região do cérebro que permite produzir imagens mentais, como no caso da memória visual e auditiva.

Em matemática, os sistemas produtores de representações utilizados são os sistemas semióticos. O desenvolvimento da matemática esteve estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos produtores de representações. O exemplo mais simples é o da representação dos números: existem tantas representações de um número inteiro quanto são os sistemas de numeração. Os dois passos decisivos na representação dos números foram: (1) a sua representação em função de uma base e posição dos dígitos utilizados e; (2) a invenção do "zero". A escrita decimal constitui, deste modo, um verdadeiro sistema semiótico segundo a definição estruturalista dos signos de Saussure (Duval, 2006c, p. 53-54). Mas o exemplo mais marcante é a revolução semiótica que é produzida em matemática, em menos de 150 anos, nos séculos XVI e XVII: a invenção de uma escrita literal para expressar relações de igualdades ou desigualdades entre grandezas e, no rastro disso, a criação de um sistema de representações gráficas que utiliza uma regra de correspondência entre uma dupla de números sobre dois eixos graduados. A invenção desses sistemas marcou o surgimento da álgebra e da análise (Duval, 2011b, p. 24-25). Nota-se que a invenção do sistema cartesiano de representação gráfica constitui um tipo de visualização matemática que é totalmente diferente da visualização geométrica desenvolvida por Euclides. Essa observação é importante na medida em que esses dois tipos de visualização foram rapidamente utilizados no ensino para introduzir noções matemáticas.

Nos outros domínios científicos, os sistemas produtores de representações são, em contrapartida, sistemas não semióticos, quer dizer, constituídos a partir de instrumentos que possibilitam o acesso aos objetos, fugindo assim de toda percepção direta. Um exemplo histórico foi a utilização da luneta para olhar a lua: na ausência de aparelhos gravadores, Galileu desenhou as imagens obtidas graças a uma luneta que aumentava o objeto mirado apenas 10 vezes. Naturalmente, teve que interpretar essas imagens para saber o que elas representavam, uma vez que mostravam coisas diferentes daquelas que se podiam distinguir a olho nu. Isso exigiu dele um raciocínio analógico e não matemático, inteiramente fundado no princípio experimental de isolamento e de variação de fatores. Galileu foi o primeiro a aplicar este tipo de raciocínio aos fenômenos de reflexão da luz em diferentes tipos de superfícies (Duval, 2011a, p. 46, 47, 57).

1.2 Um Objeto Não Deve Ser Confundido Com Qualquer Uma De Suas Representações

É a exigência inspiradora de qualquer conhecimento e, mais particularmente, de todo conhecimento científico e foi formulada pela primeira vez por Platão que a tornou ideia diretriz de toda a sua "teoria do conhecimento".

Tal exigência pode parecer trivial e de bom senso: no domínio dos objetos concretos, que se pode não somente ver, mas tocar e, sobretudo, manipular (reagrupar ou separar, deslocar, retornar, deformar, ...), confundir a representação de um objeto com ele mesmo – ainda que se possa vê-lo sem poder tocar – não vem à mente ou, então, começa-se a falar de "transtornos". No domínio do conhecimento científico, é menos trivial como a história do conhecimento do universo e da natureza mostra. Mas isso não suscita alguma dificuldade epistemológica ou cognitiva séria, *uma vez que há sempre um meio não semiótico de ter acesso aos objetos*. Além disso, não se pode esquecer do uso de instrumentos, enquanto que se esquece, frequentemente, das representações semióticas, a começar pela linguagem, que são mobilizadas implicitamente ou produzidas "mentalmente".

Em matemática, em contrapartida, não se pode distinguir o objeto de suas representações uma vez que não há a possibilidade de um duplo acesso: (1) um que seria obtido a partir de uma observação concreta ou ligada a utilização de instrumento como em física e; (2) outro ligado à produção de representações semióticas. O acesso aos objetos matemáticos passa, obrigatoriamente, pela produção de representações semióticas. O exemplo da representação dos números será retomado na tabela, a seguir, na qual justapõe-se diferentes representações, da maneira como Kosuth havia fotografado: uma cadeira real posicionada contra uma parede, uma foto da cadeira colada à parede e ainda um texto colado à mesma parede com a definição da palavra "cadeira" chamando a foto dessa encenação de "Uma ou três cadeiras?". Do mesmo modo, pode-se intitular este reagrupamento de representações como sendo "Um número ou oito números?".

Mas a questão importante nesta montagem de representações à maneira de Kosuth não

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

é esta que é simples de reconhecer em que lugar está a cadeira e as suas representações. Nesta montagem de números, pode-se dizer onde se encontra o número escrito em um sistema de numeração e, deste modo, distingui-lo de suas representações: na palavra, na sua notação decimal ou em uma das organizações espaciais com materiais concretos? A questão pode parecer absurda e dar origem a uma formulação menos clara: entre todas essas representações possíveis, qual é a melhor para que os alunos possam aprender e compreender? Esta questão é formulada por professores cada vez que precisam introduzir, em sala de aula, uma nova noção matemática e se deparam com as dificuldades dos alunos.

Tabela 1: Um número ou oito números?

1111 ou 11 11 Dedos, fósforos  Tarefa piagetiana ((((1) 1) 1) 1) Inclusões lineares  Configuração polinomial	"Quatro" *O léxico varia consideravelmente conforme as línguas*	"4" (no sistema decimal) 100 (no sistema binário 64/16 (na escrita fracionária)
Organização espacial de marcas materiais ou desenhadas Operações de reagrupamento, de separação de itens.	Uma sequência de designações verbais a serem reproduzidas sempre na mesma ordem. Operação de contagem de elementos com pequenas coleções discretas.	Organização semiótica em sistemas de escrita que utiliza o símbolo "0" As quatro operações aritméticas com inteiros

Fonte: O autor.

A impossibilidade de um duplo acesso aos objetos matemáticos, quer dizer, de um acesso não semiótico que seja independente da reprodução de representações semióticas, constitui o que se chamou de "paradoxo cognitivo" da matemática:

– Se os objetos matemáticos não são acessíveis fora da produção matemática de uma representação semiótica, como não confundir o objeto matemático e a representação semiótica utilizada?

– Se existem diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático, que parecem não ter algo em comum, o que permite saber que não se trata do mesmo objeto, mas de objetos diferentes?

Para compreender o paradoxo cognitivo da matemática, é importante introduzir um terceiro personagem na distinção do objeto em si mesmo, com qualquer uma das suas representações: o conteúdo da representação. Assim, as legendas pertinentes para a foto de

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

Kosuth e a montagem das representações de um número são, respectivamente: "Uma cadeira e duas representações diferentes" e "Oito representações diferentes do mesmo número".

O conteúdo de uma representação semiótica apresenta, de fato, duas características inseparáveis: (1) explicita ou apresenta certas propriedades do objeto e oculta outras e; (2) depende, inteiramente, do sistema semiótico utilizado para produzir a representação como se pode constatar na terceira coluna da Tabela 1. *Esta segunda propriedade mostra o abismo epistemológico que separa as representações semióticas das representações não semióticas*. Os sistemas semióticos permitem uma criação ilimitada de novas representações independente de uma relação prévia ao objeto mesmo, liberam a mente do conhecimento antecipado dos objetos. Neste sentido, o símbolo "0" é o símbolo, por excelência, da representação dos números.

1.3 Em Matemática, O Interesse De Um Sistema Semiótico Depende De Suas Possibilidades De Transformação De Representações Produzidas Em Outras Representações Do Mesmo Sistema

Do ponto de vista matemático as representações semióticas não são, de modo algum, equivalentes ou igualmente interessantes. O critério da escolha depende das operações que se quer fazer com um tipo de representação para obter outras representações cujos conteúdos mostrarão um novo dado ou uma nova informação.

Assim, as operações numéricas que se pode fazer com elementos materiais ou com traços dizem respeito à sua disposição espacial e são, de certa maneira, exterior ao conteúdo da representação (primeira coluna da Tabela 1). Estes elementos servem apenas de suporte para uma operação de contagem, quer dizer, para uma designação verbal sucessiva de cada um desses elementos (coluna 2 da Tabela 1). Em contrapartida, as operações que se pode fazer com os números no sistema decimal estão relacionadas aos dígitos e a posição deles na escrita. Estes sistemas permitem que se calcule sem precisar fazer alguma contagem e de forma independente da grandeza dos números. Portanto, oferecem um potencial de cálculo ilimitado quando comparado a outros tipos de representações. Em contrapartida, o potencial de cálculo a partir da utilização única da língua natural é muito limitado. A utilização da língua natural implica sempre a mobilização implícita ou explícita de um outro tipo de representação dos números.

Pode-se observar a importância do sistema semiótico escolhido mesmo quando oferece idêntico potencial de cálculo: *os algoritmos de cálculo mudam em função do sistema de numeração utilizado, ainda que de um ponto de vista matemático, as operações aritméticas*

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

sejam as mesmas. Para tanto, basta comparar as operações seguintes:

$$0{,}25 + 0{,}5 \text{ e } \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2};\ 0{,}25 \times 0{,}5 \text{ e } \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2}$$

Os sistemas semióticos utilizados em matemática são especializados para preencherem uma função específica de transformação de representações semióticas. Alguns foram criadas na dinâmica do desenvolvimento da matemática. Assim, os sistemas de representações gráficas foram criados para descrever de forma algébrica, as formas geométricas, curvas quadráticas, curvas mecânicas, etc. Com essas características, esses sistemas tornaram-se um pujante meio de visualização matemática. Outros sistemas foram desenvolvidos mediante a adoção de uma prática cultural comum, mas com modificações das regras de produção. O que é importante, por exemplo, para as figuras geométricas, não é a sua produção com ajuda de instrumentos (régua, compasso, etc.) que mostram certas propriedades, mas é *a possibilidade de que sejam reorganizadas, visualmente, em outras figuras*. Graças a essa possibilidade de transformação visual, as figuras "geométricas" preenchem uma função de exploração heurística na resolução de problemas (Duval, 2005).

1.4 Qual Teoria Para Analisar O Funcionamento Cognitivo Específico Da Maneira De Trabalhar E Pensar Em Matemática?

A matemática é um tipo de conhecimento que, do ponto de vista epistemológico, é completamente diferente dos outros tipos de conhecimento. Duas características a colocam à parte:

– O acesso aos objetos matemáticos faz-se de maneira exclusiva pelo estabelecimento de produções semióticas e isso traduz-se pelo fato de que a matemática é um domínio de conhecimento que utiliza quase todo o espectro dos tipos possíveis de representações semióticas;

– A maneira de trabalhar em matemática é indissociável da transformação de representações matemáticas em outras representações semióticas de um mesmo sistema semiótico. Isso traduz-se pelo fato de que as provas de matemática são exclusivamente alicerçadas na necessidade de transformações semióticas.

Essa condição epistemológica à parte explica o abismo cognitivo que separa a maneira de pensar e de trabalhar em matemática da forma que é comum aos outros tipos de conhecimentos. As dificuldades de compreensão, aos quais a maioria dos alunos se depara na aprendizagem da matemática, vem desse abismo a ser superado, e são de dois tipos: (1)

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

dificuldades ligadas ao paradoxo cognitivo da matemática e; (2) dificuldades ligadas à maneira de ver em matemática e de utilizar a língua natural. A maneira de ver em matemática contrapõe-se ao reconhecimento perceptivo das formas e ao reconhecimento icônico dos objetos graficamente representados. A maneira de definir e utilizar as definições em matemática contrasta com a forma espontânea de debater, de justificar, de raciocinar fora do âmbito da matemática. Como, portanto, analisar o funcionamento cognitivo para que o professor de matemática consiga promover o desenvolvimento nos alunos para que possam, de fato, compreender qualquer que seja o conteúdo matemático tratado?

A noção de registro foi introduzida para designar todos os sistemas semióticos que são utilizados em matemática e que preenche uma função específica de transformação de representações semióticas. Isso significa dizer que nenhuma representação pode ser considerada de forma isolada. As representações semióticas devem ser descritas em função do registro nas quais foram produzidas e que determinam o seu conteúdo (ver 1.2). Mas o interesse principal da noção de registro é de permitir a análise da atividade matemática a partir da distinção de dois grandes tipos de transformações semióticas: as conversões e os tratamentos. *As conversões são necessárias cada vez que se quer mobilizar, simultaneamente ou alternadamente, ao menos dois registros*. É o caso da geometria no Ensino Fundamental[2]: mobiliza-se ao mesmo tempo a linguagem para definir os conceitos e a visualização das propriedades e dos objetos em uma figura construída instrumentalmente. É o caso, também, do estudo das funções que mobiliza, ao mesmo tempo, os gráficos cartesianos e a linguagem. Estes exemplos são só o começo de uma longa lista, mas a situação mais reveladora é a resolução de problemas em todos os níveis de ensino.

Pode-se afirmar que, em matemática mesmo que as demonstrações sejam tratamentos efetuados em um único registro de representação, pensa-se e trabalha-se mobilizando ao menos dois registros de representação e não um só.

2 A Conversão De Representações É O Primeiro Obstáculo À Compreensão Em Matemática?

A primeira exigência cognitiva para compreender matemática é poder utilizar ao menos

[2] **Nota do Tradutor**. Nesta tradução, usam-se as seguintes equivalências entre os sistemas básicos de ensino brasileiro e francês: *Ensino Fundamental 1* (1ª série a 5ª série) para o nível "*primaire*" também com cinco anos; *Ensino Fundamental 2* (6ª série a 9ª série) para o "*collège*" também com quatro anos e; *Ensino Médio* (1ª série a 3ª série) para o nível "*lycée*" também com 3 anos. Em ambos os sistemas, são doze anos de estudo.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

duas representações de um mesmo objeto (Ver 1.1) sem confundir o objeto com os conteúdos respectivos das duas representações (Ver 1.2). Isso significa dizer que é necessário poder reconhecer o mesmo objeto nas duas representações: se apenas uma das duas representações é dada, *é preciso poder pensar, espontaneamente, a substituição na outra representação por essa que é dada*. Este simples gesto intelectual precede a toda resolução de problemas, uma vez que para começar a procurar a solução é preciso de imediato converter as representações iniciais dos dados do problema apresentados em um registro, em representações de um outro registro e, com isso, poder trabalhar e avançar à solução do problema.

Ora, o obstáculo maior à operação de conversão das representações dá-se pelo fato de que não há nada de comum entre os conteúdos das representações de dois registros diferentes. Em outras palavras, para reconhecer que duas representações se referem ao mesmo objeto e podem ser substituídas uma pela outra, segundo o princípio da equivalência semântica, *salva veritate* (Frege, 1971), não existe outra possibilidade de reconhecer que não seja por meio de *uma correspondência, termo a termo, entre os conteúdos de dois registros diferentes*, como nos exemplos:

– Se a língua e as figuras geométricas são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades discursivas de sentido de um enunciado (definição, teorema) e certas unidades figurais da configuração geométrica;

– Se a expressão simbólica de relações e a língua são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades de sentido do enunciado e as unidades simbólicas da equação (letras, sinais de operações e de relação);

– Se a expressão simbólica de relações e os gráficos cartesianos são os registros utilizados, será preciso reconhecer a correspondência entre cada uma das unidades de sentido da equação ou inequação e os diferentes valores visuais de uma reta, de uma curva, etc.

2.1 Como Observar As Dificuldades Ligadas À Conversão De Representações?

As dificuldades são oriundas do não reconhecimento de um mesmo objeto em representações distintas cujos conteúdos são diferentes e não são realmente notados, uma vez que os dados recolhidos proveem da observação do trabalho dos alunos durante o desenvolvimento de uma sequência didática ou de produções obtidas para resolver um problema, ou ainda, de resultados globais de avaliações. Em outras palavras, *o cenário colocado para o recolhimento de dados é organizado em função dos conhecimentos matemáticos a serem*

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

apreendidos. As dificuldades ligadas à conversão de representações são, desde modo, interpretadas como dificuldades ou erros associados a um conceito matemático.

Para observar as dificuldades ligadas à conversão de representações, elaborou-se um questionário unicamente constituído de tarefas de reconhecimento (Duval, 2011d, p. 105)[3]. As variações dos itens eram sistemáticas no conteúdo da representação (diferentes posições de uma reta no plano cartesiano) e tratava-se de escolher, entre diversas equações dadas, aquela que correspondia a uma dada posição. *Esta tarefa de reconhecimento não exigia tratamento algum*. Todas as variações do conteúdo correspondiam aos contrastes visuais de posição em relação a três fatores. Não havia cálculo a ser feito para escolher a equação correspondente nem dizer se se tratava ou não de uma função. Os erros foram massivos e persistentes mesmo após um ensino sobre funções. Depois deste trabalho, muitas outras observações e enquetes confirmaram a importância e a generalidade deste fenômeno do não reconhecimento que afeta a todos aspectos da matemática ensinada desde o Ensino Fundamental ao primeiro ano do ensino superior (Duval, 2006a, 2006b).

A conversão de representações semióticas é o obstáculo maior e primordial a ser superado para que se possa compreender e aprender matemática, tanto nas reações dos alunos quanto nas suas produções. Este obstáculo manifesta-se de duas maneiras diferentes:

– A primeira é a incapacidade de reconhecer em uma das representações – um enunciado, uma equação, uma figura, um gráfico, etc. – as unidades a serem postas em correspondência com as unidades da outra representação. Isso leva a *um bloqueio e a um abandono rápido das atividades de busca para resolver um problema* ou a erros que apontam confusões ininterpretáveis;

– A segunda maneira, a mais frequente, é o falso reconhecimento das unidades discursivas, figurais ou simbólicas a serem postas em correspondência. *Este falso reconhecimento é tão entranhado, como seria na realidade, um bom reconhecimento caso não estivesse no domínio da matemática*, o que conduz a erros sistemáticos e contumazes encontrados em todos os níveis de ensino. Os falsos reconhecimentos, enquanto persistem, tornam incompreensível toda explicação matemática e provocam, cada vez mais, dificuldades no progresso real da aprendizagem matemática.

Os dois exemplos mais notáveis disso são: (1) o reconhecimento de unidades figurais em uma figura geométrica, ou seja, a visualização geométrica e; (2) o reconhecimento de

[3] Este artigo é uma tradução de: Duval, R. (1988). Graphiques e équations : l´articulation de deux registres. Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives. v. 1, pp. 235-253. IREM de Strasbourg.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

unidades discursivas de sentido no enunciado de problemas, ou seja, a utilização da linguagem matemática. As unidades figurais que são de imediato reconhecidas, com a exclusão de todas as outras nas figuras geométricas, são as unidades 2D que se impõem em função das leis gestálticas de reconhecimento da forma, ou as unidades figurais 3D. E isso bloqueia a articulação cognitiva entre as figuras e os enunciados matemáticos e, atinge também, os próprios enunciados dos problemas. Da mesma forma, as unidades discursivas que se impõem à compreensão de um enunciado são inicialmente as palavras e não os sintagmas ou as frases. Assim, palavras como "ganhar" e "perder" possuem sentidos próprios e são associados de imediato, respectivamente, às operações de adição e subtração. E isso foi o que conduziu a falsos reconhecimentos sistemáticos na maioria dos problemas aditivos, assim como nos resultados de pesquisa de G. Vergnaud (Vergnaud e Durand, 1976) e de outras pesquisas posteriores, sobre esta questão, também revelaram.

2.2 Como Fazer Para Enfrentar O Obstáculo Da Conversão?

O problema nunca foi colocado desta forma nas pesquisas em educação matemática, uma vez que, como vê-se mais adiante, o ensino é planejado em função de uma lista matemática de conceitos e de procedimentos a serem alcançados, e as inovações didáticas inscrevem-se no quadro deste planejamento. Embora o obstáculo maior da conversão de representações não seja reconhecido como tal, diferentes estratégias didáticas são adotadas e geralmente combinadas para contorná-lo:

– A multirrepresentação dos objetos matemáticos, consiste em associar a existência de diversas representações de um mesmo objeto. O desenvolvimento de novas tecnologias deu o meio para passar, quase que instantaneamente e automaticamente, de um registro de representação a outro. Para tanto, basta utilizar o menu de instrução do aplicativo utilizado;

– A busca da melhor representação para os alunos privilegia as representações icônicas como as imagens e os esquemas que utilizam flechas, uma vez que ver dá acesso aos objetos de forma mais rápida e rica em informações do que qualquer explicação verbal;

– A utilização de um conhecimento matemático em problemas da realidade consiste em partir de situações reais ou concretas nas quais a utilização da propriedade ou do procedimento matemático, que se quer ensinar, mostra-se indispensável para resolver o problema;

– A organização do trabalho em sala de aula segundo o modelo de desenvolvimento de aprendizagem que mobiliza todos os tipos de atividade que cada indivíduo emprega quando

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

busca apropriar-se de algo novo: começar a fazer ou manipular, por tentativas e erros sucessivos, para em seguida, formular o que faz ou o que observa, enfim controlar os resultados de sua ação e validar as tentativas efetuadas para obtê-los. Naturalmente, trata-se de encontrar um problema adaptado à propriedade ou ao procedimento que se quer introduzir, uma vez que é na resolução desse problema que diferentes tipos de atividades vão ser solicitadas ao aluno para que faça de modo progressivo e apreenda o conceito matemático utilizado.

Nenhuma dessas estratégias ajuda de verdade os alunos a superarem o obstáculo da conversão de representações semióticas, quer dizer, tomarem consciência da maneira de trabalhar que é específica à matemática e apreendê-la pessoalmente. Os problemas do não reconhecimento ressurge, regularmente, bem antes do ensino. As passagens de um nível de ensino a outro, do Ensino Fundamental 2 ao Ensino Médio, mostram rupturas totais nas exigências matemáticas que são esperadas dos alunos. Um desses exemplos mais espetaculares diz respeito à geometria, a maneira de ver e o tipo de prova: os alunos devem passar de uma utilização empírica das figuras no Ensino Fundamental 1 para uma utilização que será exclusivamente determinada por hipóteses mencionadas no problema a ser resolvido! O que é, nos dois casos, completamente estranho à maneira matemática de ver figuras geométricas e que é também contra educativo (Duval, 2005, 2015).

Em todas essas estratégias didáticas, de fato, o ponto cognitivamente crucial da conversão de representações em matemática é completamente ignorado, uma vez que de forma evidente, os alunos precisam reconhecer, dentre as representações, aquelas com as quais devem tratar e que se voltam ao conceito matemático a ser assimilado. Dito de outro modo, eles precisam reconhecer as correspondências, termo a termo, que existem entre as unidades que constituem os conteúdos respectivos de um largo espectro de representações: imagens, esquemas, figuras geométricas, gráficos, expressão linguística, expressão literal, etc. Como podem aprender a lidar com este jogo semio-cognitivo que é, ao mesmo tempo, complexo e sempre diferente?

É preciso construir situações de aprendizagem nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B: é a única maneira de aprender a discernir as unidades a serem postas em correspondência e tornar-se capaz de reconhecer, rapidamente, se duas representações quaisquer sendo dadas em dois registros são, ou não são, duas representações equivalentes de um mesmo objeto. Em outras palavras, o método utilizado para construir um questionário de tarefas de reconhecimento oportuniza, igualmente, construir situações de aprendizagens. Mas, um tal método só pode ser utilizado com registros monofuncionais, quer dizer, registros cujos tratamentos são algoritmos (Duval, 2006b, p. 110).

As línguas naturais e as figuras são registros multifuncionais, pois todos os tratamentos feitos nesses registros, quer dizer, raciocínios e exploração heurística de transformações de figuras, não podem se transformar em algoritmos e é isso que torna difícil a sua utilização no ensino. Para que os alunos possam aprender a passar desses registros aos registros em que os tratamentos não podem se transformar em algoritmos, é preciso recorrer às representações auxiliares. Isso impõe-se, por exemplo, com todos os enunciados de problemas como no caso dos problemas aditivos, dos problemas que exigem a passagem para uma equação matemática. No que diz respeito aos problemas aditivos, existe agora uma literatura considerável com proposições bem diferentes de representações auxiliares para favorecer a compreensão desses problemas: imagens de coleções de objetos, esquemas ternários de Vergnaud (Vergnaud e Durand, 1976), a reta numérica, etc. *A principal questão que o recurso dessas representações auxiliares suscita é a sua pertinência cognitiva* para aprender a converter os dados do problema. Uma vez que, para ser de fato útil, essas representações auxiliares devem tornar visível a dupla correspondência: (1) entre as unidades do discurso do enunciado e as unidades figurais e; (2) as unidades simbólicas de uma igualdade numérica. Em outras palavras, as representações auxiliares devem mostrar, ao mesmo tempo, como selecionar as informações pertinentes do enunciado e como organizá-las em uma igualdade numérica. As experiências feitas por R. F. Damm mostraram que somente as representações bidimensionais preenchem estas duas condições e que permitem que os jovens alunos possam compreender e resolver os problemas aditivos (Duval, 2011b, p. 128-129).

2.3 Qual Teoria Incorpora O Funcionamento Cognitivo Subjacente À Atividade Matemática?

Para levar em consideração as dificuldades de aprendizagem da grande maioria dos alunos as pesquisas sobre o ensino de matemática recorrem, não somente, às teorias cognitivas, mas também às teorias pedagógicas. Assim, entre os anos de 1960 e 1980, a epistemologia genética de Piaget foi a referência teórica absoluta para justificar e organizar uma reforma profunda do ensino de matemática, tanto nos conteúdos quanto nos métodos. Uma expressão pode resumir tudo isso: “a construção dos conceitos”. Mas, constatou-se que o construtivismo não cobria nem todos os aspectos dos processos da aprendizagem matemática e nem, aliás,

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

todos os aspectos da atividade matemática. Fez-se, então, a partir dos anos de 1980, apelo a outras teorias, a de Vygotsky cuja análise funcional da relação entre o pensamento e a linguagem permitia explicar a relevância das interações sociais em classe e, a sua noção de “zona de desenvolvimento proximal” sublinhava o papel do professor. Em seguida, a partir dos anos 1990 para justificar a importância a ser dado aos signos (e não somente aos conceitos e à linguagem) quando se trata de introduzir a álgebra, e igualmente por insistir sobre o papel das imagens e dos esquemas na aquisição do conhecimento matemática, orientou-se para a semiótica de Peirce. Naturalmente, nenhuma dessas teorias pode recobrir a diversidade e a complexidade de um ensino de matemática que vai do Fundamental ao Universitário, assim outras teorias foram aventadas. De onde a questão da escolha de uma teoria ou, mais exatamente, com que critério escolher uma teoria cognitiva.

Pode-se dividir todas as teorias cognitivas em dois grandes tipos, em função do estatuto epistemológico que elas reconhecem à matemática em relação aos outros domínios de conhecimento: (1) ou bem a matemática é um tipo de conhecimento como os outros e, deste modo, a aquisição de conhecimentos em matemática revela os mesmos processos cognitivos mobilizados nos outros domínios de conhecimento ou; (2) ao contrário, a matemática é um conhecimento epistemologicamente diferente dos outros e, deste modo, depara-se com a questão seguinte: *quais processos cognitivos específicos são necessários desenvolver para que se entre na forma de pensar e de trabalhar em matemática*?

Todas as teorias cognitivas utilizadas até o presente nas pesquisas sobre o ensino de matemática fundamentam-se na ideia de que o conhecimento matemático é epistemologicamente como os outros e que a sua aprendizagem se dá do mesmo modo. São teorias gerais que foram elaboradas à margem da análise da atividade matemática e do desenvolvimento histórico dos conhecimentos matemáticos e têm como característica comum ignorar o paradoxo cognitivo da matemática e o obstáculo da conversão (Ver 1.2 e 2.1). É, também, o caso da semiótica de Peirce e todas as teorias que se inspiram nele.

Em matemática não se trabalha e não se pensa da mesma forma do que em outras disciplinas (Ver 1.4). Além disso, o obstáculo da conversão de representações mostra-se irredutível a toda análise da atividade matemática em termos de conceitos matemáticos e de aplicações de conceitos matemáticos. É suficiente, por exemplo, inverter a ordem de conversão das representações em todas as atividades de reconhecimento para ver uma mudança nos acertos das respostas (Duval, 2006b, p. 123). O estatuto epistemológico, com exceção à matemática, requer que se reconheça que a matemática mobiliza um funcionamento cognitivo diferente

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

daquele que é espontaneamente exibido em outros domínios do conhecimento. Neste sentido, a matemática constitui o lugar privilegiado para uma outra análise do funcionamento cognitivo do pensamento e de sua criatividade. É dentro desta perspectiva que se elaborou a teoria dos registros de representação semiótica.

3 O Que É Compreender Matemática? Dois Pontos De Vista Opostos E Irredutíveis Um Ao Outro

A atividade matemática não figura, de modo algum, da mesma maneira quando se olha sob o ponto de vista matemática ou sob o ponto de vista cognitivo, quer dizer, como atividades de transformações de representações semióticas que são efetuadas em registros totalmente diferentes. É evidente que somente o ponto de vista que conta é o ponto de vista matemático, uma vez que não se pode compreender matemática sem fazer matemática, mesmo que de forma rudimentar. Assim, para os matemáticos e quase todos os didatas da matemática, olhar a matemática de um ponto de vista cognitivo não é fazer matemática e, deste modo, não pode fornecer os meios para compreendê-la. No entanto, quando se quer ensinar matemática aos alunos, o ponto de vista cognitivo impõe-se de maneira inevitável, uma vez que remete a maneira de pensar e de trabalhar em matemática independente dos conceitos e dos conhecimentos a serem utilizados ou aplicados. Para mostrar a oposição e a necessidade desses dois pontos de vista, três questões cruciais serão consideradas na organização do ensino e aprendizagem de matemática.

3.1 Quais São Os Critérios De Compreensão Matemática?

De um ponto de vista matemático, os dois critérios de compreensão são a exatidão e a justificação do resultado obtido. Para tarefas simples que solicitam somente a operação de um algoritmo simples, como um cálculo com inteiros, o primeiro critério é suficiente. Por outro lado, o segundo critério torna-se rapidamente necessário, é o caso por exemplo, em geometria quando for necessário apontar propriedades que “explicam” como se chega a solução de um problema e por que “funciona”, ou ainda, por que outras respostas “não funcionam” mesmo que pareçam ser perceptivamente evidentes. Mais geralmente, a compreensão deve responder à exigência epistemológica de prova que é comum a todo conhecimento científico. Assim, o critério de justificação que implica, evidentemente, no critério de acerto, é essencial à

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

compreensão. Mas em matemática, a justificação não se limita a menção da propriedade correta, *deve dar lugar a uma mudança de convicção* e, quando os alunos a vivenciam, é por eles uma verdadeira experiência intelectual que provoca uma tomada de consciência da maneira de pensar que é exclusiva da matemática (Duval, 1991, p. 237-238; 2011a, p. 39).

Do ponto de vista cognitivo, o critério de compreensão é o reconhecimento imediato de um mesmo objeto em representações em que os conteúdos não possuem nada de comum. Este reconhecimento é a condição que permite mudar de registro substituindo uma representação dada por outra representação totalmente diferente (Ver 2.1). Este critério de reconhecimento deve ser tomado no sentido forte. *O reconhecimento de um mesmo objeto quando se muda de registro de representação dever ser efetuado nos dois sentidos de conversão* e não em um só sentido, aquele que é frequentemente privilegiado pelo professor. Para as funções, por exemplo, caminha-se habitualmente da expressão algébrica de uma equação ao gráfico, produzindo este gráfico, prática que privilegia uma apreensão local dos pontos de intersecção em detrimento de uma apreensão global de valores visuais do gráfico. *Ora, o reconhecimento deve cobrir as variações possíveis do conteúdo visual dos gráficos*. Em outras palavras, o critério cognitivo de reconhecimento fundamenta-se no conjunto de representações diferentes possíveis e não em algumas situações típicas estudadas em sala de aula em relação ao conteúdo estudado. Nada é mais revelador do desdém em relação aos objetivos, às contribuições da educação matemática e, também, em relação ao seu insucesso do que o argumento que se ouve tantas vezes de professores e alunos: "isso não foi visto em sala de aula". Este argumento é a negação mesmo do primeiro critério psicológico do sucesso da aprendizagem: a transferência para situações inteiramente novas.

O caso dos critérios de compreensão obriga a que se interrogue a respeito das práticas e elaboração de questionários de avaliação em matemática. Os acertos registrados correspondem a uma compreensão e, deste modo, uma aquisição que poderá facilitar novas aquisições? Ou longe disso, vão mascarar uma incompreensão que irá conduzir, ulteriormente, a insucessos e dificuldades crescentes de compreensão? O valor diagnóstico e prognóstico das avaliações depende do critério de compreensão que determinou a escolha das tarefas na elaboração do teste de aquisição. Frequentemente este critério é unicamente a exatidão do resultado obtido, uma vez que o segundo critério se mostra difícil de ser utilizado, os professores e pesquisadores restringem-se a recuperar, na produção dos alunos, a presença de algumas palavras tomados como indicadores. *Em contrapartida, o critério cognitivo é muito pouco considerado*.

3.2 Quais São Os Conhecimentos De Base A Serem Apreendidos: Os Conceitos Ou Os Gestos Exclusivos À Maneira De Trabalhar Em Matemática?

Do ponto de vista matemático, os conhecimentos matemáticos são as definições e os teoremas que estabelecem as propriedades dos objetos matemáticos, tais como os números, as funções, os tipos de relações (métricas, projetivas, afins, topológicas) do espaço e dos objetos desse espaço, etc. Esses conhecimentos permitem justificar novos resultados matemáticos e resolver problemas práticos a partir de dados registrados em situações reais. Mas o ponto essencial aqui é que os conhecimentos matemáticos *SÃO SEMPRE PROPOSIÇÕES que podem ser CONDENSADAS EM PALAVRAS*, palavras que se tornam, simultaneamente, termos matemáticos e conceitos. Os conceitos matemáticos não resultam de um processo de abstração como acontece com os conceitos empíricos, mas de um trabalho lento e complexo de construção que passa pela elaboração de definições, por uma exploração heurística que conduz às conjecturas e pela demonstração dessas conjecturas. Mas, do ponto de vista matemático, não é possível fazer matemática sem utilizar e, deste modo, apreender conceitos matemáticos. De outra forma, faz-se de maneira muito rudimentar e sem algum desenvolvimento possível como é o caso das culturas que não dispunham de um sistema de escrita.

Do ponto de vista cognitivo, a aquisição de conhecimentos matemáticos depende do conhecimento de um mesmo objeto em, ao menos, duas representações diferentes uma vez que os objetos matemáticos não são acessíveis empiricamente. Mas depende também das transformações de representações em novas representações no interior de um mesmo registro. Ora, cada registro exibe possibilidades específicas de transformação que outros registros não o fazem. Assim, os tratamentos específicos às figuras geométricas consistem em reorganizações visuais das formas percebidas e, sobretudo, das suas desconstruções dimensionais (Duval, 2011, p. 89-90). Com as expressões algébricas, os tratamentos consistem na reorganização das expressões, seja de uma expressão, de uma equação pelo deslocamento de termos de um membro a outro. Para a língua natural, as transformações começam em grau zero de organização discursiva, com as diferentes operações verbais possíveis para designar um objeto, etc. (Duval, 2011b, p.78-80). As conversões e tratamentos exclusivos a cada registro constituem o que se pode chamar de gestos intelectuais do trabalho matemático. Os conhecimentos matemáticos de base a serem apreendidos são, em primeiro lugar, os gestos intelectuais necessários para compreender a construção do que agora é sintetizado em "conceitos".

A oposição entre esses dois pontos de vista sobre os conhecimentos matemáticos a serem

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

apreendidos traduz-se, por exemplo, nas questões seguintes: introduz-se as representações gráficas a partir da *noção de função linear* ou, ao contrário, desenvolve-se a coordenação entre a escrita de equações simples do primeiro grau e as variações de posições de uma reta sobre os eixos*, antes mesmo de introduzir a noção de função*? No Ensino Fundamental trabalha-se na decomposição visual de superfícies côncavas ou convexas em feixes de retas antes de introduzir as noções de linhas, de reta, de pontos, de paralelismo ou, de maneira oposta, começa-se por tais noções (Duval e Godin, 2005)? Mais geralmente, a compreensão matemática pressupõe o desenvolvimento da coordenação dos registros de representação semiótica no aluno ou, pelo contrário, a aquisição dos conceitos matemáticos é que vai possibilitar que os alunos mudem de registros de representação, que aprendam a ver tão bem os gráficos cartesianos quanto as figuras geométricas a serem utilizados em matemática, etc.?

3.3 Os Problemas: Aprender A Resolver Ou Aprender A Formular?

A resolução de problemas é a atividade matemática por excelência. Uma das contribuições mais significativas das pesquisas didáticas é tê-la feita a situação principal da aprendizagem matemática. E o único meio de mostrar a utilidade e importância da matemática é propor problemas reais de modo que os conhecimentos ensinados vão possibilitar resolvê-los. Tudo isso tornou-se a regra de ouro da didática, mas a resolução de problemas mantém-se como uma caixa preta para a maioria dos alunos e é lá que se esconde, de maneira frequente e assombrosa, a incompreensão acentuada e durável dos alunos. As pesquisas sobre a resolução de problemas são inumeráveis, quer se trate de problemas aditivos, multiplicativos, transformar na forma de equação um problema e problemas de geometria. Mas todas essas pesquisas deixam na obscuridade talvez a questão a mais importante: o que é um problema de matemática, ou mais exatamente, o que é um problema no ensino de matemática?

Do ponto de vista matemático, os problemas dados no ensino de matemática deixaram de serem problemas para a pesquisa em matemática, são *problemas construídos* com o objetivo de aquisição ou utilização de uma propriedade ou de um determinado procedimento matemático. *Existe, desta forma, um procedimento de construção que permite gerar todos os tipos de problemas possíveis para a utilização de uma propriedade ou de um procedimento matemático.* Parte-se da descrição completa do tratamento matemático elementar correspondente a uma propriedade ou de um procedimento e efetua-se diferentes supressões de dados possíveis de maneira a que os dados restantes possam possibilitar que se encontre os

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

dados suprimidos. Obtém-se, assim, a partir da descrição completa de um tratamento matemático elementar diversas descrições mínimas que correspondem a todos os problemas possíveis resolvíveis com a ajuda dessa propriedade ou procedimento (Duval, 2013). A escolha de uma situação concreta como também a escolha dos valores dos dados (por exemplo, pequenos ou grandes números para o caso dos problemas aditivos e multiplicativos), tornam-se secundários mesmo que isso seja frequentemente considerado como variável didática importante.

Do ponto de vista cognitivo, a dificuldade fundamental na resolução de problemas está no reconhecimento da propriedade ou procedimento a ser utilizado: encontrar significa reconhecer. Nos problemas aditivos e multiplicativos, o reconhecimento conduz à escolha da operação a ser efetuada. Nos problemas de geometria o reconhecimento é muito mais complexo, às vezes por questões de reconhecimento visual das unidades figurais pertinentes e também por uma escolha bem maior de propriedades possíveis (teorema do meio geométrico, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, etc.). Além disso, a análise cognitiva mostra que as conversões de representações necessárias para resolver um problema são muito mais complexas do que aquelas requeridas para construir o problema que é dado para ser resolvido (Duval, 2013). Para os problemas reais a serem resolvidos com a ajuda de propriedades geométricas, será preciso mobilizar, implicitamente ou explicitamente, um esquema intermediário que mostra a relação entre a situação real e a figura geométrica que é uma modelização matemática (Duval, 2011b, p. 95-96). Em outras palavras, como se pode aprender a reconhecer o que é preciso ser utilizado para resolver um problema se não se sabe como elaborá-lo e, sobretudo, se não se explorou todos os tipos de problemas que uma determinada propriedade matemática possibilita encontrar a solução?

A questão sugerida pela oposição entre esses dois pontos de vista é tão crucial quanto é a divisão do papel institucional entre os professores e alunos. São os professores os autores dos manuais ou os experts que constroem os problemas e são os alunos que devem resolvê-los? Como se surpreender, então que a resolução de problemas se mantém uma caixa preta para a maioria dos alunos? Como se surpreender que os conhecimentos matemáticos aprendidos sejam destinados a ser tornarem conhecimentos mortos ou inúteis por todos aqueles que não seguirão carreira científica? De um ponto de vista cognitivo, não se pode aprender a resolver um problema e, deste modo, saber utilizar conhecimentos matemáticos se não se sabe como elaborar os problemas a serem resolvidos. Estes dois tipos de atividades são inseparáveis: aprender a construir os problemas que possam ser resolvidos matematicamente implica, evidentemente, na organização de tarefas específicas (Duval, 2013).

Esta oposição entre o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo vem do fato de que a *atividade matemática possui dois lados*: (1) um é o *lado exposto* que é centrada nos objetos, nas propriedades desses objetos, nos algoritmos e métodos de resolução e; (2) o outro, é o *lado oculto* que concerne as formas de ver, de raciocinar, de pular de uma representação a outra com os objetos que são unicamente acessíveis pelas representações semióticas que se produz. Este lado é oculto porque deixa de ser notado quando se começa a compreender matemática, mas segue irredutível ao lado exposto da matemática, *uma vez que a maneira de fazer matemática é independente dos objetos tratados*. Ela é transversal a todo conteúdo matemático ensinado. Neste sentido, *os métodos de resolução* como os métodos de demonstração revelam o lado exposto da matemática e não o tipo de funcionamento cognitivo que é exigido para "saber como fazer" ou "o que fazer" em matemática para compreender, procurar e encontrar.

4 Os Dois Lados Da Atividade Matemática São Considerados No Ensino E Na Pesquisa Em Educação Matemática?

Com esta questão, dá-se o encontro das discussões e posicionamentos sobre:

– Quais conteúdos matemáticos devem ser ensinados ou não ensinados?
– Quais instrumentos didáticos devem ser utilizados (material, software)?
– Qual tipo de problema deve ser proposto aos alunos?
– Qual teoria escolher?
– A fiabilidade das avaliações;
– A análise das produções verbais dos alunos, etc.

Também, neste caso, é necessário subdividir esta questão em três outras para deixar bem claro os elementos de resposta.

4.1 Quais São Os Objetivos Do Ensino De Matemática Para Os Alunos Até A Idade Dos 15 Ou 16 Anos?

Esta questão põe-se, evidentemente, ao do sistema educativo de um país e ela é, geralmente, examinada de forma separada para os níveis de Ensino Fundamental 1 e Ensino Fundamental 2, uma vez que não são evidentes nem os conhecimentos de base que irão definir

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

os objetivos para cada um desses níveis de ensino e nem mesmo “os experts” que serão consultados em cada caso. Mas, nesses dois níveis, os objetivos vão ser determinados a partir de um único ponto vista, o ponto de vista matemático. Isso se vê na *decomposição dos conhecimentos de base em conceitos (propriedades e algoritmos)* e na *organização de uma progressão de aquisição* sobre os quatro ou cinco anos do nível de ensino. Tome-se, por exemplo, um dos objetivos do Ensino Fundamental 2: a resolução de equações e sua utilização na resolução de problemas.

O método de decomposição deste conhecimento de base, que é na realidade um complexo de conhecimentos, consiste em explicitar os conhecimentos matemáticos pré-requisitos para resolver e utilizar equações. É um processo *top down* que se apresenta no esquema da Figura 1 por flechas com os pontilhados menos espaçados. Este esquema representa não mais do que a primeira decomposição de pré-requisitos. Mediante a repetição desse processo de decomposição, obtém-se para os algoritmos, as regras de prioridades operatórias, a distributividade da multiplicação em relação à adição, a noção de oposto e inverso de um número. Para o caso da equação e da significação do signo “=”, obtém-se as noções de identidade, número de solução, variável (e não incógnita), etc.

Finalmente, o último termo desta decomposição *top down* é a introdução de letras que é o único pré-requisito matemático comum à resolução de equações e sua utilização na resolução de problemas (Duval, 2011c). Assim, o objetivo global de aquisição em todo o Ensino Fundamental 2 é decomposto em uma sequência de objetivos locais a serem alcançados a cada ano em sala de aula.

A organização da progressão do ensino faz-se seguindo a ordem inversa, *botton up*, da decomposição em pré-requisitos matemáticos (flechas es traços contínuos no esquema da Figura 1). Em outras palavras, a ordem de aprendizagem é definida apenas do ponto de vista matemático. Quando se descreve a aprendizagem como uma “construção de conhecimento”, demanda-se, na realidade, aos alunos uma *REconstrução* de conhecimentos partindo dos pré-requisitos os mais elementares ou mais simples, *matematicamente falando*!

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

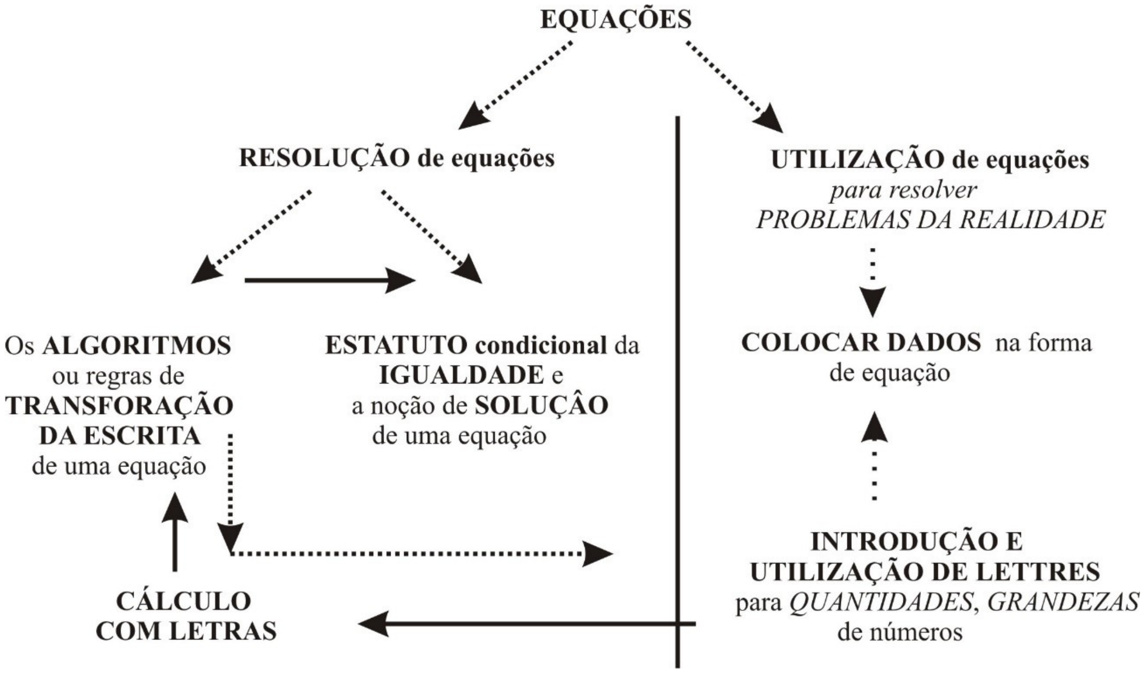

Figura 1: Análise *top down* de um conhecimento de base e organização *botton up* do seu ensino na duração de um ciclo.
Fonte: O autor

Começa-se, deste modo, pela introdução das letras e do cálculo literal e o que é simples torna-se uma fonte de equívocos duráveis, dado que uma letra pode servir, ao mesmo tempo, para uma designação direta de alguma coisa e para uma designação funcional de outra coisa. Na realidade, a introdução de letras é implícita às operações discursivas de designação diferentes entre si e de um jogo variável de conversões, que dizer, de substituições possíveis como se pode ver na Tabela 2[4] a seguir.

É suficiente olhar a coluna LETRAS dessa tabela para constatar que não pode, realmente, haver compreensão por parte dos alunos sem que tomem consciência dos diferentes empregos possíveis de uma letra e de suas conversões com os números (sistema decimal) e com a expressão verbal de propriedades matemáticas, de termos físicos ou de palavras da língua cotidiana.

Além disso, as letras são geralmente introduzidas no quadro da resolução de problemas, o que vai exigir, evidentemente, que se disponha os dados na forma de equação que é uma outra fonte de embaraço para os alunos, *uma vez que não existe um método para fazê-lo, ou seja, um método para pôr em forma de equação os dados de um problema.*

[4] Esta tabela foi elaborada com F. Pluvinage sobre as entradas em matemática e cognitiva da álgebra elementar no Ensino Fundamental 2.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

NÚMEROS	**LETRAS**	**PALAVRAS** (interface verbal, geralmente muda ou esquecida, entre letras e números).
UM número	**Redesignação** direta por uma letra.	Designação direta ou designação indireta por micro-descrição.
UMA LISTA ABERTA de números.	**Condensação** em uma letra. **Varredura dos elementos** de um conjunto de números.	Designação direta do tipo nome próprio para um conjunto de números ou por um tipo de grandeza: velocidade, tempo, área.
LISTAS em que a geração dos números está correlacionada.	**Designação funcional por uma combinação operatória letra-número** "(2n+1)". **Varredura** em um conjunto de números.	**Designação direta de uma propriedade** dos números: "impar". **Designação indireta** por uma micro-discrição (geralmente relativa a uma quantidade ou a uma grandeza).

Tabela 2: variações dos objetos designados e das operações de designação que interveem na introdução de uma letra
Fonte: O autor

O que é repetido como um refrão nos manuais escolares depois de um século é tão vago quanto a descrição de um plano a ser seguido para a elaboração de uma dissertação. Pôr em equação os dados de um problema exige o recurso às representações auxiliares bidimensionais cuja utilização não depende de algum conceito e nem de algum conhecimento matemático (Duval, 2002).

4.2 O Que Determina A Escolha De Uma Teoria De Aprendizagem Para A Organização Do Trabalho Em Sala De Aula?

Para começar, *o trabalho em sala de aula é organizado em função da aquisição dos conceitos* que foram institucionalmente fixados. O tempo consagrado à aquisição de diferentes conceitos será, deste modo, de uma ou duas sessões por semana em um período de tempo que excede, raramente, quatro ou cinco semanas. E é nesta breve escala de tempo em que as sequências didáticas que visam a aquisição de um conceito são organizadas. Neste quadro institucional que foge totalmente ao professor e que ele deve se submeter, dois fatores vão determinar a escolha de uma teoria de aprendizagem: (1) o primeiro fator é o grau de complexidade do conceito matemático a ser ensinado que deve ser considerado. Um dos meios de análise da complexidade é a história da sua emergência e de seu desenvolvimento; (2) o

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

segundo fator é que a teoria deva ser uma teoria de formação dos conceitos que concerne a todos os domínios do conhecimento. E isso explica o recurso sucessivo às teorias construtivistas, empiristas, pragmáticas de aprendizagem (Ver 2.3) uma vez que, o que se espera dessas teorias importadas é que elas possam ser aplicadas localmente para organizar uma sequência didática cujo objetivo é a compreensão e a apreensão de qualquer que seja o conceito abordado. Assim, em uma escala de um ano e de um nível de ensino, a progressão na apreensão dos conhecimentos está organizada em uma sequência de conhecimentos em que a grande maioria não chega a ver relação: pode-se falar de uma aprendizagem "por migalhas".

Na escolha da teoria que trata da formação dos conceitos, nem o paradoxo cognitivo da matemática nem a ambiguidade epistemológica do termo conceito (Ver 2.3) são, de fato, considerados.

4.3 Qual É O Ponto De Vista Privilegiado Nas Pesquisas De Ensino De Matemática, O Ponto De Vista Do Professor Ou Do Aluno?

Há mais de trinta anos, a formação de professores impôs-se como a preocupação principal de todas as políticas educacionais e, mais particularmente, em matemática. Paralelamente, a isso existe a demanda dos futuros professores, ou dos atuais professores, sobre o que fazer em sala de aula para que os alunos aprendam os conceitos que ensinam. É neste contexto que a organização de sequências de atividades e a maneira de gerir a passagem de um tipo de atividade a outra tornaram-se objeto principal de pesquisa em educação matemática.

O trabalho de observação é, desde modo, feito para testar uma sequência de atividades visando um dos objetivos locais do ano. Como os alunos participam das diferentes tarefas propostas? Como os professores consideram o que os alunos fazem e o que explicam? Os dados coletados são as interações orais com o professor e com os outros alunos e é com este tipo de dados que é utilizado para dizer se o trabalho em sala de aula caminha bem e, deste modo, se os alunos assimilaram o que lhes foi ensinado. *Teaching/learning*: é revelador que duas palavras sejam atualmente sempre utilizadas juntas como se a compreensão da matemática pelos alunos dependesse unicamente da maneira de ensinar.

Ora, o problema que causa a organização das sequências de atividades didáticas é que cada uma delas recobre atividades cognitivas heterogêneas, *uma vez que qualquer atividade matemática funde diversas tarefas cognitivas*. Desta forma, a formulação é desde já ativa, implicitamente ou explicitamente, na fase de ação, ao menos como uma linguagem para si mesmo na realização de uma manipulação. A análise cognitiva leva, deste modo, a separação dessas diferentes tarefas cognitivas, cada uma requerendo um funcionamento cognitivo específico, frequentemente ao encontro do funcionamento cognitivo comum. Vê-se, então a necessidade de elaborar tarefas cognitivas com o propósito de aumentar a consciência dos diferentes funcionamentos cognitivos que um tipo de atividade ou sequência de atividade matemática recobre. Sem a apropriação de tais tarefas no ensino, a maioria dos alunos não irá superar o primeiro patamar de compreensão, o que viabiliza a identificação do conhecimento matemático a ser utilizado para resolver o problema, mesmo que seja o caso de um problema denominado “concreto”.

Todas as observações que se pode fazer quanto a escolha dos objetivos de ensino de matemática, sobre a organização de ensino em escala de um nível de ensino e sobre a organização do trabalho em sala de aula convergem para a mesma conclusão: o lado oculto da matemática, quer dizer, a maneira de pensar e trabalhar que é própria da matemática, não tem lugar no ensino de matemática no nível Fundamental. Foi preciso a colaboração ativa e a acolhida dos professores em suas salas de aula para que se pudesse fazer observações em longos períodos e que, ainda mais, aceitaram organizar experiências complementares. Foi na base desta colaboração, em sala de aula, com os professores e alunos e também com discussões abertas é que foi elaborada a teoria dos registros de representação semiótica.

5 Conclusão

O objetivo prioritário do ensino de matemática deve ser o de fazer com que os alunos entrem na maneira de pensar e trabalhar que é específica da matemática. É a condição cognitiva para compreender matemática e saber como utilizar, em situações da realidade, os conhecimentos apreendidos. Para atender este objetivo, atividades específicas devem ser elaboradas em função das variáveis cognitivas que correspondem a maneira de ver, designar, definir, raciocinar que cada registro permite pôr em prática. O reconhecimento espontâneo de um mesmo objeto em representações distintas é o primeiro umbral a ser superado para que o aluno não se sinta perdido em uma atividade de sala de aula.

A teoria dos registros de representação impõe a reflexão sobre a maneira unilateral em que o ensino da matemática é organizado no Ensino Fundamental. Tudo aí é feito de forma definitiva do ponto de vista matemático, uma vez que é centrado nas aquisições sucessivas de conceitos e nos procedimentos associados a esses conceitos. Diferentemente, a teoria dos

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

registros propõe analisar aquilo que se chamou o lado oculto da matemática que não tem nenhum interesse quando se passa ao outro lado do espelho, quer dizer, quando se começa a trabalhar um pouco como os matemáticos fazem.

A teoria dos Registros não é uma teoria geral e fechada, ela é, primeiramente, um instrumento para analisar as atividades e os problemas elaborados pelo professor assim como as produções dos alunos. Mas, sobretudo, abre novos campos de pesquisa sobre a visualização em geometria, sua articulação entre língua e visualização; sobre a maneira de introduzir a álgebra e sobre uma abordagem na resolução de problemas.

A teoria dos registros coloca-se, de forma decisiva, do ponto de vista dos alunos, da incompreensão surda e persistente que ressentem na aprendizagem da matemática, e não do ponto de vista do professor. O ponto de vista dos alunos é importante para a formação de professores, uma vez que na realidade cotidiana da sala de aula, os professores encontram-se diante de uma situação complexa que vem da inadequação frequente entre a sequência planificada e o que os alunos fazem realmente, e também em relação ao desnível dos alunos em uma mesma sala de aula. Os professores devem, então como médicos em uma consulta com pacientes, diagnosticar as incompreensões persistentes que se escondem nos erros locais ou nos bloqueios e procurar encontrar tarefas ou exercícios que vão ajudar os alunos a superar esses bloqueios.

Termina-se este texto por uma reflexão a partir de uma frase que um aluno de 13 anos fez há mais de quarenta anos no período até então entusiástico da reforma da matemática. Esta reflexão vem muitas às vezes ao pensamento uma vez que exprime, perfeitamente, o problema da compreensão em matemática: “Les mathématiques, Monsieur, ce n’est pas logique!”.

Referências

Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif e apprentissage de la démonstration. Educational Studies in Mathematics, n. 22/3, pp. 233-261.

Duval R. (1991). L´apprentissage de l´algèbre et le problème cognitif de la désignation des objects. Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16, v. IV, 1901-2001 (pp. 67-94). (Ed. J. Ph. Drouhard et M. Maurel). IREM de Nice.

Duval R. (2002). L’apprentissage de l’algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16, Volume IV, 1901-2001 (p.67 - 94) (Ed. J. Ph. Drouhard et M . Maurel) IREM de Nice.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l´apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didctique et des Sciences Cognitves, n. 10, pp. 5-53.

Duval, R. (2006a). Un tema crucilla en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p01

de representación. La Gaceta de la RSME, v. 9.1, pp. 143-168.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Special issue, Educational Studies in Mathematics, n. 61, pp. 103-131.

Duval, R. (2006c). Quelle sémiotique pour l´analyse de l´activité et des productions mathématiques? Relime, Numero especial, pp. 45-81. Clame.

Duval R. (2011a). Preuves et preuve : les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. Du mot au concept. Preuve, 33-68. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R. (2011b). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. (Org. Tânia M. M. Campos e Trad. Marlene A. Dias). São Paulo: Proem Editora.

Duval R. (2011c). Dois olhares opostos sobre os pontos críticos do ensino de álgebra no ensino fundamental. In T. M. M. Campos, U. D´Ambrosio, V. Y. Kataoka, M. Karrer, R. N. Lima, S, h. A. A. Fernandes. Anais do III SIEMAT.

Duval R. (2011d). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles T. Moretti. Revemat, v. 6, n. 2, pp. 96-112.

Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1853

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l´acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment poser pour devenir capable de les résoudre ? Revemat, v. 8, n. 1, pp. 1-45. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1977.

Duval R. (2015). Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Baillé, J., Lima, J. (Eds), Du mot au concept. Figure. pp. 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval, R. e Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. Grand N, n. 76, pp. 7-27.

Frege, G. (1971). Écrits logiques et philosophiques. Trad. Imbert. Paris : Seuil.

Vergnaud, G. e Durand, C. (1976). Structures additives e complexité psychogénétique. Revue Française de Pédagogie. 36, pp. 28-43.