ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

Os Aspectos “Ver E Ver-Como” E O Número De Ouro Na Perspectiva Wittgensteiniana Da Linguagem

Aspects "Seeing And Seeing-As" And The Number Of Gold In Wittgensteinian Perspective Of Language

Pablo Roberto de Sousa Neto *
Instituto Federal do Maranhão – IFMA
Marisa Rosâni Abreu da Silveira **
Universidade Federal do Pará – UFPA
Luciano Augusto da Silva Melo ***
Secretaria de Educação do Pará – SEDUC/PA

Resumo

O presente texto tem o objetivo de apresentar a perspectiva wittgensteiniana acerca das expressões *ver* e *ver-como,* com foco voltado para o ensino e aprendizagem da matemática, em particular, da geometria. Nesse sentido, procuramos destacar o conceito de *número de ouro*, na perspectiva da linguagem, a partir de um breve histórico e sua constituição como objeto matemático propriamente dito, além de suas aplicações em outros ramos do conhecimento. Para tanto, discorremos sobre a percepção de aspectos visuais, com ênfase na segunda fase da filosofia de Wittgenstein, no intuito de mostrar que as interpretações subjetivas de objetos matemáticos, por parte dos estudantes, muitas vezes são investigadas em detrimento da linguagem. Fizemos, portanto, algumas analogias no âmbito da Educação Matemática, cujas observações nos permitiram destacar que a má compreensão dos conceitos matemáticos pode estar associada à carência de perspicuidade. Por conseguinte, ressaltamos que os aspectos ver e ver-como podem ser entendidos como *técnicas* subjacentes às atividades docentes evidenciadas por meio de *jogos de linguagem* no ensino da matemática.

Palavras-chave: Número de ouro; Linguagem; Ver e ver-como

* Doutorando junto ao Programa de Pós-graduação da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC/UFPA). Professor do Instituto Federal do Maranhão (IFMA), Timon, Maranhão, Brasil. E-mail: pablo.neto@ifma.edu.br
** Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora Adjunta do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: marisabreu@ufpa.br
*** Doutor em Ensino de Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor da Secretaria de Educação do Pará (SEDUC/PA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: luciano.melo10@gmail.com

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

Abstract

The present text aims to present the Wittgensteinian perspective on the expressions see and see how, with facing focus on the teaching and learning of mathematics, in particular, of geometry. In this sense, we try to highlight the concept of gold number, in perspective of language, from a brief history and its constitution as a mathematical object proper, besides its applications in other branches of knowledge. To do so, we discuss about the perception of visual aspects, with emphasis on the second phase of Wittgenstein's philosophy, in order to show that the subjective interpretations of mathematical objects, on the part of students, are often investigated at the detriment of language. We have therefore made some analogies in scope Mathematical Education, whose observations allowed us to emphasize that the misunderstanding of mathematical concepts may be associated with the lack of perspicuity. Therefore, we emphasize that the seeing and seeing-as aspects can be understood as techniques underlying the teaching activities evidenced through language games in the teaching of mathematics.

Keywords: Number of gold; Language; Seeing and seeing-as

1 Introdução

Percebemos durante nossa caminhada profissional – enquanto professores de matemática – que os estudantes apresentam dificuldades na percepção de aspectos de objetos matemáticos[1]. A nosso olhar, essas dificuldades contribuem para a falta de compreensão dos conceitos matemáticos. Grande parte dos estudantes não consegue interpretar corretamente aquilo que o professor ensina, mormente se as técnicas e metodologias empregadas limitam-se à simples exposição dos conteúdos relacionados aos objetos matemáticos. Nesse sentido, não raro, um objeto matemático passa a ser associado equivocadamente a objetos do cotidiano, por meio de ilustrações. Como, por exemplo, um quadro pendurado na parede, cuja forma se assemelha a um retângulo. Não obstante, os estudantes, de modo subjetivo, tendem a achar/concluir que aquele quadro é o objeto matemático *retângulo*. Certas implicações acerca da compreensão dos conceitos matemáticos surgem também quando o professor utiliza, em sua exposição, a linguagem matemática como se os estudantes já dominassem seus códigos e simbologias.

A linguagem que usamos em sala de aula é polissêmica tal qual a dos estudantes. Nesse sentido, os estudantes por não apresentarem domínio da linguagem matemática fazem leituras equivocadas sobre os significados dos objetos matemáticos. Assim, impende ao professor de matemática estabelecer relações entre essas duas linguagens, já que os códigos e

[1] O objeto matemático para fins do exposto neste artigo não trata de objetos 'sensíveis' encontrados na realidade/cotidiano. Por conseguinte, números, expressões algébricas, figuras geométricas, funções e gráficos, por exemplo, são, para nós, objetos matemáticos.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

símbolos matemáticos não possuem oralidade. Nesse âmbito, Silveira destaca que uma "regra matemática aplicada em contextos diferentes assume sentidos diferentes, assim como um determinado símbolo utilizado em situações distintas pode apresentar significados diferentes" (Silveira, 2014, p. 8). É assim que o objeto triângulo, por exemplo, é visto de modo distinto na música, no trânsito e na matemática, ou seja, o contexto determina que o sentido e o significado está no *uso* de nossas palavras (Wittgenstein, 2013).

Amparados em nossas experiências e memórias docentes, notamos que os estudantes apresentam dificuldades em assimilar conceitos geométricos. Isso porque diversos objetos matemáticos do campo da geometria não fazem parte de seus linguajares. Por conseguinte, para eles, identificar apótemas, vértices, diagonais etc., não se caracteriza como algo simples. As habilidades conceituais acerca dos objetos matemáticos muitas vezes não fazem parte das formas de vida dos estudantes, por outro lado, subjazem aos professores em função de suas atividades técnicas.

A descrição detalhada de objetos matemáticos pelo professor auxilia o estudante na compreensão de conceitos na medida em que seu repertório se amplia/alarga. As formas de *ver* na qual devem ser submetido o estudante quase sempre estão relacionadas a conceitos que não necessariamente pertencem a sua linguagem, que é cotidiana. Por isso, tais objetos lhes parecem estranhos. Para o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein (2013), o sujeito pode ver o objeto uma vez de um jeito, outra vez de outro jeito, isto é, esse olhar pode mudar. Essa variação subjetiva, no entanto, provoca diversas interpretações. Na sala de aula, há por vezes certos desacordos/desencontros provocados ora pela polissemia da linguagem natural[2], ora pelos códigos e símbolos da linguagem matemática. Contudo, é nesse interim que as diferenças de linguagem entre contextos e significados precisam ser esclarecidas.

Durante séculos, muitos matemáticos preocuparam-se em estudar cronologias numéricas como, por exemplo, a de π (pi), o que fez com que elaborassem conjecturas e desenvolvessem demonstrações por diferentes métodos. Nesse bojo, o *número de ouro* parece ter exercido fascínio semelhante, não só entre os matemáticos, mas de forma similar no mundo da arte, arquitetura e natureza. Assim, alguns episódios que tratam da constituição dos números em diversos períodos históricos ilustram também parte de nossas atividades docentes. Pensando por este viés, procuramos destacar o conceito de número de ouro, na

[2] Entendemos por linguagem natural as expressões e palavras da língua materna (portuguesa) pronunciadas no cotidiano, diferenciadamente da linguagem matemática.

perspectiva da linguagem, a partir de um breve histórico e sua constituição como objeto matemático propriamente dito, além de suas aplicações em outros ramos do conhecimento.

O presente texto tem o objetivo de apresentar a perspectiva wittgensteiniana acerca das expressões *ver* e *ver-como*, por meio de uma discussão teórica que se destina ao ensino e aprendizagem da matemática, em particular, da geometria. Assume, portanto, característica qualitativa no âmbito da Educação Matemática. Compõem este estudo três seções, a saber: na primeira, apresentamos um breve histórico sobre o número de ouro e sua constituição como objeto matemático propriamente dito; na segunda, destacamos a perspectiva wittgensteiniana da linguagem acerca do conceito de ver e ver-como; por fim, procuramos estabelecer relações por meio dos diferentes usos do número de ouro, atribuindo às expressões ver e ver-como a condição de *técnica* que pode ser usada pelos professores para elucidar conceitos e simbologias da linguagem matemática.

2 O Número De Ouro

Na matemática, recebe o nome de *número de ouro* o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, expresso de modo decimal por $1{,}61803398874989484820 45 \ldots$. Esse número no "século XIX recebeu o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Seção Áurea". Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de "Proporção Divina" " (Livio, 2006, p. 13). O símbolo habitualmente usado para representar a Razão Áurea era a letra grega *tau* (τ), que significa "corte" ou "seção". Entretanto, no "início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Fi (Φ), a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C." (Livio, 2006, p. 16).

Há no meio acadêmico, registros de que o número de ouro foi utilizado na arte, como, por exemplo, em pinturas de Botticelli, Salvador Dalí e Leonardo da Vinci. Há ainda, registros que apontam a presença do número de ouro em construções arquitetônicas como a Grande Pirâmide de Gisé. Seu uso pode ser notado, também, na natureza, a exemplo da disposição das sementes do girassol e do traçado curvilíneo do náutilo (molusco marinho). Em função de observações como essas, o número de ouro tornou-se alvo de interesse na história da humanidade por muitos estudiosos da matemática, dentre eles: Euclides, Pitágoras e Leonardo de Pisa (conhecido como Fibonacci). Pitágoras, por exemplo, participava de um grupo de intelectuais que mantinham entre si regras de condutas internas misteriosas em torno

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

desse número. O grupo buscava, por exemplo, relações harmônicas em diversas aplicações por meio de cálculos na geometria acerca de razões e proporções (Livio, 2006).

Para Ostrower, as configurações da proporção de ouro se constituíram como formas de expressão conduzidas por sentimentos e valores humanos da época, conforme excerto:

> Surgiu como que envolta numa áurea transcendental. Num misto de reverência e assombro ela foi denominada ‘proporção divina’, ‘corte de ouro’, ‘áurea’, sendo especificamente reservada para obras de cunho místico e de exaltação espiritual. E ao planejarem e executarem estas obras, em cada mínimo detalhe, os artistas e arquitetos tinham plena consciência de que estavam lidando com valores mais sublimes do ser humano (Ostrower, 1998, p. 244).

A primeira “definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como a Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria” (Livio, 2006, p. 13). Nessa definição, Euclides chamou de “razão extrema e média” a proporção numérica obtida a partir da simples divisão de um segmento de reta. De forma simplista, diz-se que um segmento de reta é cortado na razão extrema e média quando a medida do segmento todo está para a medida do maior segmento resultante do corte assim como a medida deste está para a medida do menor.

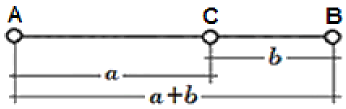


Figura 01: razão extrema e média por Euclides
Fonte: figura construída pelo autor

Com outras palavras, se fixarmos o nosso olhar na Figura 01 notaremos, dentre outros aspectos, que “a linha AB certamente é maior que o segmento AC. Ao mesmo tempo, o segmento AC é maior que o CB” (Livio, 2006, p. 14). Desse modo, se “a razão do comprimento de AC para o comprimento de CB for igual à razão de AB para AC, então a linha foi cortada na razão extrema e média, ou numa Razão Áurea” (Livio, 2006, p. 14).

Dessarte, considerando os dados assinalados na Figura 01, podemos matematizar o sobredito do seguinte modo: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$. A verificação de tal relação pode ser feita por meio do uso das regras matemáticas conforme os passos subsequentes:

1. Olhando para a relação acima podemos perceber, dentre outros aspectos, que: $\frac{a}{b} = \Phi$. Isso implica na seguinte igualdade: $a = \Phi \cdot b$.

2. Substituindo o resultado do passo anterior na igualdade $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, encontra-se: $\frac{\Phi \cdot b}{b} = \frac{\Phi \cdot b + b}{\Phi \cdot b}$. Nesta, se olharmos para o numerador da segunda fração algébrica como um produto da forma $(\Phi + 1) \cdot b$, podemos escrevê-la da seguinte maneira: $\frac{\Phi \cdot b}{b} = \frac{(\Phi+1) \cdot b}{\Phi \cdot b}$.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

3. Simplificando o resultado encontrado no passo 2, verifica-se que: $\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi}$.

4. Multiplicando ambos os membros da igualdade do passo 3 por Φ, tem-se que: $\Phi^2 = \Phi + 1$, ou $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

5. Resolvendo a equação $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, conclui-se que: $\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6. Como o problema trata de medida de comprimento, a solução é aquela que exprime um valor positivo, ou seja, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Apresentamos a demonstração acima para destacar os cálculos por trás do número de ouro, entretanto, não vamos nos aprofundar nesse aspecto, deixamos outras demonstrações e curiosidades a critério do leitor. O nosso propósito principal é apresentar o conceito wittgensteiniano de ver e ver-como na perspectiva da linguagem, no intuito de que possamos estabelecer algumas relações entre o objeto matemático número de ouro e suas aplicações, tendo como foco as atividades geométricas desenvolvidas no contexto de sala de aula. Para tanto, na perspectiva de mostrarmos em que contexto elas foram pensadas, destacamos alguns episódios da História da Matemática para situar nosso ponto de vista e mostrar possíveis relações com a linguagem matemática.

Outra aplicação para o número de ouro pode ser evidenciada na Figura 02, que destaca na geometria o chamado *retângulo de ouro*, cujo quociente da medida do maior lado pela medida do menor resulta no número de ouro. Esse retângulo conserva uma propriedade 'intrigante', que surge quando suprimido um quadrado de lado AD, por exemplo, ADFE, do retângulo de ouro ABCD, o retângulo restante, CBEF, é semelhante ao retângulo original.

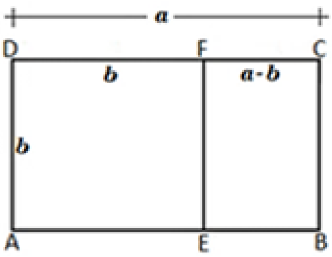


Figura 02: retângulo de ouro
Fonte: figura construída pelo autor

Considerando as medidas das dimensões iniciais listadas na Figura 02, a propriedade descrita traduz-se matematicamente por meio da relação: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \Phi$. Contendo o retângulo inicial a proporção de ouro, é possível repetir a operação de 'suprimir quadrados' de forma indefinida, obtendo-se sequencialmente retângulos semelhantes, ao que vemos na Figura 03.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

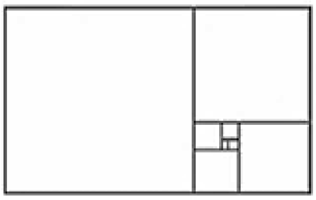


Figura 03: supressão de quadrados
Fonte: figura construída pelo autor

Por esta perspectiva, partindo de um retângulo de ouro como o da Figura 03, por exemplo, um retângulo do tipo MNOP, podemos obter a chamada *espiral de ouro*, conforme Figura 04, adotando o mesmo procedimento de forma indefinida.

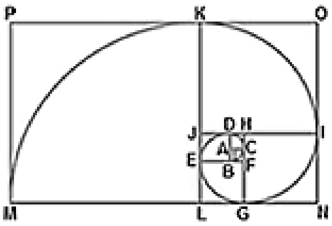


Figura 04: espiral de ouro
Fonte: figura construída pelo autor

Outro objeto matemático que apresenta medidas que na forma de razão tem como resultado o número de ouro é o chamado pentágono regular (Figura 05), também denominado *pentágono de ouro*. O pentágono regular caracteriza-se por possuir lados e ângulos congruentes. Dentre as possíveis relações com suas medidas, duas merecem destaque, a saber:

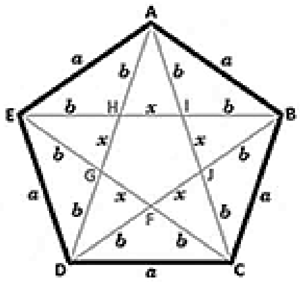


Figura 05: elementos do pentágono regular
Fonte: figura construída pelo autor

1. As diagonais se dividem na razão de ouro. Considerando as medidas indicadas na Figura 05, a propriedade descrita pode ser matematizada do seguinte modo: $\frac{b+x}{b} = \Phi$.

2. As diagonais estão em razão de ouro com os lados. Isto é, $\frac{b+x+b}{a} = \Phi$.

Existem outros modelos matemáticos que apresentam como resultado o número de ouro, mas os apresentados aqui são razoáveis para o atendimento do objetivo proposto. Procuramos ilustrar, portanto, do ponto de vista da matemática, o objeto matemático número

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

de ouro com base em construções (imagens). O aspecto imagético, e não somente esse, é de nosso interesse neste artigo.

3 A Linguagem E O Conceito Wittgensteiniano De *Ver* E *Ver-Como*

Com o intuito de descrever as ideias wittgensteinianas que servirão de alicerce para esta pesquisa, compreendemos ser pertinente uma breve distinção entre o que os comentadores chamam de "primeiro Wittgenstein" e "segundo Wittgenstein". O primeiro é o Wittgenstein do *Tractatus Logico-Philosophicus* (Tratado Lógico-Filosófico), primeiro livro publicado (1922). O segundo, o Wittgenstein das *Investigações Filosóficas*, publicado postumamente (1953).

Este trabalho firma seu alicerce na filosofia do segundo Wittgenstein, em que nessa segunda fase de seu pensamento abandona quase por completo sua tese inicial, ou seja, a perspectiva da linguagem que ele mesmo apresenta nas páginas iniciais das Investigações Filosóficas, fazendo críticas à visão referencial da linguagem proposta por Santo Agostinho na obra *Confissões*. Após fazer uma espécie de autocrítica sobre seus escritos do *Tractatus*, Wittgenstein mostra-se compungido de ter trilhado, por algum tempo, caminho semelhante ao que apregoavam os pensamentos agostinianos acerca da linguagem. Suas cogitações e argumentos começaram a fluir o sentido de que o significado de uma palavra não poderia ser dado de forma designatória, e passou a adotar o seguinte princípio em sua nova filosofia: "O significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (Wittgenstein, 2013, p. 38). Assim, Wittgenstein muda o rumo e a forma de enxergar o mundo pelo viés da linguagem, passando a enfatizar que o *significado* de uma palavra depende do seu *uso* nos diversos *contextos linguísticos*.

Nas Investigações Filosóficas, o filósofo cunha a expressão *jogo de linguagem*, que amplia consideravelmente o universo e o escopo de suas discussões acerca das diferentes interpretações sobre aquilo que dizemos e suas aplicações nos diversos contextos. O conceito de jogo de linguagem aparece nas Investigações Filosóficas conforme a seguinte passagem:

> A expressão "*jogo* de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
> Ordenar, e agir segundo as ordens –
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer suposições sobre o acontecimento –
> Levantar uma hipótese e examiná-la –

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

> Apresentar o resultado de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; e ler –
> Representar teatro –
> Cantar cantiga de roda –
> Adivinhar enigmas –
> Fazer uma anedota; contar –
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
> Traduzir de uma língua para outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.
> - É interessante comparar a variedade de instrumentos da linguagem e seus modos de aplicação, a variedade das espécies de palavras e de frases com o que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem (Inclusive o autor do *Tratado Lógico-Filosófico*) (Wittgenstein, 2013, p. 27).

Wittgenstein elabora o conceito de jogo de linguagem por meio de uma analogia entre as regras de um jogo e as regras que precisam ser seguidas no contexto da linguagem em que as palavras estão inseridas. As expressões linguajeiras explicitadas no excerto anterior, onde aparecem inúmeros exemplos de ações, nos leva à conclusão de que para jogar um jogo de linguagem devemos seguir ou ser guiados por regras.

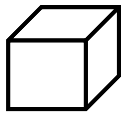
Outra expressão wittgensteiniana que usaremos neste texto chama-se *ver e ver-como*, que aborda pelo viés da linguagem aspectos relacionados à forma pela qual vemos as coisas/objetos. O nosso ver, nossa forma de olhar, que parece estar condicionada ao campo visual determinado pelo vaguear de nossos olhos, é, também, na perspectiva wittgensteiniana, uma atribuição da linguagem. Assim, Wittgenstein ressalta que o limite de nosso mundo está relacionado com o limite de nossa linguagem (Wittgenstein, 2013). Por meio dessa expressão, o filósofo nos permite compreender que aquilo que conhecemos depende da amplitude do nosso vocabulário. Olhando por essa perspectiva, no contexto da linguagem, formulamos a seguinte pergunta: quando direcionamos o nosso olhar para um determinado tipo de objeto matemático, vemo-lo de que forma? Através de um suposto 'olho' da mente? Conforme nossas leituras de mundo e da extensão, quiçá, da limitação das palavras que residem em nosso vocabulário?

Com base no pensamento wittgensteiniano, Bouveresse destaca que "é impossível estabelecer uma distinção precisa entre ver e interpretar" (Bouveresse, 1973, p. 201). Assim, o conceito de ver e ver-como está intimamente imbricado ao conceito de *interpretar*, uma vez que, segundo Wittgenstein, interpretar é um modo de pensar:

> "É um pensar? É um ver?" Não seria isso equivalente a "É um *interpretar*? É um ver". E interpretar é uma espécie de pensar, e frequentemente ocasiona uma repentina mudança de aspecto. Posso dizer que ver aspectos está *relacionado* com interpretar? Minha inclinação era de fato dizer: "É como se eu *visse* uma *interpretação*". Pois bem, a expressão desse ver está relacionada com a expressão do interpretar (Wittgenstein, 1998, p. 26).

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

Para explicar os aspectos ver e ver-como, elencamos dois exemplos que foram extraídos das Investigações Filosóficas. O primeiro destaca o seguinte:

> Poder-se-ia imaginar que a ilustração
>
> 
>
> aparece em várias partes de um livro, por exemplo, de um livro escolar. No texto adjunto, fala-se que se trata cada vez de algo diferente: Uma vez de um cubo de vidro, outra vez de uma caixa aberta virada, de uma armação de arame que possui esta forma, de três tábuas que formam um ângulo. A cada vez o texto interpreta a ilustração (Wittgenstein, 2013, p. 254).

O outro exemplo é com relação à figura de Jastrow (Figura 06). Fixando o olhar nessa figura e observando seus traços, vê-se uma cabeça de coelho ou uma cabeça de pato?

Figura 06: coelho-pato de Jastrow
Fonte: Investigações Filosóficas (2013)

Para o autor das Investigações Filosóficas, aquilo que pode ser visto também pode ser descrito por meio da linguagem. Assim, nós podemos ver a ilustração de Jastrow de modos diferentes, ora como coelho, ora como pato, conforme a indagação anterior, e até mesmo nada significar, caso esta imagem nunca tenha sido vista. Portanto, "nós é quem a interpretamos, e a *vemos* como a *interpretamos*" (Wittgenstein, 2013, p. 254).

Na concepção wittgensteiniana, o " "ver como..." não pertence à percepção. E, por isso, ele é como um ver e de novo não é como um ver" (Wittgenstein, 2013, p. 258). Desse modo, uma pessoa ao ver a figura ilustrada no primeiro exemplo, pode não vê-la como uma armação de arame, caso nunca tenha vivenciado tal forma. Se o objeto não está/foi previamente bem definido ou se a imagem fica por conta de nossa imaginação, o aspecto viaja em nossos pensamentos e pode ser interpretado por *n* maneiras diferentes.

No segundo exemplo, um sujeito somente é capaz de visualizar um pato ou um coelho caso tenha vivenciado empiricamente de algum modo a imagem de pato ou coelho, isto é, a percepção está atrelada ao conceito incorporado por aquele que vê. Sobre isso, Gottschalk assinala que:

> Ver imediatamente na figura um coelho implica em já dominarmos uma série de técnicas de apresentação do simples. Já nos apresentaram coelhos, sabemos que se trata de um animal, que come cenouras, tem orelhas grandes, comparamos vários

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

> coelhos entre si, etc. São esses diversos empregos da palavra "coelho" que nos permitem atribuir significado aos traços empíricos diante de nossos olhos e atribuir significado à figura. Ver a mesma figura *como* pato, também pressupõe que se tenha de antemão o conceito de pato, e que se possa lançar mão de determinadas técnicas de comparação, para que se atribua aos mesmos traços empíricos o significado de pato (Gottschalk, 2006, p. 75-76).

Desse modo, o "problema não é um problema causal, mas um problema conceitual" (Wittgenstein, 2013, p. 266). Assim, há certa estranheza em achar que o objeto mudou diante dos nossos olhos, mas se já vivenciamos diferentes aspectos, uma possível relação de estranheza sobre certos objetos se desfaz quando conceitos já conhecidos foram por nós assimilados. Isto impede, por exemplo, que haja confusões entre as palavras pato e coelho, desde que estes conceitos nos tenham sido apresentados e tenham sido captados pelo nosso olhar. Wittgenstein afirma que o "substrato dessa vivência é o domínio de uma técnica" (Wittgenstein, 2013, p. 272). Desse modo, o fato de ver um objeto ora de um jeito, ora de outro, não está relacionado a processos mentais, mas ao domínio de técnicas.

Dessarte, com relação a *perceber um aspecto*, Wittgenstein afirma que isso ocorre quando alguém contempla um objeto e de repente nota sua semelhança com outro, com a clareza de que o objeto não mudou, apenas o modo de olhar é que se torna diferente (Wittgenstein, 2013). Para o filósofo, o "conceito de aspecto é parente do conceito de representação. Ou: o conceito 'vejo-o agora como...' é parente de 'represento-me agora *isto*' " (Wittgenstein, 2013, p. 277). Assim, conclui que: "Interpretar é pensar, agir; ver é um estado" (Wittgenstein, 2013, p. 276).

Ainda sobre o contexto do ver e ver-como, Wittgenstein discorre também sobre o que chamou de *cegueira para o aspecto*. Segundo o filósofo, alguém cego para o aspecto não consegue ver mudar os aspectos em determinados objetos. Em sua investigação conceitual, Wittgenstein, 'aparenta' a cegueira para o aspecto à falta de "ouvido musical", fazendo uma analogia do sujeito que não "vê como..." com o sujeito que não "ouve como...". É algo do tipo: – você não consegue ver os traços de Joan Miró naquela pintura? – As notas musicais desta obra sugerem que é Mozart, escute! – O ortocentro é ponto de encontro das alturas de um triângulo, veja!

Nossa hipótese, com base nos argumentos de Wittgenstein é de que a carência conceitual implica na cegueira para o aspecto. Nesse caso, o que é visual se entrelaça com a linguagem, isso faz parte do jogo de linguagem. Assim, o aspecto e a palavra caminham juntos dando sentido ao contexto em que são empregados.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

4 O Número De Ouro E Os Aspectos *Ver* E *Ver-Como*

Como visto, elencamos alguns registros para corroborar com nossas ilações. Vamos retomar agora esses registros para estabelecer relações entre os aspectos ver e ver-como e o número de ouro, com o intuito de ilustrar algumas atividades no âmbito da matemática no contexto educacional. Para tanto, pretendemos sustentar nossa hipótese de que a falta de percepção ou *cegueira para o aspecto* se deve à carência de perspicuidade no ensino da matemática.

Não é raro encontrar na literatura ilações de que o número de ouro tenha sido usado na arte, arquitetura e natureza. A autora Malba Tahan evidencia, em seu livro “As maravilhas da matemática”, que a divisão “mais agradável ao espírito, aquela que tem a preferência dos artistas, dos arquitetos, dos pintores, dos escultores e dos gravadores é precisamente a *divisão em média e extrema razão*” (Tahan, 1973, p. 235-236). Outro autor, Mario Livio, afirma que a “fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido as bases de sua ubiquidade e seu apelo” (Livio, 2006, p. 16).

Há em diversos artigos publicados em periódicos, afirmações de que obras como “O Nascimento de Vênus” de Botticelli (Figura 07), “O Sacramento da Última Ceia” de Salvador Dalí (Figura 08) e “Mona Lisa” de Leonardo da Vinci (Figura 09) foram pintadas em face do retângulo de ouro (Câmara & Rodrigues, 2008; Oliveira & Ferreira, 2010; Silva & Barros, 2014). Com relação à arquitetura, encontramos ilações sobre a construção da Grande Pirâmide de Gisé acerca de medidas que na forma de razão se aproximam do número de ouro (Oliveira & Ferreira, 2010; Martins, 2008). Encontramos, também, registros de que elementos da natureza, como a disposição das sementes do girassol (Figura 11) e a concha do náutilo (Figura 12), são vistos por meio dos traços da espiral de ouro (Souza, 2013; Francisco, 2017; Câmara & Rodrigues, 2008). Assim, registramos alguns desses usos para endossar nossa discussão.

A obra de Botticelli, feita de têmpera sobre tela, possui aproximadamente $172\ cm$ de altura e $278\ cm$ de largura (Martins, 2015; Lacerda, 2014; Gomes, 2010). Considerando tais medidas, nota-se que o resultado da divisão da medida da largura pela medida da altura é próximo do número de ouro, aproximação, em três casas decimais, igual a $1{,}616$. Não encontramos na literatura registros onde pudéssemos nos apoiar para afirmar se de fato Botticelli tinha conhecimento do conceito de retângulo de ouro. Como contraparte, vimos que

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

a autora Ostrower, ao cogitar sobre o número de ouro, afirma categoricamente que ao "planejarem e executarem estas obras, em cada mínimo detalhe, os artistas e arquitetos tinham plena consciência de que estavam lidando com valores mais sublimes do ser humano". Entretanto, considerando tais medidas, podemos afirmar que elas não são as medidas de um retângulo de ouro, mas isso não torna esclusa a percepção visual de quem tem incorporado os aspectos imagéticos do retângulo de ouro, considerando a proximidade do resultado.

Olhar para o quadro "O Nascimento de Vênus" e ver em sua pintura traços estéticos, muitos de nós não poderia distinguir apenas visualizando o quadro somente com nosso olhar primeiro, desprovido de técnica artística. A leitura da obra requer conhecimento especializado de curadores e artistas que viveram na época, ou de estudiosos que se dedicam ao estudo das artes e que dispõem de técnicas que permitem distinguir certos traços de outros. Assim, um leigo pode eleger, portanto, por motivos particulares, alguns pontos que lhes chamam atenção na obra, ou, até mesmo, desconhecê-la como famosa. É nesse sentido que Wittgenstein assinala que somos *cegos para o aspecto*. Com outras palavras: por não sermos proficientes no assunto, nossa vivência conceitual no âmbito da arte não nos permite a emissão de um parecer detalhado sobre o quadro.

Figura 07: O Nascimento de Vênus
Fonte: adaptado de Gomes (2010)

Na obra "O Sacramento da Última Ceia", pintura surrealista de Salvador Dalí, feita por meio da técnica chamada "óleo sobre tela", cujas medidas são aproximadamente $167\ cm$ de altura por $270\ cm$ de largura (Livio, 2006), nota-se que a razão entre as medidas da largura e altura, nessa ordem, tem como resultado, aproximado em três casas, o número $1{,}617$, evidenciando um resultado ainda mais próximo do número de ouro. Além disso, percebemos que as evidências não se restringem às dimensões do quadro, a presença do número de ouro também pode ser vista nos aspectos da imagem. Nota-se em tal imagem a presença de um grande poliedro regular chamado *dodecaedro*. Percepção caracterizada por vermos na imagem faces regulares pentagonais. Essas percepções são possíveis porque assimilamos conceitos que nos permitem notar, mediante traços da pintura, características que remetem ao número de ouro. Entretanto, isso exige, além do conhecimento de determinados conceitos, o domínio

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

de uma *técnica*. Ademais, entendemos como técnica a qualificação ou capacidade que o sujeito possui de explicar com detalhes, mediante conceitos no campo da linguagem e da arte, por exemplo, a presença de traços característicos de determinado artista. Perceber esses traços exige muito mais do que simplesmente olhar para a imagem, isso remete a interpretações que fazemos em face de nossas vivências empíricas, tendo como pano de fundo a amplitude do nosso vocabulário.

Figura 08: O Sacramento da Última Ceia
Fonte: Livio (2006)

Com relação ao quadro "Mona Lisa", nota-se, no meio acadêmico, enfáticas afirmações da presença do número de ouro nessa pintura (Oliveira & Ferreira, 2010; Câmara & Rodrigues, 2008; Martins, 2008; Francisco, 2017). Para o autor Mario Livio, tal pintura foi "tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca" (Livio, 2006, p. 186-187). Nota-se em suas medidas, "77 por 53 centímetros" (Moraes, 2013, p. 445), por meio do resultado da divisão $77 \div 53$, aproximado em três casas, igual a $1{,}453$, que elas não são de um retângulo de ouro. Entretanto, existem outras afirmações de que o rosto da Mona Lisa é inscritível num retângulo de ouro (conforme Figura 09), mas não especificam precisamente que pontos do rosto compõem tal inscrição. Neste âmbito, por falta de domínio técnico e por não fazer parte de nossas formas de vida, não conseguimos perceber aspectos como traços, perspectivas, formas, nuanças, dentre outras minúcias da visão do artista, no quadro Mona Lisa. A forma de *ver* um objeto vai se aprimorando ao passo em que conseguimos perceber aquilo que assimilamos por meio de nossas vivências empíricas, isto é, traços que diante dos nossos olhos nos passavam despercebidos, agora conseguimos percebê-los de maneira quase que imediata.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

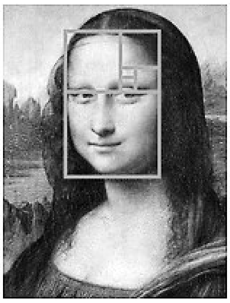


Figura 09: Mona Lisa
Fonte: adaptado de Moraes (2013)

A Grande Pirâmide de Gisé possui uma altura aproximada de $147\ m$ e base próxima de um quadrado cujo lado mede aproximadamente $230\ m$ (Livio, 2006). Uma possível relação com o número de ouro pode ser notada na razão entre a altura da face lateral triangular e o apótema da base. Para verificar tal relação, faz-se necessário encontrar a medida da altura da face lateral. Assim, fixando o nosso olhar na Figura 10, podemos notar, dentre outros aspectos, que a altura da face lateral, a altura da pirâmide e o apótema da base formam um triângulo retângulo. Com outras palavras, *vemos* esses traços *como* um triângulo retângulo. Desse modo, considerando as medidas x (altura da face lateral), y (apótema da base) e h (altura da pirâmide) indicadas na Figura 10, podemos fazer uso do chamado teorema de Pitágoras. Para tanto, notemos que a medida y é igual a $115\ m$. Como a medida h é igual a $147\ m$, tem-se que a medida x da altura da face lateral, aproximada em três casas, é igual a $186{,}639\ m$. Tomando as medidas da altura da face lateral e do apótema da base, nessa ordem, na forma de razão, obtemos, aproximado em três casas, o seguinte resultado: $\frac{186{,}639\ m}{115\ m} \cong 1{,}623$. Esses aspectos não são simples de serem notados, considerando não dispormos de uma *lente* como o retângulo ou a espiral de ouro. Entretanto, existem técnicas para o "substrato dessa vivência", trata-se de olhar para um seguimento de reta e notar neste o ponto em que devemos cortá-lo na "razão extrema e média".

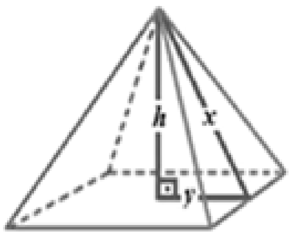


Figura 10: pirâmide de base quadrada
Fonte: figura construída pelo autor

Algumas observações com relação a elementos da natureza, como a disposição das sementes do girassol (Figura 11), do centro para a borda ou da borda para o centro, nos causa a percepção de uma curva cujos aspectos se assemelham à espiral de ouro. Esses aspectos, também, podem ser notados na concha do náutilo (Figura 12). Reconhecer os traços da espiral de ouro nas sementes do girassol ou no náutilo importa no domínio de uma série de conceitos e técnicas. Isso implica dizer que a espiral já nos foi apresentada, que conhecemos suas características, traços, que sabemos identificá-la em meio aos mais diversos traços empíricos etc. São essas vivências empíricas, onde somos oportunizados a lidar com a espiral, que nos permitem olhar para as sementes do girassol e para o tracejado do náutilo e vê-los segundo seus aspectos imagéticos. Tais vivências nos habilitam a fazer comparações entre os traços de um e do outro com a espiral de ouro, notando aspectos de semelhanças e/ou diferenças.

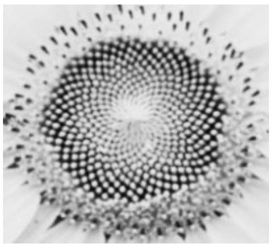


Figura 11: sementes do girassol
Fonte: adaptado de Francisco (2017)

Figura 12: concha do náutilo
Fonte: adaptado de Bedeschi (2009)

Os exemplos acerca da presença do número de ouro na arte, arquitetura e natureza, nos permitem olhar para o ensino da matemática e nos convencer de que podemos ilustrar conceitos da matemática escolar relacionando-os com as percepções visuais que devemos ter para identificar objetos matemáticos. Muitos problemas matemáticos, se não todos, exigem a percepção de aspectos em objetos matemáticos para o curso de sua solução. Podemos observar, por exemplo, uma situação onde seria necessário calcular a medida da diagonal de um retângulo de ouro, sendo fornecidas as medidas do comprimento e largura. Para tanto, devemos olhar para o objeto matemático retângulo e perceber nele a existência de dois triângulos retângulos sobrepostos. Isto é, precisamos *ver* os lados do retângulo e sua diagonal *como* um triângulo retângulo. Percepções como essas muitas vezes passam despercebidas pelos estudantes. Enquanto professores, carecemos explorar esses aspectos, tendo em vista o

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

esclarecimento dos objetos matemáticos. Nessa senda, devemos considerar os jogos de linguagem acometidos pelos estudantes. Com outras palavras: a forma como nos expressamos deve ser compreendida pelos estudantes e vice-versa.

5 Algumas Considerações

Amparados em Wittgenstein, concordamos que *ver é um estado*, e que este estado depende do domínio de técnicas. Ver aqui não é olhar de relance as observações provenientes do senso comum. No ensino de matemática, esperamos que o estudante *veja* e interprete determinados conceitos conforme o que lhes foi ensinado. Desse modo, um conceito não pode ser confundido com aquilo que ele conhece tacitamente. Por conseguinte, conhecimentos correlatos não, necessariamente, tratam do mesmo mundo/universo da matemática. A técnica que o professor de matemática possui, deve-se à sua formação. Assim, o professor em seu discurso emprega um jogo de linguagem para explicar conceitos da matemática usando diferentes técnicas de ensino. Mas, isso nem sempre é adequado à forma de vida do estudante, que convive com a linguagem natural do seu cotidiano.

Referências

Bedeschi, L. P. L.; Amaral, L.; Costa, W. J. V. (2009, novembro). Aplicação da proporção áurea no processo de desenvolvimento de produtos. In *V Simpósio Acadêmico de Engenharia de Produção* (pp. 1-12). Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa. Recuperado de http://www.saepro.ufv.br/wp-content/uploads/2009.12.pdf

Bouveresse, J. (1973). Wittgenstein: la rime et la raison (Science, Éthique et Esthétique). Paris: Les Editions Minuit.

Câmara, M. A.; Rodrigues, M. S. (2008). O Número Φ. *FAMAT em Revista*. Recuperado de http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf

Francisco, S. V. L. (2017). *Entre o fascínio e a realidade da razão áurea* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto.

Gottschalk, C. M. C. (2006). Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In *Colóquio Wittgenstei* (pp. 73-93). Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará.

Gomes, A. M. (2010). Boccaccio e Petrarca na pintura exemplar de Botticelli. *Gláuks*. Recuperado de

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2019.e57939

https://www.revistaglauks.ufv.br/index.php/Glauks/issue/view/2

Lacerda, J. A. (2017). *O tempo anacrônico nos atlas de Warburg e Richter* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo horizonte.

Livio, M. (2006). Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record.

Martins, K. B. (2015). *Vida como obra de arte?!... Processos educativos com foco nos brincares, nas sexualidades e nas relações de gênero em uma brinquedoteca no sul de Minas Gerais* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Martins, L. F. (2008). *Motivando o ensino de geometria* (Monografia de Especialização). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

Moraes, E. (2013). Mona Lisa: sentidos múltiplos de um sorriso enigmático. *Delta*. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/delta/v29nspe/v29nspea05.pdf

Oliveira, E.; Ferreira, T. E. (2010). O número de ouro e suas manifestações na natureza e na arte. *Revista Complexus*, n. 2, 64-81.

Ostrower, F. (1998). A sensibilidade do intelecto: visões paralelas de espaço e tempo na arte e na ciência. Rio de Janeiro: Campus.

Silva, R.; Barros, J. V. (2014). O número de ouro e suas aplicações no ensino aprendizagem da matemática. *Revista Diálogos*. Recuperado de http://www.revistadialogos.com.br/Dialogos_12/Janaina_Robisonere_NdeOuro.pdf

Silveira. M. R. A. (2006). Linguagem, matemática e conhecimento. In *V Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática*. Passo Fundo, RS: Universidade de Passo Fundo.

Souza, A. R. (2013). *Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Tahan, M. (1973). As maravilhas da matemática. Rio de Janeiro: Bloch.

Wittgenstein, L. (1998). Last Writings on the Philosophy of Psychology. Oxford: Blackwell.

Wittgenstein, L. (2013). Investigações Filosóficas. Rio de Janeiro: Vozes.

Submetido em: 28/06/2018

Aceito em: 16/05/2019